This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

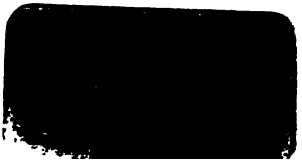
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3608.45

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM

Chemical Laboratory



Wm P. Dexter

Berlin d 7ta März 1858.

$\int_0^p df x = c$. If we change the variable Attributed for x another function $\varphi . x = z$ if $\varphi x = z$.

$\int_0^{\varphi p} d f z = c$, If $z = \varphi x$, p must be φp.

p. 149 $x' = x + h - z$,

$z = -x' + x + h = x'(-1) + x + h$,

The $\int$ becomes

$$\int_{x(-1)+x+h}^{(x+h)(-1)+x+h} f'(x+h-z)\, dz = \int_h^0 f'(x+h-z)\, dz$$

Elementarlehrbuch

der

Theorie der Functionen

oder

der Infinitesimalanalysis.

Mit

besonderer Beziehung auf ihre Anwendung in den Naturwissenschaften, Künsten und Gewerben.

Von

A. A. Cournot,

Generalstudieninspector zu Paris.

Deutsch bearbeitet

von

Dr. C. H. Schnuse.

Mit 5 lithographirten Figurentafeln.

Darmstadt.

Druck und Verlag von Carl Wilhelm Leske.

1845.

Math 3608.45

MAR 7 1898
LIBRARY.
Chem. Lab.

Dem Andenken

Poisson's,

Pair von Frankreich,

Mitglied der Academie der Wissenschaften zu Paris und des Königlich Französischen öffentlichen Unterrichtsrathes ꝛc.

Als Zeichen der Dankbarkeit und Anhänglichkeit

vom Verfasser.

Vorwort des Ueberſetzers.

Es iſt faſt unglaublich, was für verkehrte Vorſtellungen ſich viele Mathematiker und Philoſophen noch heutiges Tages von dem Weſen und dem Zwecke der höhern mathematiſchen Analyſis machen, welcher ſinn- und bedeutungsloſe Formalismus bei der Begründung der Principien der höhern Analyſis in den meiſten Lehrbüchen angewandt wird, auf was für grund- und bodenloſe Beweiſe, auf welche leere Tautologien und logiſche Zirkel, überhaupt auf welche bedauerliche Verkehrtheiten man hier ſtößt und endlich, was für wunderliche Einwürfe man gegen die Newton'ſche und Leibnitz'ſche Begründungsart der höhern Analyſis gemacht hat. So ſetzt man z. B. ſehr oft bei der Deduction der Principien der Differenzialrechnung die Entwickelung der Functionen in Reihen als bekannt voraus, und wendet umgekehrt die Taylor'ſche und Maclaurin'ſche Formel auf die Entwickelung der Functionen in Reihen an und drehet ſich ſo im Kreiſe herum.

Die Principien der Differenzialrechnung laſſen ſich aber nicht blos auf die einfachſte und eleganteſte Weiſe ohne die Einmiſchung der Reihenentwickelungen, welche nur falſche Vorſtellungen in dem Lernenden erwecken, und außerdem, wenn man nicht ganz ſinn- und gedankenlos operiren will, die Lehre von der Convergenz der Reihen als bekannt vorausſetzen, ableiten, ſondern ſie müſſen ohne dieſes Hülfsmittel, welches hier ganz überflüſſig iſt, direct aus dem Begriffe der ſtetig veränderlichen Größe und der Function derſelben deducirt werden; denn die Differenzialrechnung gibt ſelbſt erſt die directeſten und allgemeinſten Formeln zur Entwickelung der Functionen in Reihen an die Hand, und außerdem ſind die Mittel, durch welche man in der Algebra oder niedern Analyſis z. B. die Functionen a^x, log. $(1+x)$, sin. x ꝛc. in Reihen entwickelt, bei Lichte beſehen, nichts als eine verſteckte und entſtellte Anwendung der Mittel, welche die Differenzialrechnung zu demſelben Zwecke darbietet; ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Ueberhaupt ſind die Operationen der höhern Analyſis einfache Grundoperationen, welche man unmittelbar und namentlich ohne die Anwendung eines ſo ſchlüpfrigen und weitſchichtigen Hülfsmittels, wie die Theorie der Reihen,

begründen muß. Denn ſelbſt dann, wenn die Reihen convergent ſind, kann man auf unrichtige Reſultate geführt werden, wie Cauchy gezeigt hat. Indeſſen hat Cauchy und auch Cournot dennoch bei der Differenzirung der Function a^x oder log. x Reihenentwickelungen angewandt, was Letzterer gar nicht nöthig gehabt hätte, da er vorher (§. 29) allgemein bewieſen hat, daß $\lim. \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ im Allgemeinen, d. h. ſo lange für x kein ſpecieller Werth geſetzt wird, exiſtirt; alſo auch in dem beſondern Falle $f(x) = a^x$ oder $f(x) = \log. x$.

Namentlich iſt es aber die gehörige, richtige und naturgemäße Entwickelung der Grundbegriffe und des Gegenſtandes der höhern Analyſis, welche man in den meiſten Lehrbüchern vergebens ſucht. Man definirt wohl, was unter der höhern Analyſis, unter Differenzial, Ableitung ꝛc. zu verſtehen ſei; allein man zeigt nicht näher, worin das Weſen der definirten Gegenſtände beſteht, worauf die ganze Unterſuchung hinausläuft, wie der menſchliche Geiſt bei der fortſchreitenden Entwickelung der mathematiſchen Wiſſenſchaft mit Nothwendigkeit auf die Begriffe und Methoden der höhern Analyſis geführt iſt. Daß der Begriff des unendlich Kleinen oder der Grenze bei der analytiſchen Behandlung ſtetig veränderlicher Größen unentbehrlich iſt, wenn man ſich nicht mit leeren Redensarten begnügen will. Ja, man hat bis auf die neueſte Zeit nicht einmal daran gedacht, die Exiſtenz des Objectes derſelben, nämlich der Ableitung oder des Differenzialquotienten, allgemein und ſtreng zu beweiſen, ehe man zur Beſtimmung deſſelben in ſpeciellen Fällen ſchreiten kann, daß man die Principien der höhern Analyſis nur auf ſtetige Functionen anwenden darf, ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Wie weit der gedankenloſe Formalismus in dieſer Beziehung geht, ſieht man unter andern aus den Schriften des bekannten Mathematikers M. Ohm in Berlin, der uns ſogar in der neueſten Zeit in ſeiner Schrift: „Geiſt der mathematiſchen Analyſis", Berlin 1842, hat weiß machen wollen, die Buchſtaben in den allgemeinen algebraiſchen oder analytiſchen Formeln dürften weder Größen, noch Zahlen bezeichnen, ſie ſeien blos Träger (??) der Operationen — und er meint damit das Weſen der mathematiſchen Analyſis zugleich abſtracter und naturgemäßer aufzufaſſen. — Wennn aber der Mathematiker in der höhern Analyſis auch von der Größe und Zahl abſtrahirt, ſo bleibt ihm offenbar nichts mehr zu betrachten übrig, und ſeine Analyſis iſt nichts, als ein inhaltleeres und gedankenloſes Zeichenſpiel. —

Eine Folge von dieſer abſurden Vorſtellung Ohm's iſt es nun, daß er in Beziehung auf Reihenentwickelungen und deren Zuläſſigkeit und Anwendbarkeit in der Analyſis nicht minder ungereimte Behauptungen aufſtellt. Er ſagt z. B.: Man hat daher die allgemein richtigen Gleichungen:

$$(1)\ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{in inf.},$$

$$(2)\ \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \text{in inf.},$$

woraus folgt:

$$(3)\ 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{in inf.} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \text{in inf.}$$

und dieſe letzte Gleichung ſoll nach Ohm's Behauptung ebenfalls allgemein, d. h. ſo lange richtig ſein, als man ſich unter x weder eine reelle, noch eine imaginäre Zahl denkt. — Was ſoll man ſich aber unter x denken? Woran anders, als an Zahlen kann man aber arithmetiſche Operationen vornehmen? — Das ganze Gerede des Herrn Ohm iſt offenbar eine radicale Abſurdität. —

Nach der unter allen Mathematikern der Erde üblichen Sprache haben die Reihen (1) und (2) keine allgemeine Gültigkeit, weil die erſte für jeden Werth von $x > 1$ und die zweite für jeden Werth von $x < 1$ divergent wird. Folglich kann die Gleichung (3) für gar keinen Werth von x ſtattfinden, d. h. ſie iſt ein analytiſches Abſurdum; denn eine Formel, worin man ſich unter den darin vorkommenden Buchſtaben weder reelle, noch imaginäre Zahlen oder Größen denken darf, iſt ein völlig ſinn- und bedeutungsloſes Ding. Eine analytiſche Formel iſt nur dann allgemein gültig, wenn ſie für jeden reellen oder imaginären Werth der darin vorkommenden Buchſtaben ſtattfindet, und wenn dieſes nicht der Fall iſt, ſo hat man zu unterſuchen, innerhalb welcher Grenzen dieſe Bedingung erfüllt wird, damit man der Formel keine größere Allgemeinheit beilegt, als ſie wirklich darbietet. — So etwas nennt nun Herr Ohm „Geiſt der mathematiſchen Analyſis"!! —

Gegen ſolchen begriffsloſen Formalismus und Mechanismus in der Mathematik, welchen wir hier nicht weiter verfolgen können, haben nun die reinen Philoſophen geeifert, welche das Weſen und die Tendenz der höhern Analyſis begreiflich zu entwickeln geſucht haben, aber wegen Mangel an der erforderlichen Sachkenntniß ihrerſeits in die gröbſten Irrthümer verfallen ſind, und ſtatt der ſtrengen mathematiſchen Entwickelung, bei welcher weder die Form, noch der Begriff vernachläſſigt werden darf, weitſchweifige, nichtsſagende und verkehrte Raiſonnements geben. Zum Beweiſe dieſer Behauptung wird es genügen, einige Stellen aus Hegels „Wiſſenſchaft der Logik", Berlin 1833, und aus C. Frantz „Philoſophie der Mathematik", Leipzig 1842, wörtlich anzuführen.

Hegel ſagt S. 286 ſeiner Logik Theil I.:

„Die gewöhnliche Beſtimmung des mathematiſchen Unendlichen iſt, daß es eine Größe ſei, über welche es, — wenn ſie als das Unendlichgroße — keine größere oder, — wenn ſie als das Unendlichkleine beſtimmt iſt — kleinere mehr gebe, oder die, in jenem Falle, größer, oder in dieſem Falle

Elementarlehrbuch

der

Theorie der Functionen

oder

der Infinitesimalanalysis.

Mit

besonderer Beziehung auf ihre Anwendung in den Naturwissenschaften, Künsten und Gewerben.

Von

A. A. Cournot,
Generalstudieninspector zu Paris.

Deutsch bearbeitet

von

Dr. C. H. Schnuse.

Mit 5 lithographirten Figurentafeln.

Darmstadt.
Druck und Verlag von Carl Wilhelm Leske.

1845.

Math 3608.45

MAR 7 1898
LIBRARY.
Chem. Lab.

Dem Andenken

Poisson's,

Pair von Frankreich,

Mitglied der Academie der Wissenschaften zu Paris und des Königlich Französischen öffentlichen Unterrichtsrathes ꝛc.

Als Zeichen der Dankbarkeit und Anhänglichkeit

vom Verfasser.

Vorwort des Ueberſetzers.

Es iſt faſt unglaublich, was für verkehrte Vorſtellungen ſich viele Mathematiker und Philoſophen noch heutiges Tages von dem Weſen und dem Zwecke der höhern mathematiſchen Analyſis machen, welcher ſinn- und bedeutungsloſe Formalismus bei der Begründung der Principien der höhern Analyſis in den meiſten Lehrbüchen angewandt wird, auf was für grund- und bodenloſe Beweiſe, auf welche leere Tautologien und logiſche Zirkel, überhaupt auf welche bedauerliche Verkehrtheiten man hier ſtößt und endlich, was für wunderliche Einwürfe man gegen die Newton'ſche und Leibnitz'ſche Begründungsart der höhern Analyſis gemacht hat. So ſetzt man z. B. ſehr oft bei der Deduction der Principien der Differenzialrechnung die Entwickelung der Functionen in Reihen als bekannt voraus, und wendet umgekehrt die Taylor'ſche und Maclaurin'ſche Formel auf die Entwickelung der Functionen in Reihen an und drehet ſich ſo im Kreiſe herum.

Die Principien der Differenzialrechnung laſſen ſich aber nicht blos auf die einfachſte und eleganteſte Weiſe ohne die Einmiſchung der Reihenentwickelungen, welche nur falſche Vorſtellungen in dem Lernenden erwecken, und außerdem, wenn man nicht ganz ſinn- und gedankenlos operiren will, die Lehre von der Convergenz der Reihen als bekannt vorausſetzen, ableiten, ſondern ſie müſſen ohne dieſes Hülfsmittel, welches hier ganz überflüſſig iſt, direct aus dem Begriffe der ſtetig veränderlichen Größe und der Function derſelben deducirt werden; denn die Differenzialrechnung gibt ſelbſt erſt die directeſten und allgemeinſten Formeln zur Entwickelung der Functionen in Reihen an die Hand, und außerdem ſind die Mittel, durch welche man in der Algebra oder niedern Analyſis z. B. die Functionen a^x, log. $(1+x)$, sin. x ꝛc. in Reihen entwickelt, bei Lichte beſehen, nichts als eine verſteckte und entſtellte Anwendung der Mittel, welche die Differenzialrechnung zu demſelben Zwecke darbietet; ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Ueberhaupt ſind die Operationen der höhern Analyſis einfache Grundoperationen, welche man unmittelbar und namentlich ohne die Anwendung eines ſo ſchlüpfrigen und weitſchichtigen Hülfsmittels, wie die Theorie der Reihen,

begründen muß. Denn ſelbſt dann, wenn die Reihen convergent ſind, kann man auf unrichtige Reſultate geführt werden, wie Cauchy gezeigt hat. Indeſſen hat Cauchy und auch Cournot dennoch bei der Differenzirung der Function a^x oder log. x Reihenentwickelungen angewandt, was Letzterer gar nicht nöthig gehabt hätte, da er vorher (§. 29) allgemein bewieſen hat, daß $\lim. \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ im Allgemeinen, d. h. ſo lange für x kein ſpecieller Werth geſetzt wird, exiſtirt; alſo auch in dem beſondern Falle $f(x) = a^x$ oder $f(x) = \log. x$.

Namentlich iſt es aber die gehörige, richtige und naturgemäße Entwickelung der Grundbegriffe und des Gegenſtandes der höhern Analyſis, welche man in den meiſten Lehrbüchern vergebens ſucht. Man definirt wohl, was unter der höhern Analyſis, unter Differenzial, Ableitung ꝛc. zu verſtehen ſei; allein man zeigt nicht näher, worin das Weſen der definirten Gegenſtände beſteht, worauf die ganze Unterſuchung hinausläuft, wie der menſchliche Geiſt bei der fortſchreitenden Entwickelung der mathematiſchen Wiſſenſchaft mit Nothwendigkeit auf die Begriffe und Methoden der höhern Analyſis geführt iſt. Daß der Begriff des unendlich Kleinen oder der Grenze bei der analytiſchen Behandlung ſtetig veränderlicher Größen unentbehrlich iſt, wenn man ſich nicht mit leeren Redensarten begnügen will. Ja, man hat bis auf die neueſte Zeit nicht einmal daran gedacht, die Exiſtenz des Objectes derſelben, nämlich der Ableitung oder des Differenzialquotienten, allgemein und ſtreng zu beweiſen, ehe man zur Beſtimmung deſſelben in ſpeciellen Fällen ſchreiten kann, daß man die Principien der höhern Analyſis nur auf ſtetige Functionen anwenden darf, ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Wie weit der gedankenloſe Formalismus in dieſer Beziehung geht, ſieht man unter andern aus den Schriften des bekannten Mathematikers M. Ohm in Berlin, der uns ſogar in der neueſten Zeit in ſeiner Schrift: „Geiſt der mathematiſchen Analyſis", Berlin 1842, hat weiß machen wollen, die Buchſtaben in den allgemeinen algebraiſchen oder analytiſchen Formeln dürften weder Größen, noch Zahlen bezeichnen, ſie ſeien blos Träger (??) der Operationen — und er meint damit das Weſen der mathematiſchen Analyſis zugleich abſtracter und naturgemäßer aufzufaſſen. — Wennn aber der Mathematiker in der höhern Analyſis auch von der Größe und Zahl abſtrahirt, ſo bleibt ihm offenbar nichts mehr zu betrachten übrig, und ſeine Analyſis iſt nichts, als ein inhaltleeres und gedankenloſes Zeichenſpiel. —

Eine Folge von dieſer abſurden Vorſtellung Ohm's iſt es nun, daß er in Beziehung auf Reihenentwickelungen und deren Zuläſſigkeit und Anwendbarkeit in der Analyſis nicht minder ungereimte Behauptungen aufſtellt. Er ſagt z. B.: Man hat daher die allgemein richtigen Gleichungen:

$$(1)\quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{in inf.},$$

$$(2)\quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \text{in inf.},$$

woraus folgt:

$$(3)\quad 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{in inf.} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \text{in inf.}$$

und dieſe letzte Gleichung ſoll nach Ohm's Behauptung ebenfalls allgemein, d. h. ſo lange richtig ſein, als man ſich unter x weder eine reelle, noch eine imaginäre Zahl denkt. — Was ſoll man ſich aber unter x denken? Woran anders, als an Zahlen kann man aber arithmetiſche Operationen vornehmen? — Das ganze Gerede des Herrn Ohm iſt offenbar eine radicale Abſurdität. —

Nach der unter allen Mathematikern der Erde üblichen Sprache haben die Reihen (1) und (2) keine allgemeine Gültigkeit, weil die erſte für jeden Werth von $x > 1$ und die zweite für jeden Werth von $x < 1$ divergent wird. Folglich kann die Gleichung (3) für gar keinen Werth von x ſtattfinden, d. h. ſie iſt ein analytiſches Abſurdum; denn eine Formel, worin man ſich unter den darin vorkommenden Buchſtaben weder reelle, noch imaginäre Zahlen oder Größen denken darf, iſt ein völlig ſinn- und bedeutungsloſes Ding. Eine analytiſche Formel iſt nur dann allgemein gültig, wenn ſie für jeden reellen oder imaginären Werth der darin vorkommenden Buchſtaben ſtattfindet, und wenn dieſes nicht der Fall iſt, ſo hat man zu unterſuchen, innerhalb welcher Grenzen dieſe Bedingung erfüllt wird, damit man der Formel keine größere Allgemeinheit beilegt, als ſie wirklich darbietet. — So etwas nennt nun Herr Ohm „Geiſt der mathematiſchen Analyſis"!! —

Gegen ſolchen begriffsloſen Formalismus und Mechanismus in der Mathematik, welchen wir hier nicht weiter verfolgen können, haben nun die reinen Philoſophen geeifert, welche das Weſen und die Tendenz der höhern Analyſis begreiflich zu entwickeln geſucht haben, aber wegen Mangel an der erforderlichen Sachkenntniß ihrerſeits in die gröbſten Irrthümer verfallen ſind, und ſtatt der ſtrengen mathematiſchen Entwickelung, bei welcher weder die Form, noch der Begriff vernachläſſigt werden darf, weitſchweifige, nichtsſagende und verkehrte Raiſonnements geben. Zum Beweiſe dieſer Behauptung wird es genügen, einige Stellen aus Hegels „Wiſſenſchaft der Logik", Berlin 1833, und aus C. Frantz „Philoſophie der Mathematik", Leipzig 1842, wörtlich anzuführen.

Hegel ſagt S. 286 ſeiner Logik Theil I.:

„Die gewöhnliche Beſtimmung des mathematiſchen Unendlichen iſt, daß es eine Größe ſei, über welche es, — wenn ſie als das Unendlichgroße — keine größere oder, — wenn ſie als das Unendlichkleine beſtimmt iſt — kleinere mehr gebe, oder die, in jenem Falle, größer, oder in dieſem Falle

kleiner sei, als jede beliebige Größe. — In dieser Definition ist freilich der wahre Begriff nicht ausgedrückt, vielmehr nur, wie schon bemerkt, derselbe Widerspruch, der im unendlichen Progresse ist; aber sehen wir, was an sich darin enthalten ist. Eine Größe wird in der Mathematik definirt, daß sie etwas sei, das vermehrt und vermindert werden könne; überhaupt also eine gleichgültige Grenze. Indem nun das Unendlichgroße oder Kleine ein solches ist, das nicht mehr vermehrt oder vermindert werden könne, so ist es in der That kein Quantum als solches mehr. Diese Consequenz ist nothwendig und unmittelbar." .....

Solche Ungereimtheiten sind noch keinem Mathematiker eingefallen; vielmehr versteht derselbe unter unendlich kleinen und großen Größen solche, welche nach der Voraussetzung, oder ihrer Natur nach resp. kleiner oder größer gedacht werden können, als jede gegebene noch so kleine oder große Größe.

Seite 298 sagt Hegel: „In dem Sinne, daß auch an die Stelle von x und y einer Function eine unendliche, d. h. unerschöpfliche Menge von Zahlen gesetzt werden könne, sind a und b so sehr veränderliche Größen als jene, x, und y. Der Ausdruck: „veränderliche Größen", ist darum sehr vage, und unglücklich gewählt für Größebestimmungen, die ihr Interesse und ihre Behandlungsart in etwas ganz Anderm liegen haben, als in ihrer bloßen Veränderlichkeit."

So etwas kann nur ein völliger Nichtkenner des Gegenstandes, wie Hegel, sagen; denn es ist ein wesentlicher Unterschied zwischen einer bloß allgemeinen und einer stetig veränderlichen Größe. So z. B. kann in der Gleichung des Kreises $y^2 + x^2 = r^2$ der Halbmesser r zwar einen beliebigen Werth haben, aber wird nicht wie x und y als stetig veränderlich gedacht. —

S. 299 sagt Hegel ferner: „Das Verhältniß einer Größe zur Potenz ist nicht ein Quantum, sondern wesentlich qualitatives Verhältniß; das Potenzverhältniß ist der Umstand, der als Grundbestimmung anzusehen ist. — In der Function der geraden Linie $y = ax$ aber ist $\frac{x}{y} = a$ ein gewöhnlicher Bruch und Quotient; diese Function ist daher nur formell eine Function von veränderlichen Größen, oder x und y sind hier was a und b in $\frac{a}{b}$, sie sind nicht in derjenigen Bestimmung, in welcher die Differential- und Integralrechnung sie betrachtet. — Wegen der besondern Natur der veränderlichen Größen in dieser Betrachtungsweise wäre es zweckmäßig gewesen, für sie sowohl einen besondern Namen, als andere Bezeichnungen einzuführen, als die gewöhnlichen der unbekannten Größen in jeder endlichen, bestimmten oder unbestimmten Gleichung; um ihrer wesentlichen Verschiedenheit willen von solchen bloß unbekannten Größen, die an sich vollkommen bestimmte Quanta, oder ein bestimmter Umfang von bestimmten Quantis sind. — Es ist auch nur der Mangel des

Bewußtſeins, über die Eigenthümlichkeit deſſen, was das Intereſſe der höhern Analyſis ausmacht, und das Bedürfniß und die Erfindung des Differential-Kalküls herbeigeführt hat, daß Functionen des erſten Grades wie die Gleichung der geraden Linie in die Behandlung dieſes Kalkuls für ſich mit hereingenommen werden; ſeinen Antheil an ſolchem Formalismus hat ferner der Mißverſtand, der die an ſich richtige Forderung der Verallgemeinerung einer Methode dadurch zu erfüllen meint, daß die ſpecifiſche Beſtimmtheit, auf die ſich das Bedürfniß gründet, weggelaſſen wird, ſo daß es dafür gilt, als ob es ſich in dieſem Felde nur um veränderliche Größen überhaupt handle. Es wäre wohl viel Formalismus in den Betrachtungen dieſer Gegenſtände, wie in der Behandlung erſpart worden, wenn man eingeſehen hätte, daß derſelbe nicht veränderliche Größen als ſolche, ſondern Potenzenbeſtimmungen betreffe." .....

Solche Reden kann nur ein der Sache völlig Unkundiger führen. Denn gerade um für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einen beſtimmten Werth zu erhalten, wenn der Werth von x fixirt wird, muß man $\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ ſtatt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ betrachten, d. h. man muß eben den Fall einer beliebigen Function auf den der Function $y = ax$ des erſten Grades, für welche ohne weiteres $\frac{y}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = a$ iſt, zurückführen. Hegel meint nämlich in allem Ernſte, der Zweck und Gegenſtand der Differenzialrechnung ſei das Depotenziren, das Herabſetzen auf eine niedrigere Potenz, weil er bei dem Durchblättern mathematiſcher Werke bemerkt hat, daß wenn $y = x^n$ iſt, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$, ꝛc. iſt. Wie ſteht es denn aber mit den Functionen a^x, e^x, log. x, sin. x, cos. x, ꝛc.?? — — S. 303 ſeiner Logik ſagt Hegel: „Es ſind Größen verſtanden in ihrem Verſchwinden, d. h. die nicht mehr Quanta ſind; ferner nicht Verhältniſſe beſtimmter Theile, ſondern die Grenzen des Verhältniſſes. Es ſollen alſo ſowohl die Quanta für ſich die Seiten des Verhältniſſes, als damit auch das Verhältniß (?), inſofern es ein Quantum wäre, verſchwinden; die Grenze des Größen-Verhältniſſes iſt, worin es iſt und nicht iſt; dieß heißt genauer, worin das Quantum verſchwunden, und damit das Verhältniß nur als qualitatives Quantitäts-Verhältniß (?), und die Seiten deſſelben ebenſo als qualitative Quantitäts-Momente erhalten ſind." . . .

Die Mathematik operirt überall nur mit Quantitäten; denn wo Qualitäten in Betracht kommen, z. B. die Krümmung der Linien und Flächen ꝛc., da müſſen Quantitäten dafür ſubſtituirt werden. Daß das in Rede ſtehende Verhältniß unter der Form $\frac{0}{0}$ erſcheint, hat bloß in der allgemeinen Bezeichnung

der Functionen ſeinen Grund und kann ganz vermieden werden, wenn man die betrachtete Function nicht einem allgemeinen Zeichen, z. B. y oder f(x), gleich ſetzt, ſondern bloß mit ihr ſelbſt unmittelbar operirt. Daß aber die fragliche Grenze im Allgemeinen für ſtetige Functionen immer exiſtirt und nur für beſondere Werthe der unabhängigen Veränderlichen Null oder unendlich werden kann, läßt ſich in aller Strenge nachweiſen und muß, wie ſchon bemerkt, gerade zuerſt direct erwieſen werden. Es verhält ſich daher nicht ſo mit dieſem Verhältniſſe, wie Hegel meint, nämlich daß es als Quantum verſchwinde.

S. 310 der Hegel'ſchen Logik heißt es: „Die ältern Analytiker machten ſich hierüber weniger Skrupel; aber die Bemühungen der Neuern gingen vornehmlich dahin, den Kalkul des Unendlichen zur Evidenz der eigentlich geometriſchen Methode zurückzubringen und in ihr die Strenge der Beweiſe der Alten (— Ausdrücke von Lagrange —) in der Mathematik zu erreichen. Allein da das Princip der Analyſis des Unendlichen höherer Natur, als das Princip der Mathematik endlicher Größen iſt, ſo mußte jene von ſelbſt ſogleich auf jene Art von Evidenz Verzicht thun, wie die Philoſophie auch auf diejenige Deutlichkeit keinen Anſpruch machen kann, die die Wiſſenſchaften des Sinnlichen, z. B. Naturgeſchichte, hat, und wie Eſſen und Trinken für ein verſtändlicheres Geſchäft gilt, als Denken und Begreifen." .....

Das klingt ſehr bedenklich, iſt aber glücklicherweiſe hinſichtlich der höhern mathematiſchen Analyſis völlig unwahr; denn die Principien der Differenzial- und Integralrechnung laſſen ſich mit eben der Evidenz begreifen, wie die Lehren der Elementargeometrie und Algebra, wovon namentlich das vorliegende Lehrbuch jedem Leſer den beſten Beweis liefern kann. In Beziehung auf die Hegel'ſche Philoſophie mag der Ausſpruch Hegels wohl begründet ſein. —

S. 314 ſeiner Logik ſagt Hegel: „Die Glieder der Reihe ſind hier nicht nur als Theile einer Summe anzuſehen, ſondern als qualitative Momente eines Ganzen des Begriffs. Hierdurch erhält das Weglaſſen der übrigen Glieder, die der ſchlechtunendlichen Reihe angehören, eine gänzlich verſchiedene Bedeutung von dem Weglaſſen aus dem Grunde der relativen Kleinheit derſelben. Die newton'ſche Auflöſung einer Aufgabe enthielt jenen Fehler, nicht, weil in ihr Glieder der Reihe nur als Theile einer Summe, ſondern weil das Glied, das die qualitative Beſtimmung, auf die es ankam, enthält, nicht berückſichtigt wurde."

„Lagrange hat bekanntlich die urſprüngliche Methode Newton's, die Methode der Reihen, wieder aufgenommen, um der Schwierigkeiten, welche die Vorſtellung des Unendlich-Kleinen, ſo wie derjenigen, welche die Methode der erſten und letzten Verhältniſſe und Grenzen mit ſich führt, überhoben zu ſein. Es iſt von ſeinem Functionen-Kalkul, deſſen ſonſtige Vorzüge in Rückſicht auf Präciſion, Abſtraktion und Allgemeinheit anerkannt genug ſind, als hierher gehörig nur dieß anzuführen, daß er auf dem Fundamentalſatze beruht, daß die

Differenz, ohne daß sie Null werde, so klein angenommen werden könne, daß jedes Glied der Reihe die Summe aller folgenden an Größe übertreffe. — Es wird auch in dieser Methode von den Kategorien vom Zuwachs und von der Differenz der Function angefangen, deren veränderliche Größe den Zuwachs erhalte, womit die lästige Reihe hereinkommt, von der ursprünglichen Funktion; so wie im Verfolg die wegzulassenden Glieder der Reihe nur in der Rücksicht, daß sie eine Summe konstituiren, in Betracht kommen, und der Grund, sie wegzulassen, in das Relative ihres Quantums gesetzt wird. Die Weglassung ist also hier auch nicht für das Allgemeine auf den Gesichtspunkt zurückgeführt, der Theils in einigen Anwendungen vorkommt, worin, wie vorhin erinnert, die Glieder der Reihe eine bestimmte qualitative Bedeutung haben sollen und Glieder außer Acht gelassen werden, nicht darum weil sie unbedeutend an Größe sind, sondern weil sie unbedeutend der Qualität nach sind." ....

Es ist schon oben bemerkt, daß bei der Begründung der Principien der höhern Analysis die Entwickelung der Functionen in Reihen eine ganz unnütze Procedur ist; wenn sie aber einmal angewandt wird, so muß die Reihe auch convergent sein. — Newton's Auflösung war lediglich deßwegen falsch, weil er Größen unberücksichtigt gelassen hatte, die ihrer Quantität, aber nicht ihrer Qualität wegen in Rechnung gebracht werden mußten; denn mit Qualitäten rechnet man überhaupt nicht. — Die Lagrange'sche Begründungsart der höhern Analysis ist die begriffloseste, willkührlichste und vageste von allen, wie man schon seit vielen Jahren eingesehen hat und namentlich auch von Cournot in diesem Werke näher nachgewiesen ist.

S. 330 und folgg. in Hegel's Logik heißt es: „Die ausdrückliche qualitative Größenbestimmtheit bezieht sich somit, wie gleichfalls schon erinnert, wesentlich auf Potenzenbestimmungen(??), und da die Differenzialrechnung das Specifische hat, mit qualitativen Größenformen zu operiren, so muß ihr eigenthümlicher mathematischer Gegenstand die Behandlung von Potenzenformen sein(??), und die sämmtlichen Aufgaben und deren Auflösungen, zu deren Behuf die Differenzialrechnung gebraucht wird, zeigen es, daß das Interesse allein in der Behandlung von Potenzenbestimmungen als solchen liegt." ... (??)

„Die Kategorieen von veränderlichen Größen, Funktionen und dergleichen sind darum für die specifische Größebestimmtheit, die hier in Rede steht, nur formell(??), wie vorhin gesagt worden ist, weil sie von einer Allgemeinheit sind, in welcher dasjenige Specifische, worauf das ganze Interesse des Differenzialkalkuls geht, noch nicht enthalten ist, noch daraus durch Analyse explicirt werden kann; sie sind für sich einfache, unbedeutende, leichte Bestimmungen, die nur erst schwierig gemacht werden, insofern das in sie gelegt werden soll, damit es dann aus ihnen abgeleitet werden könne, was nicht in ihnen liegt, nämlich die specifische Bestimmung der Differenzialrechnung." .... (?? — —)

„Es kann hierzu etwa bemerkt werden, daß, indem nur um der Entwickelung willen ein Zuwachs angenommen iſt, der ohne Quantum ſei (?), es am geſchickteſten geweſen wäre, 1 (das Eins) dafür zu nehmen, indem derſelbe in der Entwickelung immer nur als Factor vorkommt, womit eben der Factor Eins den Zweck erfüllt, daß keine quantitative Beſtimmtheit und Veränderung durch den Zuwachs geſetzt werden ſolle; dagegen dx mit der falſchen Vorſtellung von einer quantitativen Differenz, und andere Zeichen, wie i, mit dem hier unnützen Scheine von Allgemeinheit behaftet, immer das Ausſehen und die Prätenſion von einem Quantum und deſſen Potenzen haben; welche Prätenſion dann die Mühe herbeibringt, ſie deſſenungeachtet wegzubringen und wegzulaſſen.“ .... (?!)

„Ueber die Anwendbarkeit aber ergibt ſich zunächſt aus der Natur der Sache, ohne noch aus den Fällen der Anwendung ſelbſt zu ſchließen, vermöge der aufgezeigten Geſtalt der Potenzenmomente, von ſelbſt Folgendes. Die Entwickelung der Potenzengrößen, wodurch ſich die Functionen ihrer Potenzirung ergeben, enthält, von näherer Beſtimmung abſtrahirt, zunächſt überhaupt die Herabſetzung der Größe auf die nächſt niedrigere Potenz. Die Anwendbarkeit dieſer Operation findet alſo bei ſolchen Gegenſtänden ſtatt, bei welchen gleichfalls ein ſolcher Unterſchied von Potenzenbeſtimmungen vorhanden iſt.“

„Es bietet ſich hierbei aber die Bemerkung an, daß es ſich keineswegs von ſelbſt verſteht, daß ſolche abgeleitete Gleichung auch richtig iſt (nämlich daß aus $x^2 - ax - b = 0$ folge $2x - a = 0$). Bei einer Gleichung mit zwei veränderlichen Größen, die darum, daß ſie veränderliche ſind, den Charakter unbekannte Größen zu ſein nicht verlieren, kommt, wie oben betrachtet wurde, nur ein Verhältniß heraus aus dem angegebenen einfachen Grunde, weil durch das Subſtituiren der Functionen der Potenzirung an die Stelle der Potenzen ſelbſt der Werth der beiden Glieder der Gleichung verändert wird, und es für ſich ſelbſt noch unbekannt iſt, ob auch zwiſchen ihnen bei ſo veränderten Werthen noch eine Gleichung ſtattfinde. Die Gleichung $\frac{dy}{dx} = P$ drückt gar nichts weiter aus, als daß P ein Verhältniß iſt, und es iſt dem $\frac{dy}{dx}$ ſonſt kein reeller Sinn zuzuſchreiben. Von dieſem Verhältniß $= P$ iſt es aber ebenſo noch unbekannt, welchem andern Verhältniſſe es gleich ſeie; ſolche Gleichung, die Proportionalität, gibt demſelben erſt einen Werth und Bedeutung.“ .....

„Mit dem Weglaſſen der Conſtanten hängt eine ähnliche Bemerkung zuſammen, die über die Namen von Differentiation und Integration gemacht werden kann, als früher über den endlichen und unendlichen Ausdruck gemacht wurde, daß nämlich in ihrer Beſtimmung vielmehr das Gegentheil von dem liegt, was der Ausdruck beſagt. Differentiiren bezeichnet das Setzen von Differenzen;

durch das Differentiiren aber wird eine Gleichung vielmehr auf weniger Dimensionen herabgebracht, durch das Weglassen der Constante wird ein Moment der Bestimmtheit hinweggenommen; wie bemerkt, werden die Wurzeln der veränderlichen Größe (??) auf eine Gleichheit gesetzt, die Differenz also derselben aufgehoben. In der Integration hingegen soll die Constante wieder hinzugesetzt werden; die Gleichung wird dadurch allerdings, aber in dem Sinne integrirt, daß die vorher aufgehobene Differenz der Wurzeln (?? köstlich!) wieder hergestellt, das Gleichgesetzte wieder differenziirt wird. — Der gewöhnliche Ausdruck trägt dazu bei, die wesentliche Natur der Sache in Schatten zu setzen und Alles auf den untergeordneten, ja der Hauptsache fremdartigen Gesichtspunkt Theils der unendlich kleinen Differenz, des Inkrements und dergleichen, Theils der bloßen Differenz überhaupt zwischen der gegebenen und der abgeleiteten Function, ohne deren specifischen, d. i. den qualitativen Unterschied zu bezeichnen, zu stellen." ....

„Ebenso der Differential- und Integralkalkul; für das diesem Kalkul Angehörige möchte der Name des Verhältnisses einer Potenzenfunktion und der Funktion ihrer Entwickelung oder Potenzirung der passendste sein, weil er der Einsicht der Natur der Sache am nächsten liegt."... (??—)

Solche schiefe und verkehrte Ansichten, solche durch und durch ungereimte Geschwätze können nur von einem völligen Ignoranten in der höhern Analysis aufgestellt werden, und es wird wohl nicht nöthig sein, auch nur noch ein Wort zur Widerlegung derselben hier zu verlieren. Hegel sagt zwar in seiner Naturphilosophie: „Die philosophische Weise der Darstellung ist nicht eine Willkür, auch einmal zur Veränderung auf dem Kopf zu gehen, nachdem man eine lange Weile auf den Beinen gegangen ist, oder sein Alltagsgesicht auch einmal bemalt zu sehen." Allein nach dem, was er als Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften zu Tage gefördert hat, sollte man fast glauben, er hätte dieses Princip bei seinen Arbeiten auf diesem Felde wirklich zum Grunde gelegt; denn es gehört wirklich eine unbeschreibliche Ignoranz, oder Verwegenheit dazu, der Welt solche Albernheiten weiß zumachen, wie sie Hegel in seinen Werken mittheilt. Nach seiner alles übertreffenden Dialektik ist die Intensität der Schwere unter dem Aequator größer, als unter den Polen, wird ein Eisen- oder Stahlstab durch Magnetisiren schwerer, ꝛc. — ?

Herr Frantz gibt uns folgende begriffliche Deduction des Differentialquotienten:

„Im Verhältnisse sind zwei Größen durch einander und durch eine dritte bestimmt. Durch und für einander bestimmt zu sein, ist als ihre Qualität gesetzt. Damit diese Qualität in reiner Bestimmung für sich selbst sei, müssen die Seiten nur sein, was sie für einander sind. Darum ist ihre Großheit, wonach sie unmittelbar jede einzeln für sich etwas wären, aufzuheben; sie sollen nur im Verhältnisse gelten, außerhalb desselben gelten sie als Größen

— und ſie ſind nichts anders — nicht, d. i. ſind null. In der Gleichung $y = ax + b$ iſt y und x für ſich als Null zu ſetzen, damit das reine Verhältniß erſcheine $\frac{dy}{dx} = a$ — der Differentialquotient, der auch das abſolute Verhältniß genannt werden kann." ....

Das ſind aber nichts als unverſtändliche, unbeſtimmte allgemeine Redensarten, wodurch das Weſen der Differenzialrechnung und die Bedeutung des Differenzialquotienten bei weitem nicht mit der Präciſion und Klarheit charakteriſirt wird, wie es die gediegene mathematiſche Darſtellung erfordert. Indeſſen zeigt die weitere Entwickelung doch, daß Herr Frantz das Weſen der Differenzialrechnung weit beſſer aufgefaßt hat wie Hegel, weil er den Begriff der Function und ihrer ſtetigen Veränderlichkeit in Betracht zieht, und nicht wie Hegel die Differenzialrechnung für eine Potenzenrechnung erklärt; obgleich wir auch Herrn Frantz keine neuen Aufſchlüſſe über den Sinn und Zweck der höhern Analyſis verdanken, und ſeine Erörterungen viel zu einſeitig und dürftig ſind, als daß dadurch Mathematiker, die den heutigen Zuſtand ihrer Wiſſenſchaft kennen, belehrt werden könnten.

Wir werden ſpäter in einer beſondern Schrift die mathematiſche und Naturphiloſophie der Hegel'ſchen Schule einer ausführlichen Kritik unterwerfen, wobei auch die Philoſophie der Mathematik von Herrn Frantz ihre nähere Beurtheilung finden wird.

Als letztes Beiſpiel der herrſchenden verkehrten Anſichten über das Weſen der Differenzialrechnung mag hier noch das ſowohl hiſtoriſch als factiſch grundfalſche Urtheil des Recenſenten von Frantz „Philoſophie der Mathematik" in den Deutſchen Jahrbüchern von 1842 Nr. 289 — 290 Platz finden.

„Die Grenzmethode iſt in Folge verſtändiger Reflexion aus der Methode des Unendlichkleinen hervorgegangen und kann ſich daher gegen eine verſtändige Reflexion nicht wehren, vor welcher ſie allerdings nicht Stand zu halten vermag. Darin zwar iſt Referent mit dem Verfaſſer vollkommen einverſtanden, daß die Reſultate der Methode des Unendlichkleinen zwar genau richtig, aber mit dem Scheine der Ungenauigkeit behaftig ſind, und daß darum jene Methode wiſſenſchaftlich nicht anzuerkennen, aber für die Praxis vollkommen ausreichend und bequem iſt. Aber ſofern die Grenzmethode zu ihrem Vortheil von dieſer Methode ſich unterſcheidet, iſt ſie mit der Functionenrechnung Lagrange's, für welche ſich auch Hegel entſcheidet, identiſch; ſofern ſie aber von dieſer abweicht, treffen ſie alle Vorwürfe, die der Methode des Unendlichkleinen gemacht werden können." — J. J. (???)

Im Gegenſatze zu den vorhin erwähnten Mängeln und Verirrungen hat der Verfaſſer des vorliegenden Lehrbuches die höhere Analyſis ſowohl in formeller, als in philoſophiſcher und didaktiſcher Hinſicht auf eine ausgezeichnete,

dem heutigen Zuſtande der Wiſſenſchaft vollkommen entſprechende, und dabei doch ganz klare elementare Weiſe darzuſtellen gewußt, und namentlich hat er es ſich angelegen ſein laſſen, bei jeder paſſenden Gelegenheit auf Anwendungen der höhern Analyſis in den Naturwiſſenſchaften hinzudeuten, ſo daß ſich ſein Werk in dieſer Beziehung vor allen bereits vorhandenen ähnlichen Werken durch ein für die Gegenwart ſo wichtiges Moment höchſt vortheilhaft auszeichnet und gewiſſermaßen als eine Einleitung in das Studium der mathematiſchen Phyſik betrachtet werden kann.

Die wahre Philoſophie der Mathematik verdanken wir allein den Schöpfern dieſer Wiſſenſchaft, wie die Geſchichte derſelben lehrt, und in der That iſt für ſich klar, daß die Männer, welche neue Begriffe und Methoden in die Wiſſenſchaft einführen, im Allgemeinen auch richtigere und gediegenere Vorſtellungen und Anſichten von dem wahren Weſen ihrer Wiſſenſchaft haben müſſen, als Fremdlinge in derſelben, wie Hegel und Conſorten. — Um nur ein Beiſpiel aus der neueſten Zeit anzuführen, wem verdanken wir die wahre Metaphyſik der ſo lange und ſo viel beſprochenen imaginären Größen? Einem „Mathematiker" der freilich ebenſo ſehr Philoſoph als Geometer iſt, wenn auch kein Hegelianer oder gar Schellingianer. — Wenn man über Mathematik philoſophiren will, ſo ſollte man doch wenigſtens dieſe Wiſſenſchaft in ihren Grundlehren nach dem gegenwärtigen Zuſtande kennen und nicht die alten Verkehrtheiten wieder herausphiloſophiren, wie z. B. Frantz bei Beſprechung der imaginären Größen thut. — Aber bei Hegel trifft man faſt keinen einzigen geſunden, ihm eigenthümlichen Gedanken an. —

Vorrede des Verfassers.

Da wir uns schon seit langer Zeit mit der Philosophie der Wissenschaften als unserm Lieblingsstudium beschäftigt haben, so hielten wir uns zur Bearbeitung eines Gegenstandes, wobei philosophische Betrachtungen unvermeidlich sind, für hinreichend vorbereitet. Der Weg, welchen wir bei der Bearbeitung des vorliegenden Werkes eingeschlagen haben, ist in seinen Hauptzügen folgender:

Zuerst haben wir zu zeigen gesucht, wie man durch den Fortschritt der mathematischen Abstraction zu der Theorie gelangt ist, welche sich mit den allgemeinen Eigenschaften der stetigen Functionen beschäftigt, sie mögen sich durch algebraische oder andere Symbole von einem mathematisch bestimmten Werthe ausdrücken lassen, oder nicht. Es gewährt mehr als einen Vortheil, diese Theorie der Functionen von der Anwendung zu unterscheiden, welche man davon auf die Functionen der Algebra und der Trigonometrie gemacht hat, und aus diesem Grunde haben wir das vorliegende Werk „Elementarlehrbuch der Theorie der Functionen" betitelt.

Bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis besteht die Theorie der Functionen fast ganz in der Theorie der Verhältnisse, welche zwischen den von Lagrange sogenannten ursprünglichen und abgeleiteten Functionen stattfinden, und aus dem analytischen Ausdrucke dieser Verhältnisse entspringt die seit Leibnitz sogenannte Differenzial- und Integralrechnung, oder wegen des von Leibnitz eingeführten Begriffes des unendlich Kleinen, die Infinitesimalrechnung. Jeder, welcher nur einige Kenntnisse von der Geschichte der mathematischen Wissenschaft hat, weiß, daß Newton unter dem Namen der Methode der Fluxionen eine Rechnung erfunden und bekannt gemacht hat, welche sich mit demselben Gegenstande, wie die Leibnitz'sche beschäftigt, und daß durch einen ziemlich lebhaften Streit zwischen den Partheien dieser beiden großen Männer, jedem ein gleiches Recht an dieser denkwürdigen Erfindung gesichert ist.

Die gleichsam parallel laufende Entwickelung der Newton'schen und Leibnitz'schen Ideen ist nicht bloß ein historisches Factum, sondern liegt in der Natur des Gegenstandes und kann in einer didaktischen Darstellung nicht

ohne Nachtheil vernachläſſigt werden. Beide Theorieen ergänzen einander gegenſeitig, ohne daß man eine dritte Theorie angeben könnte, welche im Grunde nicht auf die eine oder die andere hinausliefe, und wir haben daher den Grund dieſer doppelten Behandlungsweiſe deſſelben Gegenſtandes in ſo weit anzugeben geſucht, als dieſes in einem elementaren und bis zu einem gewiſſen Punkte praktiſchen Lehrbuche geſchehen konnte.

Die Lagrange'ſche Methode, mit den Modificationen, welche damit vorgenommen ſind, ſeitdem man eingeſehen hat, daß es unmöglich iſt, die ganze Differenzialrechnung auf bloße algebraiſche Identitäten zu baſiren, wie dieſer große Geometer es wollte, iſt im Grunde nur eine Rückkehr zu der Newton'ſchen Methode. Die Lagrange'ſche Bezeichnungsart, welche ſich in vielen Fällen in Verbindung mit der Leibnitz'ſchen mit Vortheil anwenden läßt, unterſcheidet ſich nicht weſentlich von der Newton'ſchen Bezeichnungsart und die vagen Ausdrücke „urſprüngliche und abgeleitete Functionen" ſind nicht ſo zweckmäßig gewählt, als die Ausdrücke „Fluenten" und „Fluxionen", welchen Newton einen ſo präciſen Sinn beigelegt hatte. Aber in einem für Anfänger beſtimmten Lehrbuche darf man nicht vergeſſen, die allgemein eingeführte und angenommene Sprache zu reden. Wir haben daher in einem beſonderen Kapitel zuerſt die Theorie der abgeleiteten Functionen unter der jetzt üblichen Form aus einander geſetzt und alsdann uns angelegen ſein laſſen, die Theorie der unendlich kleinen Größen begreiflich zu machen, ſowie die Identität der durch die Infiniteſimalmethode und der durch die Betrachtung der Grenzen und der abgeleiteten Functionen erhaltenen Reſultate näher nachzuweiſen. Hat der Leſer dieſe Identität einmal genau aufgefaßt, ſo kann er die Beweiſe durch das unendlich Kleine ohne Bedenken als zuläſſig annehmen und die Vereinfachungen benutzen, welche dieſe Beweisart darbietet.

Auf dieſe Weiſe gelangt der Leſer zwar langſam, aber ohne Umwege zur Differenzirung der Elementarfunctionen, womit man gewöhnlich den Anfang zu machen pflegt. Hoffentlich wird man dieſen etwas längern Aufenthalt nicht tadeln, und wenn wir uns klar ausgedrückt haben, ſo werden uns Anfänger wenigſtens bei einer zweiten Lectüre verſtehen und es wird ihnen für die Folge ihrer Studien gewiß nicht ohne Nutzen ſein, wenn ſie ſich bei dieſen Allgemeinheiten anfangs etwas länger aufgehalten haben.

Zur Darſtellung der Functionen, welche ganz beliebig ſein und einen mathematiſchen Ausdruck haben können, oder nicht, haben wir uns beſtändig der Curven bedient. Durch dieſes unnatürliche und bequeme Mittel wird eine Menge von Reſultaten gleichſam augenfällig gemacht, während der rein analytiſche Beweis einen gewiſſen Kraftaufwand erfordert, wenn man nicht graphiſche Conſtructionen zu Hülfe nimmt. Allein man darf dieſe Anwendung der Curven zur leichtern Auffaſſung der Theorie der Functionen nicht mit der Anwendung der Differenzialrechnung auf die Geometrie verwechſeln, welche den Gegenſtand

eines besondern Buches bildet. Die geometrischen Anwendungen der Integralrechnung sind weniger ausgedehnt und man wird sie hinter den rein analytischen Theorieen auseinandergesetzt finden, an welche sie sich am unmittelbarsten anschließen.

Früher konnte man die geometrischen Anwendungen als den Hauptzweck der Analysis betrachten; allein seitdem die mathematische Physik so rasche Fortschritte gemacht hat, würde dieses nicht füglich mehr angehen. Die Untersuchung der besondern Aufgaben der Physik, auf welche die Geometer die Analysis angewandt haben, gehört ohne Zweifel nicht in ein Lehrbuch der reinen Mathematik; allein die allgemeinen Eigenschaften der Functionen, insofern sie im Raume und in der Zeit veränderliche physische Größen ausdrücken, gehören zu den allgemeinen und abstracten Speculationen, wobei nichts aus der Erfahrung entlehnt wird, und welche folglich ebensowohl, als die Untersuchung der Eigenschaften der Ausdehnung der reinen Mathematik anheim fallen. Wir haben die Aufmerksamkeit des Lesers auf diese allgemeinen Eigenschaften der physischen Functionen und der Zeitfunctionen hingeleitet, so oft sich Gelegenheit dazu darbot, und in dieser Beziehung könnte das gegenwärtige Werk als eine allgemeine Einleitung in die mathematische Physik betrachtet werden.

Da wir die Form eines Lehrbuches gewählt haben, so haben wir eine möglichst natürliche Ordnung und Eintheilung der Gegenstände zu erstreben suchen müssen, obgleich dabei willkührliche Verknüpfungen und nachtheilige Trennungen nicht ganz vermieden werden können. Gleich zu Anfang haben wir schon in der Differenzialrechnung in einem besonderen Buche unter der Ueberschrift „Principien" auch zugleich die ersten Begriffe von der Integral- und endlichen Differenzenrechnung mitgetheilt, weil uns dieses zur Erreichung einer größern Klarheit und Vollständigkeit nothwendig schien und die sich an die Differenzialrechnung anschließenden Theorieen an den gehörigen Ort zu stehen kommen.

Dadurch, daß wir die Variationsrechnung in dem fünften Buche, welches sich mit den Quadraturen beschäftigt, vor der Theorie der Integration der Differenzialgleichungen abgehandelt haben, sind wir von dem gewöhnlichen Gange abgewichen; allein diese Neuerung scheint sowohl durch die Schwierigkeiten, wie durch den Zusammenhang der Gegenstände motivirt zu sein. Denn wenn man die Variationsrechnung von der Theorie der Quadraturen, an welche sie sich ganz natürlich anschließt, trennt, und sie erst nach der Integration der partiellen Differenzialgleichungen abhandelt, so wird der Lernende hinsichtlich der wahren Natur dieser schönen Methode von Lagrange irre geführt, wie wenn sie, um uns des Ausdruckes eines verdienten Schriftstellers zu bedienen, eine neue hypertranscendente Rechnung bildete, während sie nur eine elegante Anwendung der Principien der Differenzialrechnung auf Functionen unter dem Integralzeichen ist.

Obgleich der gegenwärtige ſo raſche Fortſchritt der mathematiſchen Wiſſenſchaften nicht wie der einiger Zweige der Phyſik eine fortwährende neue Begründung der Elemente der Wiſſenſchaft nothwendig macht; ſo müſſen doch auch in der Mathematik gewiſſe Theorieen, wenn ſie ſich bei ihrer weitern Entwickelung vereinfachen und auf wichtige Gegenſtände angewandt werden, auch in die Elementarlehrbücher übergehen und darin die Stelle anderer Theorieen, welche ſich nicht ſo fruchtbar gezeigt haben, einnehmen. Es hat uns daher nothwendig und zweckmäßig geſchienen, daß die Theorie der elliptiſchen und Euler'ſchen Functionen in den Elementen der Integralrechnung vorkommen und daß die Beiſpiele der Beſtimmung beſtimmter Integrale möglichſt vervielfacht werden müſſen, und daß man endlich die neuen Verfahrungsarten zur Integration der linearen partiellen Differenzialgleichungen vollſtändiger erörtern muß, um ſo dem Leſer das Verſtändniß der ſpeciellen Unterſuchungen der mathematiſchen Phyſik zu erleichtern.

In einer didaktiſchen Darſtellung muß man nicht den logiſchen Zuſammenhang der Sätze mit dem natürlichen Zuſammenhange der phyſiſchen oder abſtracten Wahrheiten, welche dargeſtellt werden ſollen, verwechſeln. Man kann allen Bedingungen eines logiſchen Zuſammenhanges genügen, ohne über die weſentlichen Verhältniſſe der Ideen und der Theorieen, auf welche man ſie anwendet die gehörige Klarheit zu erlangen. Gute Köpfe faſſen dieſe Verhältniſſe immer auf, und wenn es auch nur auf eine unklare Weiſe geſchähe, was für ſie hinreichend iſt, um ihnen bei der Aufſuchung neuer Wahrheiten als Richtſchnur zu dienen; allein gewöhnlichen Köpfen muß man dieſe Arbeit zu erleichtern ſuchen. Es wird daher bei dieſer unſerer Anſicht nicht auffallend erſcheinen, daß es nicht unſere alleinige Abſicht geweſen iſt, blos eine Reihe von Beweiſen zu reproduciren, und wir geſtehen ſogar, daß uns weniger daran gelegen hat, den Beweis eines Lehrſatzes in der äußerſten Strenge zu führen, wonach einige Mathematiker gegenwärtig ſo entſchieden ſtreben, als den Grund dieſes Lehrſatzes und ſeinen Zuſammenhang mit den übrigen mathematiſchen Wahrheiten zu zeigen. Wir haben uns daher der Leichtigkeit der Darſtellung wegen, und um den Leſer nicht gleich von vorn herein zu entmuthigen, Beweisführungen erlaubt, welche ſelbſt den größten Geometern ſo lange Zeit hindurch genügt haben. Beſonders hinſichtlich der etwa möglichen Rechnungs- und Druckfehler haben wir aber die Nachſicht des Leſers in Anſpruch zu nehmen, weil eine vollkommene Correctheit bei Werken, wie das vorliegende faſt nicht zu erreichen iſt, und wir werden jede uns in dieſer Beziehung mitgetheilte Bemerkung mit dem verbindlichſten Danke zur Vervollkommnung unſeres Werkes bei einer etwa nöthigen neuen Auflage zu benutzen ſuchen.

Obgleich man es ſich in einem Elementarbuche nicht zum Geſetze machen kann, die Erfinder alle zu citiren, ſo iſt dieſes doch jedesmal geſchehen in Beziehung auf die erſten Begriffe der Geſchichte der Wiſſenſchaft, weil dieſe

auch der Anfänger wiſſen muß, um ihm vor denen, deren Arbeiten den Fortſchritt der Wiſſenſchaft bewirkt haben, den gehörigen Reſpect einzuflößen. Diejenigen Leſer, welche in der höhern Analyſis ſchon bewandert ſind, und deren Urtheile wir unſere eigenen Ideen unterwerfen, werden leicht erkennen, aus welchen Quellen wir geſchöpft haben, ohne daß wir ſie hier ſpeciell anführen. Wenn wir aber insbeſondere das große Werk unſeres verehrungswürdigen Lehrers Lacroix hier nennen, ſo geſchieht dieſes aus einer beſonderen perſönlichen Dankbarkeit gegen dieſen Gelehrten, welcher durch ſeine Schriften und Lehren ſo außerordentlich viel zur Beförderung eines gründlichen Unterrichtes in der Mathematik beigetragen hat.

Wir haben es ſorgfältig vermieden, Ausdrücke anzuwenden, welche nicht ſchon im Gebrauche waren und man findet in dieſem Lehrbuche hinſichtlich der Terminologie nur eine einzige Neuerung von einiger Wichtigkeit, welche darin beſteht, daß wir die verſchiedenen Stetigkeitsunterbrechungen einer Function nach Ordnungen unterſcheiden. So ſagen wir z. B., daß eine Function eine Stetigkeitsunterbrechung der erſten Ordnung erfährt, wenn ſie einen unendlichen Werth annimmt, oder plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern endlichen Werthe übergeht. Wenn es dagegen die abgeleitete Function der erſten Ordnung iſt, welche eine ſolche Stetigkeitsunterbrechung erfährt, ſo ſagen wir, daß die urſprüngliche Function eine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung erfährt, u. ſ. f. Dieſe Definition ſoll nicht blos zur Abkürzung des Vortrages dienen, ſondern auch gewiſſen Grundbegriffen eine größere Präciſion geben, und es iſt uns auffallend geweſen, daß ſie nicht ſchon früher in die Lehrbücher eingeführt iſt.

Wir haben kein Bedenken getragen, an einigen Stellen Ausdrücke zu gebrauchen, deren philoſophiſche Bedeutung zwar bekannt iſt, welche aber der mathematiſchen Sprache nicht anzugehören ſcheinen, und diejenigen Leſer, welchen ſie vielleicht anſtößig ſind, können ſie ohne allen Nachtheil übergehen. Wir haben di ſe Ausdrücke beibehalten, weil ſie andern Leſern vielleicht zweckmäßig erſcheinen, und wir finden vielleicht eine andere Gelegenheit, wo wir die hier blos angedeuteten Ideen mit Nutzen weiter entwickeln können. Das im vierten Kapitel des vierten Buches über den Zuſammenhang zwiſchen der Geometrie und Algebra Geſagte, ließe ſich noch viel weiter entwickeln worauf wir aber, um uns nicht zu ſehr von unſerm Hauptzwecke zu entfernen, nicht eingehen konnten.

Elementarlehrbuch

der

Theorie der Functionen

und der

Infinitesimalrechnung.

Erſtes Buch.

Principien.

Erſtes Kapitel.

Von den Functionen im Allgemeinen und der Theorie der Functionen ins Beſondere.

§. 1. In der bildlichen Sprache der alten Algebraiſten wurden die Producte aus gleichen Factoren Potenzen, Dignitäten oder Functionen genannt. Gegenwärtig verbinden wir mit dem Ausdrucke Potenz noch denſelben Begriff und der Ausdruck Dignität (dignitas) iſt noch in dem techniſchen Latein gebräuchlich; aber der Ausdruck Function hat ſeit langer Zeit dieſe particuläre Bedeutung verloren und eine weit allgemeinere Bedeutung angenommen, welche einen der merkwürdigſten Fortſchritte der mathematiſchen Abſtraction andeutet.

Johann Bernoulli ſcheint der erſte geweſen zu ſein, welcher unter Function einer Größe x nicht blos die Potenzen dieſer Größe, wie x^n, ſondern alle Größen y, deren Beziehungen zu der Größe x durch algebraiſche Zeichen ausgedrückt werden können, ſo daß der Werth von y beſtimmt iſt, wenn der von x bekannt iſt, und umgekehrt, verſtanden hat. Es ſind alſo in dieſem Sinne die Ausdrücke:

$$y = a + (b - x)^n, \quad y = \frac{x^3 - mx + n}{\sqrt{1 + x^4}}, \quad y = \frac{1}{x} \log.(1 + x), \text{ etc.}$$

ſowohl Functionen von x, wie die Potenz $x^{\frac{n}{m}}$. Dieſe Erweiterung des Begriffes der Function datirt ſich vom Jahre 1690; allein ſie würde von geringer Wichtigkeit geweſen ſein, wenn ſie ſich nicht an die ein halbes Jahrhundert ſpäter von Descartes eingeführten Begriffe angeſchloſſen hätte. Denn aus dieſen Begriffen von Descartes folgt, daß eine algebraiſche Gleichung nicht blos dazu geeignet iſt, die Rechnungsoperationen anzudeuten, durch welche man den Zahlenwerth einer beſtimmten Größe erhalten kann, ſondern daß ſie auch das Geſetz ausdrückt, nach welchem ſich zwei Größen gleichzeitig ändern, wovon die eine von der andern abhängig iſt, und welche beide von einem Werthe zu einem andern ſtetig übergehen, indem ſie alle zwiſchenliegenden Werthe durchlaufen. Dieſe gegenſeitige Abhängigkeit zwiſchen zwei veränderlichen Größen mußte auf eine allgemeine Weiſe ausgedrückt werden, was dadurch ſehr bequem geſchehen kann, daß man nach Bernoulli ſagt: die eine der veränderlichen Größen ſei eine Function der andern.

Descartes' Absicht hierbei war, wie jeder weiß, die Algebra auf die Geometrie anzuwenden und zu dem Zwecke die Curven vermittelst einer Gleichung zwischen den Coordinaten jedes ihrer Punkte algebraisch zu definiren oder zu bestimmen. Umgekehrt, diese Idee führte auch dahin, die Geometrie auf die Algebra anzuwenden, indem man die beiden veränderlichen Größen jeder unbestimmten Gleichung als die Coordinaten einer Linie betrachtet, wovon man vermittelst dieser Gleichung selbst beliebig viele Punkte mit Genauigkeit bestimmen kann. Die Curve ist alsdann blos das graphische und conventionelle Bild des algebraischen Gesetzes, nach welchem die veränderlichen Größen von einander abhängen; diese bildliche Darstellung entspricht aber der Natur der dargestellten Sache auf die bewundernswürdigste Weise, und führt die Auffassung von Verhältnissen, welche in ihrer abstracten Form bei Anwendung anderer Zeichen mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden sein würde, auf Thatsachen der reinen Anschauung zurück. Denn die Stetigkeit (Continuität) der Function wird durch die Stetigkeit der Linie versinnlicht, und die Biegungen einer Curve, so wie ihr ganzer Lauf zeigen oft mit einem einzigen Blicke das, was sich durch die algebraische Untersuchung der Gleichung der Curve nur mit Schwierigkeit deutlich nachweisen würde lassen.

§. 2. Der eigenthümliche Character einer stetigen Function besteht darin, daß man der einen veränderlichen Größe immer Werthe beilegen kann, welche einander so nahe liegen, daß der Unterschied zwischen den correspondirenden Werthen der davon abhängigen Function kleiner wird, als jede gegebene Größe; denn sonst ließe sich diese Function nicht durch die Ordinate einer Linie ausdrücken, wovon die andere veränderliche Größe die Abscisse ist, und umgekehrt ist einleuchtend, daß diese Eigenschaft der Stetigkeit jeder Function zukommt, welche durch die veränderliche Ordinate einer gewissen Linie dargestellt wird. Wenn eine durch eine algebraische Formel ausgedrückte Function für einen gewissen Werth der veränderlichen Größe, wovon sie abhängt, unendlich wird, so sagt man: diese Function erfahre für diesen Werth eine Unterbrechung der Stetigkeit. Dieses findet z. B. bei der sehr einfachen Function:

$$y = \frac{1}{x - a}$$

für den Werth $x = a$ statt. Wenn man der veränderlichen Größe x zwei einander sehr nahe kommende Werthe beilegt, wovon aber der eine etwas kleiner und der andere etwas größer ist, als a; so findet zwischen den correspondirenden Werthen der Function y ein sehr großer Unterschied statt, indem der eine Werth eine sehr große negative und der andere eine sehr große positive Zahl ist, und in diesem Falle wird die algebraische Differenz zwischen den entsprechenden Werthen der Function y sogar desto größer, je kleiner die Differenz zwischen den entsprechenden Werthen der veränderlichen Größe x wird. Die Hyperbel, deren Ordinate durch die Function y ausgedrückt wird, hat also zwei Zweige, welche durch die der Abscisse a entsprechende asymptotische Ordinate von einander getrennt werden.

Im Allgemeinen haben die Functionen, welche sich durch die in der Algebra und in der Trigonometrie gebräuchlichen Zeichen ausdrücken lassen, wie die vorhergehende Function, die Eigenschaft, daß sie in ihrem ganzen Verlaufe stetig bleiben, abgesehen von den Unterbrechungen der Stetigkeit, welche für gewisse besondere Werthe der veränderlichen Größe x, wovon sie abhängen, stattfinden können. Es gibt jedoch einige Ausnahmen von dieser Regel, auf welche man durch Anwendung der Regeln geführt wird, wonach algebraische Zeichen mit einander verbunden werden. Wenn man z. B. $y = (-a)^x$ setzt,

wo a eine positive Zahl bezeichnet, so wird y jedesmal imaginär, wenn x ein Bruch von einem ungeraden Zähler und von einem geraden Nenner ist, und da man zwischen zwei einander beliebig nahen Werthen von x sich unendlich viele Brüche mit einem ungeraden Zähler und einem geraden Nenner denken kann; so folgt, daß man zwei Punkte nicht durch einen stetigen Zug verbinden kann, welche zwei Systemen reeller Werthe der Coordinaten x und y entsprechen, wie nahe sie einander auch liegen mögen. Allein solche anomale Functionen, wie die eben angeführte, lassen sich auf Naturerscheinungen nicht anwenden, und spielen selbst bis jetzt in der reinen Analysis nur eine sehr beschränkte Rolle, und erst weit später wird in dem vorliegenden Werke wieder davon die Rede sein.

§. 3. Andererseits sieht man leicht ein, und diese Betrachtung ist bei weitem wichtiger, daß eine Größe von einer andern abhängen kann, ohne daß sich diese Abhängigkeit durch eine Verbindung algebraischer Zeichen ausdrücken läßt. So weiß man z. B. aus der Trigonometrie, daß man zur Andeutung des Sinus, Cosinus und der Tangente eines Bogens, welches geometrisch bestimmte Größen sind, sobald die Größe des Bogens gegeben ist, specielle Zeichen anwendet; allein diese trigonometrischen Größen lassen sich dennoch nicht vermittelst rein algebraischer Zeichen als Functionen des Bogens ausdrücken. Wenn man ferner ein Pendel S m (Fig. 1) um einen Winkel m S V aus der Verticale entfernt und dasselbe im leeren Raume der Wirkung der Schwere überläßt, so sieht man leicht ein, daß zwischen der seit dem Beginnen der Bewegung verflossenen Zeit und dem Winkel, welchen die Pendelstange jeden Augenblick mit der Verticale bildet, eine nothwendige Relation statt findet; allein diese Relation läßt sich nicht vermittelst der algebraischen und trigonometrischen Zeichen allein ausdrücken. Dennoch nehmen wir zwischen diesen beiden Größen eine gegenseitige Abhängigkeit an, indem wir sagen, daß der Ablenkungswinkel eine Function der Zeit sei, wodurch aber die Bedeutung des Wortes Function beträchtlich erweitert wird.

Diejenigen Leser, welche die Dynamik studirt haben, wissen, daß man den Zahlenwerth des Ablenkungs- oder Elongationswinkels des Pendels für jeden Augenblick, so wie für jeden Werth der Länge des Pendels und seines anfänglichen Ablenkungswinkels mit jedem beliebigen Grade von Annäherung berechnen kann, indem man nur eine einzige Größe, nämlich den Raum, welchen ein im leeren Raume frei fallender Körper während der ersten Secunde seines Falles durchläuft, der Beobachtung entlehnt. Aber das Studium anderer Naturerscheinungen, und besonders der des socialen Lebens, bietet uns eine Menge von Fällen dar, wo zwei veränderliche Größen offenbar von einander abhängig sind, ohne daß man die eine vermittelst der andern a priori berechnen kann, weil sich der zwischen ihnen statt findende Zusammenhang entweder nicht mathematisch bestimmen läßt, oder weil diese Bestimmung, wenn sie möglich ist, uns noch unbekannt ist.

So ist z. B. die größte Spannkraft des Wasserdampfes eine Function der Temperatur dieses Dampfes, die mittlere Temperatur der verschiedenen Schichten einer Luftsäule eine Function der Höhe der Schicht über den Niveau des Meeres, die verlangte Quantität eines Lebensmittels eine Function des üblichen Preises, das Verhältniß der Anzahl der Individuen jedes Alters bei einer großen Bevölkerung zu der ganzen Bevölkerung eine Function dieses Alters, u. s. f. Wenn man dem Ausdrucke Function, wie es jetzt geschehen muß, diese ganz allgemeine Bedeutung gibt, so wird derselbe gewissermaßen aus der mathematischen Sprache in die weniger specielle Sprache aller derer versetzt, welche die Wissenschaften, worin man meßbare Größen unter einander vergleicht, cultiviren.

Die Functionen der hier in Rede ſtehenden Art, können nur durch die Beobachtung gegeben werden, und ſie werden als bekannt angeſehen, wenn man eine Tafel angefertigt hat, worin ſich einerſeits ſehr viele und einander ſehr nahe liegende Werthe der veränderlichen Größe und andererſeits die correſpondiren Werthe der davon abhängigen Function befinden, wie ſie ſehr genaue und zahlreiche Beobachtungen geben, ſo daß die möglichen Beobachtungsfehler faſt aus den mittleren Reſultaten verſchwinden. Die auf dieſe Weiſe beſtimmten Functionen muß man empiriſche Functionen nennen, im Gegenſatze zu den mathematiſch beſtimmbaren Functionen, welche man genau, oder mit einem beliebigen Grade von Annäherung berechnen kann, indem man ſich blos auf ihre mathematiſche Definition ſtützt.

Die von Descartes angegebene graphiſche Darſtellungsart der Functionen iſt ſowohl auf die empiriſchen Functionen, wie auf die anwendbar, welche ſich durch eine algebraiſche Formel ausdrücken laſſen, weil man auch für dieſe im Allgemeinen die Formel in eine Tafel verwandeln muß, um einzelne Punkte zu beſtimmen, welche man alsdann durch einen ſtetigen Zug verbindet, ſo daß die Curve mit einer deſto größern Genauigkeit gezeichnet wird, je näher die genau beſtimmten Punkte einander liegen, und je größer ihre Anzahl iſt.

Diejenigen, welche ſich mit den phyſikaliſchen und ſocialen Wiſſenſchaften beſchäftigen, wiſſen alle, welche Vortheile die graphiſche Darſtellung der empiriſchen Functionen gewährt, um die ſich darauf beziehenden Aufgaben praktiſch zu löſen und endlich die Reſultate kennen zu lernen, welche die bloße Betrachtung der Tafeln nicht in das gehörige Licht ſetzen würde; denn die begriffliche Vorſtellung der Continuität wird hier durch ein Inductionsverfahren erſetzt, welchem der menſchliche Geiſt die meiſten ſeiner Entdeckungen verdankt.

§. 4. Eine meßbare phyſiſche Größe muß immer endlich bleiben, und kann folglich nicht, wie gewiſſe algebraiſche Functionen, Unterbrechungen der Stetigkeit erfahren, welche von dem Durchgange der Function durch einen unendlich großen Werth herrühren. So oft man findet, daß eine phyſiſche Größe durch eine mathematiſche Function ausgedrückt wird, bei welcher ſolche Unterbrechungen der Stetigkeit ſtatt finden, muß man ſchließen, daß die mathematiſche Function in der Nähe der Werthe, für welche die Unterbrechung der Stetigkeit ſtattfindet, das wahre Maß der phyſiſchen Größe nicht mehr ausdrückt.

So wird z. B. die gegenſeitige Attractionskraft zwiſchen zwei ponderabeln Moleculen bekanntlich durch die Function:

$$y = \frac{a}{x^2} \qquad (1)$$

ausgedrückt, wo a eine Conſtante und x die gegenſeitige Entfernung der beiden als mathematiſche Punkte betrachteten Molecule bezeichnet. Dieſe Function wird unendlich, wenn x verſchwindet; allein man kann phyſiſch weder annehmen, daß ſich die Molecule auf mathematiſche Punkte reduciren, noch daß dieſe Punkte zuſammenfallen. Wenn die Molecule einander ſehr nahe kommen, ſo muß man für die Gleichung (1), welche nahezu genau war, ſo lange die Dimenſionen der Molecule gegen ihre gegeſeitige Entfernung ſehr klein blieben, eine andere ſubſtituiren, welche von der Figur der Molecule abhängig iſt.

Wenn eine phyſiſche Größe ſich mit der Zeit ändert, oder blos wegen der Veränderung der Entfernungen zwiſchen den Moleculen oder den materiellen Syſtemen, oder in Folge des Verlaufes der Zeit in Verbindung mit der Veränderung der Entfernungen; ſo wäre es den Geſetzen unſerer Vorſtellungen zuwider, wenn man annehmen wollte, daß ſie von einem endlichen Werthe zu einem andern endlichen Werthe übergehen könnte, ohne während dieſes Ueberganges alle zwiſchenliegenden Werthe anzunehmen, was ſchon das bekannte

Sprichwort der alten Philosophen ausdrückt: Natura non facit saltus. Aber bei unsern unvollkommenen Kenntnissen hinsichtlich der Constitution der materiellen Mittel sind wir für gewisse physische Größen, so wie wir sie definiren und messen können, zu der Annahme berechtigt, daß sie Unterbrechungen der Stetigkeit darbieten, welche aus dem plötzlichen Uebergange von einem endlichen Werthe zu einem anderen entspringen. Wenn z. B. zwei heterogene Flüssigkeiten, wie Wasser und Quecksilber, über einander liegen, so betrachten wir die Dichtigkeit wie eine Größe, welche sich an der Berührungsfläche beider Flüssigkeiten plötzlich ändert, obgleich wir in philosophischer Hinsicht aller Wahrscheinlichkeit nach annehmen können, daß die Unterbrechung der Stetigkeit verschwinden würde, wenn wir die Constitution der Flüssigkeiten und alle in der Nähe der Berührungsfläche statt findenden Erscheinungen genau und vollständig kennten.

§. 5. Aber schon deßwegen allein, daß die mathematischen oder empirischen Functionen dem Gesetze der Stetigkeit genügen, besitzen sie gewisse allgemeine Eigenschaften, welche von hoher Wichtigkeit sind, nicht blos für die abstracte Theorie des Calculs, sondern noch vielmehr für die Interpretation der Naturerscheinungen. Wir beschränken uns hier auf die Anführung zweier solcher Eigenschaften, welche sich aus der graphischen Darstellung der Functionen durch Curven ergeben, und später weiter entwickelt werden sollen; aber für unseren gegenwärtigen Zweck hier blos angeführt zu werden brauchen.

Die erste Eigenschaft besteht darin: daß die Veränderungen des Werthes einer Function von einem bestimmten Werthe aus nahezu den correspondirenden Werthen der Veränderungen der veränderlichen Größe der Function proportional sind, wenn diese Veränderungen sehr klein sind. Eine sehr wichtige Anwendung dieses Principes wird schon bei dem Gebrauche der Proportionaltheile der Logarithmentafeln gemacht. Um die Begriffe durch ein anderes Beispiel zu fixiren, wollen wir die algebraische Function:

$$y = \frac{x^3 - 7x + 6}{x - 10} \qquad (2)$$

betrachten, welche durch die beiden Curvenzweige i l m n, s u v (Fig. 2), die durch eine der Abscisse $x = 10$ entsprechende asymptotische Ordinate von einander getrennt werden, graphisch dargestellt wird; so finden wir:

			Differenz.
1 für	$x = 1{,}00$,	$y = 0{,}00000$	
	$x = 1{,}01$,	$y = +0{,}00555$	$+ 0{,}00555$
	$x = 1{,}02$,	$y = +0{,}01109$	$+ 0{,}00554$
	$x = 1{,}03$,	$y = +0{,}01662$	$+ 0{,}00553$
. . . . .			
2 für	$x = 6{,}00$,	$y = 0{,}00000$	
	$x = 6{,}01$,	$y = -0{,}01256$	$- 0{,}01256$
	$x = 6{,}02$,	$y = -0{,}02523$	$- 0{,}01267$
	$x = 6{,}03$,	$y = -0{,}03801$	$- 0{,}01278$
. . . . .			

Das Gesetz der Proportionalität verificirt sich mit einer großen Annäherung in beiden Fällen, obgleich sich die Werthe von y für gleiche Zunahmen von x im zweiten Falle weit schneller ändern, als im ersten. Wir haben jedoch den Werth von x immer nur um $\frac{1}{100}$ ändern lassen, was noch kein sehr kleiner Bruch ist, und wenn wir für x eine Reihe von Werthen genommen hätten, die um 0,001 von einander verschieden sind; so würde die Proportionalität der entsprechenden Veränderungen von y sich mit einer weit größeren Annäherung herausgestellt haben.

Dieſes alles läuft übrigens auf die Annahme hinaus, daß ein Curvenbogen um ſo mehr mit der durch einen ſeiner Endpunkte gezogenen Tangente zuſammenfällt, je kleiner dieſer Bogen iſt; denn für eine gerade Linie ſind die Differenzen der Ordinaten denen der Abſciſſen ſtreng proportional, und das conſtante Verhältniß dieſer Differenzen iſt gleich der trigonometriſchen Tangente des Winkels, welchen die gerade Linie mit der Axe der Abſciſſen bildet.

Die Fruchtbarkeit dieſes ſo einfachen Principes, ſo wie ſeine Anwendbarkeit überhaupt iſt leicht einzuſehen. So oft z. B. gewiſſe veränderliche Größen um mittlere Werthe ſchwanken, wovon ſie ſich nur ſehr wenig entfernen, wie dieſes bei der Größe $x = x_0 + x'$ der Fall iſt, wenn x' eine veränderliche und gegen die conſtante Zahl x_0 immer ſehr kleine Zahl iſt, werden alle bekannte, oder unbekannte mathematiſche oder empiriſche Functionen von x Functionen von x', welche man ohne merklichen Fehler auf die Form $a + b x'$ zurückführen kann, wo a und b conſtante Zahlen bezeichnen, d. h. auf die einfachſte algebraiſche Function. Dieſes iſt in der That das allgemeine Approximationsverfahren, deſſen ſich die Analyſten bedienen, wenn ſie Unterſuchungen dem Calcul unterwerfen wollen, welche ſich in ihrer ganzen Allgemeinheit jeder mathematiſchen Behandlungsweiſe entziehen.

Mehrere durch das Experiment entdeckte Principien der Phyſik, welche nur als Beobachtungsfacta erſcheinen, ſind nichts als Folgerungen aus dem eben erwähnten mathematiſchen Principe.

§. 6. Die zweite allgemeine Eigenſchaft der ſtetigen Functionen, welche wir hier anführen wollen, beſteht darin: daß der Werth einer Function in der Nähe ihrer größten oder kleinſten Werthe nahezu conſtant bleibt. Dieſes erhellet ebenfalls aus der Betrachtung der die Function darſtellenden Curve; denn wenn die Ordinate dieſer Curve, nachdem ſie zugenommen hat, abnimmt, was bei dem Maximum der Fall iſt, oder im Gegentheil, nachdem ſie abgenommen hat, zunimmt, in welchem Falle ſie durch ein Minimum geht; ſo wird die Tangente der Curve zu der Abſciſſenaxe parallel, wie in den Punkten m und u (Fig. 2). Die Ordinate dieſer Tangente wird conſtant und die des kleinen Curvenbogens, welcher nahezu mit der Tangente zuſammenfällt, hat eben deßwegen auch einen faſt conſtanten Werth (§. 5). Es können zwar Fälle vorkommen, wo dieſe Regel nicht anwendbar iſt, wie bei der Curve g h k (Fig. 3), welche im Punkte h einen ſogenannten Rückkehrpunkt oder eine Spitze darbietet. Die Ordinate des Punktes h iſt ein Maximum, obgleich die gemeinſchaftliche Tangente der beiden ſich im Punkte h berührenden Curvenbogen g h, h k auf der Abſciſſenaxe ſenkrecht und nicht zu ihr parallel iſt. Allein dieſe Ausnahme rührt von einer beſonderen zufälligen Zeichnung der Curve g h k und von einer beſtimmten Lage der Abſciſſenaxe gegen dieſe Curve her, wogegen die allgemeine Regel, wovon die Figur 2 eine Anwendung darbietet, keine beſondere Zeichnung der Curve vorausſetzt und für jede andere Richtung der Abſciſſenaxe ſtattfinden würde, oder was auf daſſelbe hinausläuft, nach einer beliebigen Verrückung dieſer Curve gegen dieſe Axe. Nur würden, wenn eine ſolche Verrückung ſtattfände, die größten und kleinſten Ordinaten nicht mehr den Punkten m und u, ſondern andern Punkten der Curve entſprechen.

Durch die ſpäter anzugebenden Methoden findet man unmittelbar, daß die größten und kleinſten Werthe der Function (2) den Werthen $x = 4$, $x = 16$ entſprechen, und die numeriſche Rechnung gibt:

		Differenz.
1 für $x = 3{,}99$,	$y = 0{,}999983$	
$x = 4{,}00$,	$y = 1{,}000000$	$+ 0{,}000017$
$x = 4{,}01$,	$y = 0{,}999983$	$- 0{,}000017$
. . . . .		

		Differenz.
2 für $x = 15{,}99$,	$y = 25{,}000017$	
$x = 16{,}00$,	$y = 25{,}000000$	$- 0{,}000017$
$x = 16{,}01$,	$y = 25{,}000017$	$+ 0{,}000017$
. . . . .	. . . . .	. . . . .

Eine Veränderung des Werthes von x von 0,01, wenn $x = 4$ oder $x = 16$ ist, bewirkt also in dem Werthe von y eine Veränderung $= 0{,}000017$, während nach den weiter oben angeführten Rechnungen die einer gleichen Veränderung von y für $x = 1$, 326 mal und für $x = 6{,}739$ mal größer ist.

Die eben betrachtete Eigenschaft der größten und kleinsten Werthe einer Function wird in der Praxis beständig angewandt, und namentlich in der technischen Mechanik, wo es auf die Bestimmung des Werthes einer gewissen Größe ankommt, welcher einem Maximum des Nutzeffectes für denselben Geld- oder Kraftaufwand oder einem Minimum des Geld- oder Kraftaufwandes zur Hervorbringung desselben Nutzeffectes entspricht. Diese Eigenschaft kommt der Unvollkommenheit unserer Kenntnisse und unserer Meßinstrumente sehr zu Hülfe, indem sie die Gränzen erweitert, zwischen welche unsere Schätzung fallen kann, ohne daß daraus merkliche Veränderungen des Geld- und Kraftaufwandes, oder des hervorgebrachten Nutzeffectes entspringen. Wie wichtig und leicht zu begreifen dieses Princip auch ist, so hat Kepler, wie Montucla *) sagt, dasselbe doch zuerst in seiner Stereometria doliorum vom Jahre 1615 ausgesprochen.

§. 7. Nun ist aber leicht einzusehen, daß es außer diesen beiden fast für sich klaren, allen stetigen Functionen gemeinsamen Eigenschaften noch andere, nicht so leicht in die Augen fallende Eigenschaften geben kann, welche ebenfalls allen Functionen, oder gewissen Klassen von Functionen, die durch allgemeine Merkmale bestimmt werden, zukommen, wie z. B. die Eigenschaft der Functionen, beständig mit der veränderlichen Größe, wovon sie abhängen, zuzunehmen, oder periodisch dieselben Werthe für äquidistante Werthe dieser veränderlichen Größe anzunehmen. Man kann sich also eine Theorie denken, deren Object in der Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der Functionen besteht, und diese Theorie bildet einen für sich bestehenden besonderen Zweig der Mathematik, welcher, genau genommen, eine Wissenschaft für sich hätte bilden können, selbst wenn die Algebra nicht vorher bearbeitet wäre, und man diese Theorie daher nicht auf algebraische Functionen hätte anwenden können; obgleich der Hauptnutzen dieser Theorie der Functionen ohne Zweifel in dieser Anwendung besteht, besonders wenn es sich um die numerische Bestimmung der Größen handelt.

Wir nehmen diese Definition der Theorie der Functionen an, weil sie auf einer Idee beruht, welche im ganzen Verlaufe dieses Lehrbuches immer wiederkehrt. Sie scheint uns die philosophische Grundlage des Theiles des mathematischen Unterrichtes zu sein, womit wir uns jetzt beschäftigen, und zwar die einzige, welche dem gegenwärtigen Zustande der mathematischen Analysis vollkommen entspricht. Man wird darauf durch die sich immer weiter erstreckenden Anwendungen der Analysis auf die physikalischen Wissenschaften geführt; aber unabhängig von jeder Anwendung findet man in der so aufgefaßten Theorie der Functionen die unmittelbare Lösung der zu verschiedenen Zeiten von den Geometern in Beziehung auf die Grundprincipien der mathematischen Analysis erhobenen Schwierigkeiten. **)

*) Hist. des Math. Part. IV., liv. 1. n. 4.

**) So würde z. B. Lagrange kein besonderes Werk geschrieben haben, um die Differenzialrechnung auf die algebraische Analysis zurückzuführen, wenn er in der Differenzialrechnung einen Theil der Theorie der stetigen Functionen erkannt hätte, diese mögen sich übrigens durch algebraische Zeichen ausdrücken

§. 8. Im Allgemeinen bezeichnet man eine bekannte, oder unbekannte mathematiſche, oder empiriſche Function y von x auf folgende Weiſe:

$$y = f(x),\ y = F(x),\ y = \varphi(x),\ \text{ꝛc.}$$

wo die Buchſtaben f, F, φ, ... nicht Größen, ſondern Functionszeichen ſind, ungefähr wie die Abkürzungen log. und sin. Wenn in den Klammern nur ein Buchſtabe ſteht, ſo läßt man ſie zuweilen weg und ſetzt hinter das Functionszeichen einen Punkt. Dieſe Bezeichnung wird ſchon in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Algebra angewandt, jedoch nur für algebraiſche Functionen; aber wir werden ſie in Zukunft bei jeder beliebigen Art von Functionen anwenden.

Bei der Beſtimmung einer Function $y = f(x)$ kommen gewöhnlich auch Größen vor, welche als conſtant betrachtet werden müſſen, während x und folglich auch y ſich ändern. Wenn y und x die veränderlichen Coordinaten eines Kreiſes bezeichnen, ſo iſt der Halbmeſſer deſſelben eine ſolche conſtante Größe. Eben ſo iſt der anfängliche Ablenkungswinkel eines Pendels (§. 3) und der von einem frei fallenden Körper während der erſten Secunde ſeines Falles beſchriebene Raum eine conſtante Größe, von deren Werthe die Function abhängt, welche den Werth des Elongationswinkels für jeden Werth der ſeit dem Anfange der Bewegung verfloſſenen Zeit ausdrückt. Man nennt dieſe conſtanten Größen zuweilen auch Parameter, eine aus der Theorie der Kegelſchnitte entlehnte Benennung, und bei den Anwendungen auf die phyſikaliſchen Wiſſenſchaften nennt man ſie auch wohl conſtante Coefficienten, deren Zahlenwerthe durch die Beobachtung beſtimmt werden müſſen.

Oft iſt es nöthig, auszudrücken, daß eine Function nicht bloß von der veränderlichen Größe x, ſondern auch von den gewiſſen Parametern a, b, c, ... beigelegten conſtanten Werthen abhängt, und alsdann ſchreibt man:

$$y = f(x, a, b, c \ldots). \qquad (3)$$

Wenn dieſe Parameter a, b, c, ... keine conſtanten und für jeden beſondern Fall beſtimmten Werthe mehr hätten, ſondern ſich wie x ſtetig änderten, ſo würden ſie nicht mehr Parameter genannt werden können, und die Größe y würde eine Function von mehreren veränderlichen Größen ſein, womit wir uns erſt beſchäftigen werden, nachdem wir die Fundamente der Theorie der Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe auseinandergeſetzt haben.

§. 9. Die Buchſtaben a, b, c, ... x, y, ... können concrete Größen bezeichnen, wie Längen, Flächen, Volumina, deren Zahlenausdruck eine willkührlich gewählte Einheit vorausſetzt, oder abſtracte Zahlen. Aber in allen Fällen muß die Form der Function f ſo beſchaffen ſein, daß die Gleichung (3) unabhängig von den gewählten Maßeinheiten ſtattfindet, oder, was auf daſſelbe hinausläuft, man darf aus der Gleichung (3) keine Bedingung der Gleichheit zwiſchen heterogenen Größen ableiten können. Dieſe unter dem Namen des Principes der Homogeneität der Functionen bekannte Regel, welche in ihren Anwendungen keine Schwierigkeit darbietet, führt oft unmittelbar zu wichtigen Folgerungen in Beziehung auf die Form der Functionen. Man bedient ſich dieſer Regel oder dieſes Principes auch zu einer ſehr einfachen Beweisart gewiſſer Fundamentalſätze der Geometrie und Mechanik, und wir halten dieſe Beweisart für die directeſte von allen, welche man einſchlagen kann. *)

Um von dem Principe der Homogeneität der Functionen hier eine Anwendung zu zeigen, wollen wir die Aufgaben im §. 3 wieder betrachten und zu

laſſen oder nicht, und welche Theorie unabhängig von den Anwendungen ſtattfindet, welche man davon auf die Functionen und auf die Algebra machen kann.

*) Man ſehe die zweite Note in Legendre's Geometrie und §. 26 in Poiſſon's Mechanik, 2te Auflage.

dem Zwecke den Ablenkungswinkel eines Pendels aus der Verticale nach Verlauf einer von dem Beginnen der Bewegung an gezählten Zeit t mit θ bezeichnen, den anfänglichen Ablenkungswinkel des Pendels mit θ_0, die Länge des letzteren mit l und mit $\frac{1}{2}g$, wie gewöhnliche die Länge, welche ein frei fallender Körper in der ersten Zeiteinheit seines Falles vermöge der Wirkung der Schwere, wodurch auch das Pendel bewegt wird, durchläuft; so haben wir:

$$\theta = f(t, \theta_0, g, l).$$

Hier ist θ die Function, t die veränderliche Größe, wovon sie abhängt und θ_0, g, l sind Constanten oder Parameter, deren es nicht noch andere geben kann, weil alle Bedingungen der Erscheinung bestimmt sind, sobald man die Werthe dieser Constanten bestimmt hat. Nun sind aber g und l die einzigen Größen, deren Zahlenwerth von der gewählten Längeneinheit abhängig ist, und der Werth von θ, als Function von t, kann sich nicht mit dieser willkührlichen Längeneinheit ändern. Die Function f ist also blos von dem Verhältnisse der Linien g, l, abhängig, und man kann daher setzen:

$$\theta = f\left(t, \theta_0, \frac{g}{l}\right).$$

Ferner wollen wir annehmen, man wüßte aus den ersten Versuchen über den Fall schwerer Körper, daß sich die Quadratwurzel aus dem Parameter g der Zeiteinheit proportional oder für dieselbe verflossene Zeit im umgekehrten Verhältnisse des Zahlenwerthes von t ändert; so folgt, da der Werth von θ für einen gegebenen Augenblick nicht von der willkührlich gewählten Zeiteinheit abhängen kann, daß die Zeit t nur mit $\sqrt{g}$ multiplicirt in der Function f vorkommen kann, und man folglich hat:

$$\theta = f\left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}, \theta_0\right).$$

Nun aber können wir die Form der Function f nicht näher bestimmen, ohne in die auf diese Aufgabe speciell anwendbaren dynamischen Principien näher einzugehen, was hier unser Zweck nicht ist.

§. 10. Wenn man zu gleicher Zeit

$$y = f(x), \quad x = \varphi(t) \qquad (4)$$

hat, so daß der Werth von y unmittelbar von dem von x und der Werth von x unmittelbar von dem von t abhängt; so ist der Werth von y mittelbar von dem Werthe von t abhängig und t ist, wie man zu sagen pflegt, eine Function von einer Function, oder einfacher, eine mittelbare Function der veränderlichen Größe t. Die Beispiele dieser mittelbaren und indirecten Abhängigkeit zweier Größen von einander, kommen in der reinen Mathematik und in der Physik so häufig vor, daß wir diesen Fall etwas näher betrachten müssen. Die in Rede stehende Abhängigkeit würde sich durch die Bezeichnung:

$$y = f[\varphi(t)], \text{ oder } y = f(\varphi t)$$

ausdrücken lassen.

Man könnte auch haben:

$$y = f(x, z), \quad x = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \qquad (5)$$

folglich:

$$y = f(\varphi t, \psi t) = F(t),$$

und obgleich die Function y scheinbar von zwei veränderlichen Größen x, z in diesem Falle abzuhängen scheint; so ist sie in der That doch nur von der einzigen veränderlichen Größe t abhängig, deren Werth nur bestimmt zu werden braucht, um den von x, z und folglich auch den von y zu bestimmen.

Umgekehrt, wenn eine Gleichung:

$$y = F(t) = f(\varphi t, \psi t)$$

gegeben ist, so kann es zuweilen vortheilhaft sein, für dieselbe das gleichbedeutende System der drei Gleichungen (5) zu setzen, indem man zwei veränderliche Hülfsgrößen x, z einführt.

§. 11. Der Ausdruck Function implicirt den Begriff einer gegenseitigen abhängigen Veränderlichkeit, und in den obigen Beispielen sind y, x, z folglich abhängige veränderliche Größen, wogegen t als die unabhängige veränderliche Größe betrachtet werden kann. Aus einem rein abstracten Gesichtspunkte betrachtet, würde es auch gestattet sein, y als die unabhängige veränderliche Größe und x, z, t als Functionen zu betrachten, welche von y mittelbar oder unmittelbar abhängig sind, weil, wenn man für y zuerst einen willkührlichen Werth annimmt, die Werthe von x, z, t durch die Gleichungen (4) oder (5) bestimmt werden. Wenn also eine Gleichung zwischen x und y gegeben ist, so kann man sie sowohl in Beziehung auf x, als in Beziehung auf y auflösen. Man kann daher in diesem Sinne sagen, daß die Wahl der unabhängigen veränderlichen Größe willkührlich ist, was aber in den meisten Fällen nicht mehr zulässig ist, wenn man eine Aufgabe nach ihren besonderen Daten betrachtet. Durch die Natur der sich gleichzeitig ändernden Größen werden zwischen denselben solche Relationen aufgestellt, daß die Veränderungen der einen als den Veränderungen der andern untergeordnet betrachtet werden müssen, und nur diejenigen dieser veränderlichen Größen, deren Veränderungen den Veränderungen keiner anderen Größe subordinirt sind, müssen als wirkliche unabhängige veränderliche Größen betrachtet werden.

So muß z. B. bei der mehrfach erwähnten mechanischen Aufgabe der Ablenkungswinkel eines Pendels als eine Function der seit dem Beginnen der Bewegung verflossenen Zeit t, und t selbst als die unabhängige veränderliche Größe betrachtet werden, wogegen es unnatürlich sein würde, die Zeit t als eine Function des zur unabhängigen veränderlichen Größe genommenen Winkels θ zu betrachten, weil die Zeit t sich offenbar unabhängig von der Bewegung des Pendels ändert oder verfließt und die Veränderungen des Winkels θ im Gegentheil von der verflossenen Zeit abhängig, oder den Veränderungen von t subordinirt sind.

Im Allgemeinen erfüllt die Zeit für alle Größen, welche sich mit ihr ändern und weil sie von einem bestimmten Augenblicke an von selbst verfließt, nach der Natur der Sache selbst alle Bedingungen einer nothwendig unabhängig veränderlichen Größe, weil ihre Veränderungen den Veränderungen keiner anderen Größe subordinirt sind. Wir werden in der Folge Gelegenheit haben, auf die Folgerungen aus diesem Principe zurückzukommen und die allgemeinen Eigenschaften der Größen, in so fern sie Functionen der Zeit sind, näher zu untersuchen, welche Untersuchung der reinen Mathematik mit demselben Rechte anzugehören scheint, wie die Untersuchung der Eigenschaften der Ausdehnung und der geometrischen Formen.

Die eben gemachte Bemerkung gilt auch für die von einem willkührlichen Anfangspunkte aus gezählte veränderliche Größe t und dient zur Bestimmung der Epoche eines Phänomenes, oder genauer, des Augenblickes, worin eine gewisse Größe einen bestimmten Werth erreicht. Wenn dagegen die veränderliche Größe t die absolute Dauer eines Phänomenes ausdrückte, so könnte sie die Rolle einer abhängigen veränderlichen Größe spielen. So ist z. B. die Dauer der Schwingung eines Pendels eine Function des anfänglichen Elongationswinkels, welchen wir weiter oben mit θ_0 bezeichnet haben. Die Größe dieses Winkels ist es, welche die Schwingungsdauer, als eine Folge von der Veränderung des anfänglichen Ablenkungswinkels θ_0 und nicht die Veränderung dieses Winkels als der Veränderung der Schwingungsdauer subordinirt.

Aehnliche Betrachtungen laſſen ſich auf die veränderlichen Coordinaten anwenden, vermittelſt welcher die Lage eines Punktes auf einer gegebenen Linie, auf einer gegebenen Fläche oder im Raume beſtimmt wird. Die Größe, welche man als veränderlich betrachtet, aber nicht mehr von einem Augenblicke zum andern, ſondern von einem Orte zum andern, iſt eine Function der veränderlichen Coordinaten des Punktes, worin ſie als gemeſſen angeſehen wird. Der unabhängigen veränderlichen Coordinaten gibt es hier offenbar drei, wenn ſich der Punkt auf eine beliebige Weiſe im Raume bewegen kann; aber nur zwei, wenn dieſer Punkt auf einer gegebenen Fläche bleiben muß, und endlich nur eine, wenn dieſer Punkt auf einer gegebenen Linie bleiben muß. Jedoch iſt zu bemerken, daß die Wahl eines Coordinatenſyſtemes willkührlich iſt, ſo daß nichts hindert, die Coordinaten x, y, z, welche die Lage eines Punktes im Raume beſtimmen, als Functionen der Coordinaten u, v, w eines anderen Syſtemes zu betrachten. Die Unabhängigkeit der veränderlichen Größen x, y, z hat alſo nicht in der Natur dieſer Größen, ſondern in der willkührlichen Wahl als Coordinaten, ihren Grund, während die Unabhängigkeit der veränderlichen Größe t, welche die ſeit einem zum Anfangspunkte genommenen Augenblicke verfloſſene Zeit ausdrückt, ihren Grund in dem Weſen oder der Natur dieſer Größe hat. Dieſe Analogieen und dieſe Unterſchiede ſind unmittelbare Folgerungen aus den Analogieen und Unterſchieden, welche die Fundamentalbegriffe der Zeit und des Raumes darbieten.

Durch das Vorhergehende ſoll nicht geſagt ſein, daß bei gewiſſen phyſikaliſchen Unterſuchungen durch die Natur derſelben ein Coordinatenſyſtem nicht als vor allen übrigen den Vorzug verdienend angedeutet würde, und die Aufmerkſamkeit der Analyſten muß ſich beſonders auf ſolche Indicationen richten; denn im Allgemeinen hat die Auflöſung einer Aufgabe ihre Vollendung erreicht, wenn die veränderlichen Größen nach ihrer natürlichen gegenſeitigen Abhängigkeit analytiſch mit einander verbunden ſind. So geht z. B. in der reinen Geometrie aus der Erzeugungsart einer Linie oder einer Fläche hervor, welche Coordinaten für die unabhängigen veränderlichen Größen genommen werden müſſen, damit die Unterſuchung der Eigenſchaften der Linie oder Fläche möglichſt erleichtert wird.

Zweites Kapitel.

Ueber die Klaſſifikation der Functionen und ihre Entwickelung in Reihen.

§. 12. Die mathematiſchen Functionen werden in entwickelte (explicite) und in unentwickelte (implicite) unterſchieden. Unter unentwickelten Functionen verſteht man ſolche, welche durch eine noch nicht aufgelößte Gleichung zwiſchen der Function und der unabhängig veränderlichen Größe beſtimmt werden. So iſt z. B. die Function y, welche durch eine der Gleichungen:

$$y^n - bxy = a,\quad by + c = \log. x,\quad \text{tang. } y = y \sin. x, \text{ ꝛc.}$$

beſtimmt wird, eine unentwickelte Function von x; aber wenn dieſe Gleichungen in Beziehung auf y aufgelößt und auf die Form $y = f \cdot x$ gebracht würden, ſo würde y eine entwickelte Function derſelben veränderlichen Größe.

Man kann die entwickelten und unentwickelten Functionen durch dieſelbe Bezeichnung andeuten, indem man den zwiſchen der unabhängigen veränderli-

chen Größe x und der Function y ſtattfindenden Zuſammenhang durch eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

ausdrückt.

Die mathematiſchen Functionen, ſie mögen entwickelte oder unentwickelte ſein, werden ferner in algebraiſche und transcendente Functionen unterſchieden. Wenn die Gleichung (1) eine algebraiſche iſt, ſo daß der erſte Theil derſelben nach der immer möglichen Fortſchaffung der Nenner und Wurzelgrößen ein ganzes Polynom von einem beſtimmten Grade in Beziehung auf x und y iſt; ſo wird die Function y eine algebraiſche genannt. Wenn aber die veränderlichen Größen x, y, oder bloß eine derſelben, in einem Exponenten vorkäme, oder mit einem irrationalen Exponenten, oder mit dem Zeichen log., oder endlich mit den in der Trigonometrie üblichen Zeichen behaftet wäre; ſo wäre die Function eine transcendente. Allgemeiner, jede mathematiſche Function, welche nicht mit in der Definition der algebraiſchen Function begriffen iſt, wird als eine transcendente angeſehen.

Die einzigen transcendenten Functionen, welche wir hier als bekannt vorausſetzen, ſind die Exponentialfunctionen, die logarithmiſchen und trigonometriſchen Functionen. Ob dieſe Functionen in der That nächſt den algebraiſchen Elementarfunctionen die einfachſten ſind, ob ſie ſich auf einander zurückführen laſſen, oder nicht, und ob, ungeachtet ihrer anſcheinend verſchiedenen Entſtehungsart, zwiſchen ihnen irgend ein Zuſammenhang ſtattfindet, das ſind alles Fragen, welche in das Gebiet der Theorie gehören, womit wir uns beſchäftigen werden, und zu gleicher Zeit werden wir die bereits aus den Elementen bekannten transcendenten Functionen aus einem neuen Geſichtspunkte betrachten, dann auf die Betrachtung unendlich vieler anderer transcendente Functionen geführt werden, welche wir zu definiren und zu klaſſificiren haben und wovon wir die wichtigſten durch beſondere Zeichen darſtellen werden.

§. 13. Da die algebraiſchen Gleichungen von einem höhern, als vom vierten Grade im Allgemeinen nicht algebraiſch auflösbar ſind, und ſich folglich der Werth von y nicht durch die Wurzelgrößen und durch die übrigen Zeichen der Elementaralgebra durch x ausdrücken läßt, wenn die Gleichung (1) von einem höhern, als vom vierten Grade iſt; ſo ſcheint es, daß man die Wurzeln einer ſolchen ebenſowohl, wie die Exponentialgrößen und die Logarithmen als transcendente Functionen betrachten könne. Allein Leibnitz, welchem man die Unterſcheidung der algebraiſchen und transcendenten Functionen verdankt, hat dieſen Fehlgriff nicht begangen; denn der Umſtand, daß eine algebraiſche Gleichung zwiſchen y und x in Beziehung auf y auflösbar iſt oder nicht, hat durchaus keinen Einfluß auf die Anzahl und auf die Bedingungen der Realität oder Imaginarität der Wurzeln, noch folglich auf die Form der Curve, deren Coordinaten x und y ſind, ſo wie auf die Anzahl ihrer Zweige und auf die übrigen Eigenthümlichkeiten ihres Laufes. Dieſes alles bezieht ſich auf die Theorie der Zuſammenſetzung der algebraiſchen Gleichungen, welche ihrer algebraiſchen Auflöſung nicht ſubordinirt iſt, und vermöge welcher die algebraiſchen Functionen, ſowohl die entwickelten, wie die unentwickelten gemeinſame Eigenſchaften beſitzen, welche ſie nicht mit den Functionen gemein haben, denen man mit Recht den Namen transcendente Functionen vorbehalten hat.

§. 14. Die entwickelten algebraiſchen Functionen werden unterſchieden in ganze und gebrochene, rationale und irrationale Functionen, wie die Elementaralgebra lehrt. Was die unentwickelten algebraiſchen Functionen anlangt, ſo iſt für ſie dieſe Eintheilung ohne Grund, weil man die Gleichungen, deren Wurzeln ſie ſind, immer ſo transformiren kann, daß die Nenner und Wurzelgrößen daraus verſchwinden.

Die einfachſten ganzen rationalen Functionen ſind die, worin blos die erſte Potenz der veränderlichen Größe vorkommt und welche man auf die allgemeine Form:

$$y = ax + b,$$

bringen kann, wo a und b conſtante Zahlen bezeichnen. Man pflegt eine ſolche Function eine lineare nennen, weil die vorhergehende Gleichung für ein Syſtem paralleler Coordinaten die Gleichung einer geraden Linie iſt.

Die ganzen rationalen Functionen können für keinen endlichen Werth der veränderlichen Größe, wovon ſie abhängen, unendlich werden. Ferner iſt einleuchtend, daß allen Werthen der unabhängig veränderlichen Größe nur ein einziger reeller poſitiver oder negativer Werth dieſer Functionen entſpricht. Hieraus folgt, daß, wenn eine ganze rationale Function durch die Ordinate einer Curve dargeſtellt wird, deren Abſciſſe die unabhängige veränderliche Größe ausdrückt, dieſe Curve ſich ſowohl in dem Sinne der negativen, als der poſitiven Abſciſſen in einem einzigen Zweige unbegrenzt ausdehnt, ohne irgend wo eine Unterbrechung der Stetigkeit zu erfahren.

§. 15. Die gebrochenen Functionen, worin die unabhängige veränderliche Größe in einem oder in mehreren Nennern vorkommt, können unendlich werden, und folglich für endliche Werthe der unabhängig veränderlichen Größe, welche einen Nenner verſchwinden machen, eine Unterbrechung der Stetigkeit erfahren. Die irrationalen Functionen, ſelbſt die ganzen, erfahren Unterbrechungen der Stetigkeit und die ſie darſtellende Curve bricht plötzlich ab, wenn der Werth der unabhängig veränderlichen Größe eine Wurzelgröße imaginär macht. So hat z. B. die Function:

$$y = x + \sqrt{1 - x}$$

für $x > 1$ keine reellen Werthe mehr und wird in einem Syſteme orthogonaler Coordinaten durch die Ordinate des paraboliſchen Bogen M L (Fig. 4), welcher ſich in dem Sinne der negativen Abſciſſen unbegrenzt ausdehnt und in Punkte L, deſſen Abſciſſe O P $= 1$ iſt, abbricht, graphiſch dargeſtellt.

Ebenſo wird die Function:

$$y = \sqrt{x^2 - 2\alpha x + 1}$$

durch die Ordinate des Hyperbelzweiges L M N (Fig. 5) dargeſtellt, wenn O A $= \alpha < 1$ iſt, und in dieſem Falle erfährt ſie keine Unterbrechung der Stetigkeit. Dieſelbe Function wird durch die Ordinate der hyperboliſchen Bogen P Q, R S dargeſtellt, wenn $\alpha > 1$ iſt, für welchen Fall, in den Punkten Q, R, eine Unterbrechung der Stetigkeit ſtattfindet. Endlich muß man zur graphiſchen Darſtellung derſelben Function die Ordinate der gebrochenen Linie B A C nehmen, wenn $\alpha = 1$ iſt; denn da y poſitiv bleiben muß, ſo verwandelt ſich die gegebene Function in dieſem Falle für Werthe von $x < 1$ in:

$$y = 1 - x$$

und für Werthe von $x > 1$ in:

$$y = x - 1.$$

Dieſe Veränderung in dem algebraiſchen Ausdrucke der Function entſpricht einer Unterbrechung der Stetigkeit, wovon wir weiter unten die analytiſchen und geometriſchen Merkmale auf eine allgemeine Weiſe angeben werden, und welche von einer andern Ordnung, als die Unterbrechungen der Stetigkeit iſt, welche die Ordinate der hyperboliſchen Bogen P Q, R S in den Punkten Q und R erfährt.

§. 16. Wenn man aber zu gleicher Zeit die beiden reellen Werthe, welche eine Wurzelgröße von einem geraden Index haben kann betrachtet, ſo hat man zwei Bogen der Curve, welche ſich in den Punkten vereinigen, deren Abſciſſe den Uebergange vom Reellen zum Imaginären entſpricht, und es findet im geometriſchen Sinne keine Unterbrechung der Stetigkeit mehr ſtatt; denn im geo-

metriſchen Sinne muß man unter den Unterbrechungen der Stetigkeit nur die verſtehen, welche unabhängig ſind von der willkührlichen Richtung der Axen, worauf man die Curve bezieht.

Hieraus folgt alſo, daß man, um den vollſtändigen Ausdruck einer Curve durch eine algebraiſche Gleichung zwiſchen ihren Coordinaten zu haben, dieſe Gleichung von den Wurzelgrößen befreien, oder alle doppelten Zeichen der Wurzelgrößen von geradem Inder beibehalten muß. Dieſes iſt die Grundlage der Correſpondenz zwiſchen der Algebra und der Geometrie, worauf wir wieder zurückkommen werden, wenn von den Anwendungen der Analyſis auf die Theorie der Curven ſpecieller die Rede ſein wird.

Dagegen können die transcendenten Curven, oder diejenigen, deren Ordinate eine transcendente Function der Abſciſſe iſt, plötzlich in ihrem Laufe unterbrochen werden, ohne daß ſich ihre Zweige wieder vereinigen, ſo daß der Punkt, welcher durch ſeine Bewegung einen der Curvenzweige beſchriebe, plötzlich ſtill ſtehen müßte. So beſteht z. B. die Curve, deren Gleichung:

$$y + 1 = a^{-\frac{1}{x}}$$

iſt, wo a eine poſitive Zahl > 1 bezeichnet, aus den beiden Zweigen **B L**, **M N** (Fig. 6), wovon der erſte in der Richtung der poſitiven Abſciſſen die Axe der x zur Aſymptote hat, und ſich in dem Punkte **B**, deſſen Coordinaten $x = 0$, $y = -1$ ſind, plötzlich ſchließt, während der zweite Zweig in dem Sinne der poſitiven y die Axe der y und in dem Sinne der negativen x die Axe der x zur Aſymptote hat. Denn ſo lange x poſitiv iſt, nimmt die Function:

$$a^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{a^x}}$$

für immer kleiner werdende Werthe von x fortwährend ab, und verſchwindet zuletzt mit x, während ſie ſich für immer größer werdende Werthe von x der Einheit ohne Ende nähert. Wenn dagegen x negative Werthe durchlauft, ſo nimmt dieſelbe Function für immer kleiner werdende Werthe von x über alle Grenzen hinaus zu, während ſie ſich für zunehmende Werthe von x wieder der Einheit ohne Ende nähert.

Die Punkte, worin ſich ein Zweig einer transcendenten oder empiriſchen Curve plötzlich ſchließt, werden *Stillſtands-* oder *Schlußpunkte* genannt. Wenn zwei getrennte Curvenzweige **N M**, **M′ N′** (Fig. 7) eine gemeinſchaftliche Ordinate **P M N′** hätten, ſo daß die durch die Ordinate der Curve dargeſtellte Function plötzlich von dem Werthe **P M** zu dem Werthe **P M′** überginge, ſo wären die Punkte **M**, **M′** *Zerreißungspunkte*. Die algebraiſchen Functionen können weder Schlußpunkte, noch Zerreißungspunkte haben, und folglich keine anderen Unterbrechungen der Stetigkeit darbieten, als die, welche von dem Durchgange durch das Unendliche herrühren, wogegen die transcendenten Functionen Unterbrechungen der Stetigkeit darbieten können, welche von dem plötzlichen Uebergange von einem endlichen Werthe zu einem andern herrühren.

§. 17. Wenn die Theorie der Functionen eine größere Allgemeinheit hat, als die Algebra, inſofern darin von den gemeinſamen Eigenſchaften der algebraiſchen und transcendenten, und ſelbſt der Functionen gehandelt wird, welche keine mathematiſche Definition geſtatten; ſo erhält dieſe Theorie andererſeits eine Ausdehnung, welche urſprünglich nur in der reinen Algebra und für die Functionen einen Sinn hat, welche ſich algebraiſch ausdrücken laſſen. Dieſe Erweiterung beſteht darin, die imaginären Werthe in Betracht zu ziehen, welche eine algebraiſch ausgedrückte Function annimmt, wenn die veränderliche Größe,

wovon sie abhängt, durch reelle Werthe geht, welche diesseits oder jenseits gewisser Grenzen liegen, wie z. B., wenn in der Function:

$$y = x + \sqrt{1 - x}$$

die veränderliche Größe $x > 1$ wird. Diese Erweiterung besteht ferner in der Annahme, daß die unabhängig veränderliche Größe, selbst eine Reihe imaginärer Werthe durchlaufen kann. Um sich aber von einem solchen Durchlaufen einen Begriff bilden zu können, muß man diese zweite veränderliche Größe, wovon die erste eine Function ist, als ihrerseits von einer dritten veränderlichen Größe, welche eine Reihe reeller Werthe durchläuft, abhängig betrachten. Es sei t diese letzte veränderliche Größe, x die unmittelbar davon abhängige Veränderliche und y eine Function von x. Ferner bezeichnen t_0, x_0, y_0; t, x, y, zwei Systeme correspondirender Werthe dieser drei Veränderlichen, wo t_0, t_1 reelle Größen sind, während x_0, y_0, x_1, y_1 reelle oder imaginäre Größen sein können; so ist klar, daß, während t von dem Werthe t_0 zu dem Werthe t_1 übergeht, indem es alle zwischenliegende reellen Werthe durchläuft, die Veränderliche x eine Reihe imaginärer Werthe durchlaufen kann, welche durch den zwischen t und x stattfindenden algebraischen Zusammenhang bestimmt wird, und welcher eine Reihe ebenfalls bestimmter reeller oder imaginärer Werthe von y entspricht. Dagegen wird die Reihe der imaginären Werthe, welche x durchlaufen kann, indem es von dem Werthe x_0 zu dem Werthe x_1 übergeht, durch nichts bestimmt, wenn man nicht eine bestimmte directe oder indirecte Abhängigkeit zwischen x und einer andern Veränderlichen festsetzt, welche von einem reellen Werthe zu einem andern reellen Werthe übergeht, indem sie alle zwischenliegenden reellen Werthe durchläuft, weil zwischen den imaginären Größen keine natürliche und bestimmte Größenordnung stattfindet. *)

---

*) Gauß hat die reelle und anschauliche Bedeutung der imaginären Ausdrücke direct nachgewiesen und dadurch ihre Zulässigkeit in der Rechnung vollständig gerechtfertigt, worüber er sich in den Götting. Gel. Anz. Stück 64 v. J. 1831 folgendermaßen ausdrückt:

„So wie die absoluten ganzen Zahlen durch eine in einer geraden Linie unter gleichen Entfernungen geordnete Reihe von Punkten dargestellt werden, in der der Anfangspunkt die Zahl 0, der nächste die Zahl 1 u. s. w. vertritt, und so wie dann zur Darstellung der negativen Zahlen nur eine unbegrenzte Verlängerung dieser Reihe auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspunktes erforderlich ist: so bedarf es zur Darstellung der complexen ganzen Zahlen, d. h. der Zahlen von der Form $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, nur des Zusatzes, daß jene Reihe als in einer bestimmten unbegrenzten Ebene befindlich angesehen und parallel mit ihr auf beiden Seiten eine unbeschränkte Anzahl ähnlicher Reihen in gleichen Abständen von einander angenommen werde, so daß wir anstatt einer Reihe von Punkten ein System von Punkten vor uns haben, die sich auf eine zwiefache Art in Reihen von Reihen ordnen lassen, und zur Bildung einer Eintheilung der ganzen Ebene in lauter gleiche Quadrate dienen.

. . . . . .

$$\ldots\ldots -2+2\sqrt{-1},\ -1+2\sqrt{-1},\ 2\sqrt{-1},\ 1+2\sqrt{-1},\ 2+2\sqrt{-1} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots -2+\sqrt{-1},\ -1+\sqrt{-1},\ \sqrt{-1},\ 1+\sqrt{-1},\ 2+\sqrt{-1} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots -2\quad ,\ -1\quad ,\quad 0,\ 1\quad ,\ 2\quad \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots -2-\sqrt{-1},\ -1-\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1},\ 1-\sqrt{-1},\ 2-\sqrt{-1} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots -2-2\sqrt{-1},\ -1-2\sqrt{-1},\ -2\sqrt{-1},\ 1-2\sqrt{-1},\ 2-2\sqrt{-1} \ldots\ldots$$

. . . . . .

Der nächste Punkt bei 0 in der ersten Nebenreihe auf der einen Seite der Reihe, welche die reellen Zahlen repräsentirt, bezieht sich dann auf die Zahl $i = \sqrt{-1}$, so wie der nächste Punkt bei 0 in der ersten Nebenreihe auf

In der Folge werden wir ſehen, daß nicht blos die algebraiſchen Functionen, ſondern auch die exponentiellen, logarithmiſchen und trigonometriſchen

---

der andern Seite auf $-i = -\sqrt{-1}$ u. ſ. f. Bei dieſer Darſtellung wird die Ausführung der arithmetiſchen Operationen in Beziehung auf die complexen Größen einer Verſinnlichung fähig, die nichts zu wünſchen übrig läßt.

Von der andern Seite wird hierdurch die wahre Metaphyſik der imaginären Größen in ein neues Licht geſtellt.

Unſere allgemeine Arithmetik, von deren Umfang die Geometrie der Alten ſo weit überflügelt wird, iſt ganz die Schöpfung der neuern Zeit. Urſprünglich ausgehend von dem Begriff der abſoluten ganzen Zahlen hat ſie ihr Gebiet ſtufenweiſe erweitert; zu den ganzen Zahlen ſind die gebrochenen, zu den rationalen die irrationalen, zu den poſitiven die negativen, zu den reellen die imaginären hinzugekommen. Dieſes Vorſchreiten iſt aber immer anfangs mit furchtſam zögerndem Schritt geſchehen. Die erſten Algebraiſten nannten noch die negativen Wurzeln falſche Wurzeln, und ſie ſind es auch, wo die Aufgabe, auf welche ſie ſich beziehen, ſo eingekleidet vorgetragen iſt, daß die Beſchaffenheit der geſuchten Größe kein Entgegengeſetztes zuläßt. Allein ſo wenig man in der allgemeinen Arithmetik Bedenken hat, die gebrochenen Zahlen mit aufzunehmen, obgleich es ſo viele zählbare Dinge gibt, wobei eine Bruchzahl ohne Sinn iſt, ebenſowenig durften in jener den negativen Zahlen gleiche Rechte mit den poſitiven deßhalb verſagt werden, weil unzählige Dinge kein Entgegengeſetztes zulaſſen; die Realität der negativen Zahlen iſt hinreichend gerechtfertigt, da ſie in unzähligen andern Fällen ein adäquates Subſtrat finden. Darüber iſt man nun freilich ſeit langer Zeit im Klaren; allein die den reellen Größen gegenübergeſtellten imaginären — ehemals und hin und wieder noch jetzt, obwohl unſchicklich, unmögliche genannt — ſind noch immer weniger eingebürgert, als nur geduldet, und erſcheinen alſo mehr wie ein an ſich inhaltleeres Zeichenſpiel, dem man ein denkbares Subſtrat unbedingt abſpricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieſes Zeichenſpiel zuletzt in den Schatz der Verhältniſſe der reellen Größen ſteuert, verſchmähen zu wollen.

Wir haben dieſen hochwichtigen Theil der Mathematik ſeit vielen Jahren aus einem verſchiedenen Geſichtspunkte betrachtet, wobei den imaginären Größen ebenſogut ein Gegenſtand untergelegt werden kann, wie den negativen; es hat aber bisher an einer Veranlaſſung gefehlt, unſere Anſicht öffentlich beſtimmt auszuſprechen, wenn gleich aufmerkſame Leſer die Spuren davon in der 1799 erſchienenen Schrift über die Gleichungen und in der Preisſchrift über die Umbildung der Flächen leicht wiederfinden werden. In unſerer Abhandlung Theoria Residuorum Biquadraticorum, Gottingae 1832, ſind die Grundzüge davon kurz angegeben; ſie beſtehen im Folgenden.

Poſitive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengeſetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleich zu ſtellen iſt. Genau beſehen findet dieſe Vorausſetzung nur da ſtatt, wo nicht Subſtanzen (für ſich denkbare Gegenſtände), ſondern Relationen zwiſchen je zwei Gegenſtänden das Gezählte ſind. Poſtulirt wird dabei, daß dieſe Gegenſtände auf eine beſtimmte Art in eine Reihe geordnet ſind, z. B. A, B, C, D ...., und daß die Relation des A zu B als der Relation des B zu C u. ſ. w. gleich betrachtet werden kann. Hier gehört nun zu dem Begriff der Entgegenſetzung nichts weiter, als der Umtauſch der Glieder der Relation, ſo daß, wenn die Relation (oder der Uebergang von A zu B als $+1$ gilt, die Relation von B zu A durch -1 dargeſtellt werden muß. Inſofern alſo eine ſolche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt iſt, repräſentirt jede reelle ganze Zahl die Relation eines beliebig als Anfang gewählten Gliedes zu einem beſtimmten Grade der Reihe.

Sind aber die Gegenſtände von ſolcher Art, daß ſie nicht in eine, wenn gleich unbegrenzte, Reihe geordnet werden können, ſondern ſich nur in Reihen von Reihen ordnen laſſen, oder, was daſſelbe iſt, bilden ſie eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimenſionen; verhält es ſich dann mit den Relationen einer Reihe zu einer andern oder den Uebergängen aus einer in die andere auf eine ähnliche Weiſe, wie vorhin mit den Uebergängen von einem Gliede einer Reihe zu einem andern Gliede derſelben Reihe, ſo bedarf es

Functionen eine bestimmte Bedeutung und einen bestimmten reellen oder imaginären Werth bekommen, wenn man die veränderlichen Größen dieser Functionen

---

offenbar zur Abmessung des Ueberganges von einem Gliede des Systemes zu einem andern außer den vorigen Einheiten + 1 und − 1 noch zweier andern unter sich auch entgegengesetzten + i und − i. Offenbar muß aber dabei noch postulirt werden, daß die Einheit i allemal den Uebergang von einem gegebenen Gliede einer Reihe zu einem bestimmten Gliede der unmittelbar angrenzenden Reihe bezeichne. Auf diese Weise wird also das System auf eine doppelte Art in Reihen von Reihen geordnet werden können.

Der Mathematiker abstrahirt gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen; er hat es blos mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu thun; insofern ist er ebenso, wie er den durch + 1 und − 1 bezeichneten Relationen, an sich betrachtet, Gleichartigkeit beilegt, solche auf alle vier Elemente + 1, − 1, + i und − i zu erstrecken befugt.

Zur Anschauung lassen sich diese Verhältnisse nur durch eine Darstellung im Raume bringen, und der einfachste Fall ist, wo kein Grund vorhanden ist, die Symbole der Gegenstände anders als quadratisch anzuordnen, indem man eine unbegrenzte Ebene durch zwei Systeme von Parallellinien, die einander rechtwinklig durchkreuzen, in Quadrate zertheilt, und die Durchschnittspunkte zu den Symbolen wählt. Jeder solcher Punkt A (Fig. 7 a) hat hier vier Nachbarn, und wenn man die Relation des A zu einem benachbarten Punkte durch + 1 bezeichnet, so ist die durch − 1 zu bezeichnende von selbst bestimmt, während man, welche der beiden andern man will, für + i wählen, oder den sich auf + i beziehenden Punkt nach Gefallen oben und unten nehmen kann. Dieser Unterschied zwischen oben und unten ist, sobald man vorwärts und rückwärts in der Ebene und rechts und links in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes Andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mittheilen können. Wenn man aber auch über letzteres sich entschlossen hat, sieht man, daß es doch von unserer Willkühr abhing, welche von den beiden in einem Punkte sich durchkreuzenden Reihen wir als Hauptreihe, und welche Richtung in ihr wir als auf positive Zahlen sich beziehend ansehen wollten; man sieht ferner, daß, wenn man die vorher als + i behandelte Relation für + 1 nehmen will, man nothwendig die vorhin durch − 1 bezeichnete Relation für + i nehmen muß. Das heißt aber in der Sprache der Mathematiker: + i ist eine mittlere Proportionalgröße zwischen + 1 und − 1 oder entspricht dem Zeichen $\sqrt{-1}$; wir sagen absichtlich nicht die mittlere Proportionalgröße, denn − i hat offenbar gleichen Anspruch. Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Größe in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen.

Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der sogenannten imaginären Größen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspunkt betrachtet und eine geheimnißvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies größtentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man + 1, − 1, $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können. Wir haben uns vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der genannten Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können, ihre Beantwortung finden wird."

Wegen der geometrischen Bedeutung der imaginären Ausdrücke vergleiche man weiter unten §. 76 Anmerk. Z. d. Uebers.

imaginäre Werthe durchlaufen läßt. Folglich sind die in diesem Paragraph gemachten Bemerkungen auf alle schon bekannten algebraischen oder transcendenten Functionen anwendbar.

§. 18. Wir haben eben gezeigt, wie die Analysten die Functionen nach ihrer mathematischen Ausdrucksart klassificiren; allein die Functionen können auch nach ihrer Form oder nach der Form der Curven, welche sie ausdrücken, klassificirt werden, und diese Klassifikation kann sowohl die empirischen, wie die algebraischen, oder transcendenten Functionen umfassen. Es kommt übrigens hier nicht darauf an, eine methodische und vollständige Klassifikation, wie die, welche sich auf Gegestände von unendlicher Anzahl anwenden lassen, wie z. B. in der Naturgeschichte, aufzustellen, sondern blos gewisse Klassen von Functionen anzuführen, welche sich durch allgemeine Merkmale auszeichnen.

Zunächst wollen wir die geraden und ungeraden Functionen betrachten. Gerade Functionen werden nämlich die genannt, welche dieselben Werthe annehmen, wenn man der unabhängigen Veränderlichen gleiche Werthe mit entgegengesetzten Zeichen beilegt, oder diejenigen, welche in einem Systeme orthogonaler Coordinaten durch Curven dargestellt werden, welche gegen die Axe der Ordinaten symmetrisch sind. Unter den algebraischen Functionen sind die geraden Functionen die, welche nur gerade Potenzen der unabhängigen Veränderlichen enthalten, wie x^2, $\sqrt{1 - x^4}$, woher auch der Name der geraden Functionen kommt, welchen man auf alle Functionen anwenden kann, die dieselbe Aehnlichkeit der Form darbieten, obgleich sie sich nicht algebraisch ausdrücken lassen. Die trigonometrische Function cos. x ist eine gerade, weil man in der Trigonometrie den Cosinus eines negativen Bogens als denselben Zahlenwerth mit demselben Zeichen, wie der desselben positiven Bogens habend betrachten muß.

Ungerade Functionen dagegen werden diejenigen genannt, welche für gleiche und entgegengesetzte Werthe der unabhängig veränderlichen Größe gleiche und entgegengesetzte Zahlenwerthe annehmen, wozu die algebraischen Functionen:

$$\frac{1}{x^3},\ x\sqrt{1 + x^4}$$

gehören. Nach dieser Definition sind also sin. x und tang. x ebenfalls ungerade Functionen. Eine ungerade Function muß für $x = 0$ verschwinden, wofern sie für diesen Werth von x keine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt, was z. B. bei den ungeraden Functionen:

$$\sqrt{\frac{1 + x^2}{x}},\ \text{cot. } x$$

der Fall ist. Eine jede beliebige Function kann als die Summe aus einer geraden und und einer ungeraden Function betrachtet werden. Denn es sei f das Zeichen einer beliebigen Function, so kann man setzen:

$$f(x) + f(-x) = 2\varphi(x),$$
$$f(x) - f(-x) = 2\psi(x),$$

und alsdann ist $\varphi(x)$ offenbar eine gerade und $\psi(x)$ eine ungerade Function von x, welche Form übrigens die Function $f(x)$ auch haben mag. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich aber:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

was bewiesen werden sollte.

§. 19. Periodische Functionen werden diejenigen genannt, welche immer dieselben Werthe wieder annehmen, wenn man für die unabhängig veränderliche Größe Werthe substituirt, die um gleiche Größen von einander verschieden sind. Die Größe dieses Unterschiedes oder dieser Intervalle bestimmt

oder mißt die Ausdehnung der Periode. So betrachtet man z. B. in der Trigonometrie die Kreisbogen als Größen, welche größer, als der ganze Kreisumfang werden und ſowohl in dem poſitiven, als in dem negativen Sinne unbegrenzt zunehmen können, während die Sinus, Coſinus und überhaupt die trigonometriſchen Functionen dieſer Bogen periodiſch dieſelben Werthe wieder annehmen, ſo oft man zu dem urſprünglichen Bogen einen ganzen Kreisumfang hinzufügt, oder davon abzieht. Es ſind alſo sin. ax, cos. ax, tang. ax periodiſche Functionen, deren Periode $\frac{2\pi}{a}$ zum Werthe hat. Die Function $y = \sin. ax$ z. B. iſt die Ordinate einer Curve P′ N′ M′ O M N P . . . (Fig. 8), welche ſich ſowohl in dem Sinne der negativen, als der poſitiven Abſciſſen unbeſtimmt ausdehnt und ſich vermittelſt der natürlichen oder künſtlichen trigonometriſchen Tafeln leicht durch Punkte conſtruiren läßt. Die gleichen Intervalle P′ O, O P, ... meſſen die Ausdehnung der Periode.

Die Natur bietet uns eine Menge von Erſcheinungen dar, welche dem Geſetze der Periodicität unterliegen, und folglich verdient die Klaſſe der periodiſchen Function, deren einfachſten Typus die Geometrie des Kreiſes an die Hand gibt, eine beſondere Aufmerkſamkeit.

§. 20. Unter den nichtperiodiſchen Functionen ſind hier blos die anzuführen, welche die Eigenſchaft haben, beſtändig zu- oder abzunehmen, wenn die unabhängige Veränderliche zunimmt, denn die nicht periodiſchen Functionen, welche abwechſelnd zu- und abnehmen, bieten weiter keine wichtigen Merkmale dar, in Folge welcher ſie in beſondere Klaſſen eingetheilt werden könnten.

Beſonders bemerkenswerth ſind die Functionen, welche ſich ohne Ende dem Werthe Null, oder jedem andern feſten Werthe nähern, wenn die unabhängige Veränderliche zu- oder abnimmt. Von dieſer Beſchaffenheit ſind die Functionen:

$$y = \frac{1}{b + x^m}, \quad y = b + a^{-x^n},$$

wo a, m, n poſitive Zahlen bezeichnen und a außerdem größer, als die Einheit angenommen wird.

Die Functionen dieſer Art müſſen häufig in dem Ausdrucke phyſikaliſcher Erſcheinungen vorkommen; denn es geſchieht oft, daß eine Größe von einem gewiſſen Zuſtande aus fortwährend abnimmt, ſo daß ſie zuletzt faſt Null wird, oder von einem beſtimmten Werthe, welchem ſie ſich ohne Ende nähert, nicht merklich verſchieden iſt. Insbeſondere iſt hier die Function $y = a^{-x^2}$ (Fig. 9) zu bemerken, welche der einfachſte Typus der Functionen iſt, die zu beiden Seiten des Anfangspunktes der unabhängig veränderlichen Größe ſehr ſchnell und ſymmetriſch abnehmen, ſo daß der Zahlenwerth dieſer Function für wenig beträchtliche Zahlenwerthe der unabhängig veränderlichen Größe ſchon außerordentlich klein iſt, wie wenig die conſtante Zahl a auch größer ſein mag, als die Einheit. Bei dem gegenwärtigen Zuſtande der Phyſik nimmt man an, daß die materiellen Theilchen der Körper von Kräften ſollicitirt werden, deren Abnahmegeſetz durch eine Function dieſer Art ausgedrückt wird, und bei den Anwendungen der Wahrſcheinlichkeitsrechnung auf große ſtatiſtiſche Zahlen kommt man ebenfalls ſehr häufig auf Functionen von dieſer Form.

§. 21. Wir wollen annehmen, daß wir eine empiriſche Function fx hätten, womit arithmetiſche oder algebraiſche Rechnungen vorgenommen werden ſollen, wie wenn man z. B. den Werth von x finden ſollte, welcher der Gleichung:

$$fx = \frac{1}{x + a}$$

genügt; so besteht das sich zunächst darbietende Verfahren offenbar darin, wo möglich eine algebraische Function φx zu finden, welche sich wenig von fx entfernt, wenigstens innerhalb der Grenzen, zwischen welche die gesuchte Wurzel fallen muß, und dann φx in die gegebene Gleichung für fx zu substituiren. Der Zweck einer solchen Substitution ist im Allgemeinen, die algebraischen Umformungen, welche auf allgemeine Formeln führen müssen, oder arithmetische Operationen möglich zu machen, wenn man besondere Werthe bestimmen will.

Wenn die substituirte Function sich der ursprünglichen in dem ganzen betrachteten Theile ihres Verlaufes nähern soll, so müssen die wesentlichen Formen der substituirten Function mit denen der zu ersetzenden Function verträglich sein.

Wenn z. B. die zu ersetzende Function eine periodische ist, so nimmt man, wenigstens bis zu einer genauern Untersuchung, an, daß sie möglicher Weise durch eine Function von der Form:

$$y = A \sin.(mx + n),$$

welche ihrer Natur nach periodisch ist, ersetzt werden kann; aber es würde offenbar ganz unmöglich sein, daß sich die gegebene Function in der ganzen Ausdehnung ihres Verlaufes einer Function von der Form:

$$y = Ax^m,\ y = Aa^{mx},$$

welche, je nach dem Zeichen von m, beständig zu- oder abnehmen würde, nähern könnte.

Unter Interpolation versteht man die Operation, durch welche man eine Curve $y = \varphi x$ bestimmt, welche eine gewisse Anzahl von Punkten mit der Curve $y = fx$ gemein hat, und sich zwischen den äußersten Punkten desto weniger davon entfernt, je größer die Anzahl der zwischen liegenden gemeinschaftlichen Punkte ist. Wir werden später näher auf die Verfahrungsarten der Interpolation eingehen; allein für den Augenblick genügt es, sich vorzustellen, daß die Curve, deren Ordinate φx ist, durch einen gegebenen Punkt (x_0, y_0) geht, wenn man die Gleichung versetzt:

$$y_0 = \varphi x_0,$$

d. h. wenn man die Parameter oder die unbestimmten Coefficienten, welche der mathematische Ausdruck der Function φ enthalten muß, durch eine Bedingungsgleichung mit einander verbindet, und je mehr willkührliche Parameter man in diesen Ausdruck eingeführt hat, wofern man auf der gegebenen Curve $y = fx$ eine gleiche Anzahl von Punkten hat, desto mehr nähern sich die Curven, deren Ordinaten durch φx und fx ausgedrückt werden, in dem betrachteten Theile ihres Laufes einander.

Hiervon rührt, gelegentlich bemerkt, die Schwierigkeit her, den Werth gewisser Formeln der mathematischen Physik unter der Controle der Beobachtung zu bestimmen. Denn wenn zur Darstellung des Gesetzes einer Erscheinung die Gleichung $y = \varphi x$ gegeben wird, worin die Function φ viele willkührliche Parameter enthält, und man bestimmt diese Parameter nach der Bedingung, den Beobachtungen zu genügen, welche eben so viele Systeme zusammengehöriger Werthe von x und y geben, als man Parameter hat, so wird es hierdurch allein schon wahrscheinlich, daß die Systeme der zwischenliegenden Werthe nahezu derselben Gleichung genügen werden, obgleich das wahre Gesetz der Erscheinung durch eine von φx verschiedene Function fx ausgedrückt wird. Wenn folglich auf den für die Function φ gewählten analytischen Ausdruck eine physikalische Theorie gebaut werden sollte, so würde die Wahrheit dieser Theorie noch nicht durch die Uebereinstimmung zwischen der Beobachtung und Rechnung für die zwischenliegenden Werthe der Veränderlichen x, y genügend dargethan.

Wenn die Formen der Functionen f und φ mit einander unverträglich wären, indem z. B. die eine Function eine periodische und die andere eine beständig zu- oder abnehmende wäre, so würde dieses durch die Rechnung selbst

angezeigt, indem man für die Parameter unendliche, oder imaginäre, oder unbestimmte Werthe erhielte.

§. 22. Man sieht leicht ein, daß es von Nutzen sein kann, auf diese Weise nicht blos empirische Functionen, welche sich auf keine andere Art der Rechnung würden unterwerfen lassen, sondern auch transcendente oder complicirte algebraische Functionen durch andere Functionen von einer einfachern Form, oder solche, deren Form der Natur der vorzunehmenden analytischen Operationen besser entsprechen, zu ersetzen, wie dieses, um ein ganz elementares Beispiel anzuführen, geschieht, wenn man für einen gewöhnlichen Bruch, wie $\frac{2}{3}$ einen Decimalbruch 0,6666 setzt, welcher den Werth des gewöhnlichen Bruches nur näherungsweise ausdrückt, aber dessen Ausdruck, obgleich er eigentlich complicirter ist, als der des gewöhnlichen Bruches, der Natur unserer arithmetischen Grundoperationen besser entspricht.

Auch in diesem Falle sieht man leicht ein, wenn die substituirte Function keine Form hat, welche mit der Form der gegebenen Function unverträglich ist, daß man die beiden Functionen einander desto mehr nähern kann, je mehr willkührliche Parameter man einführt, deren Werthe man schicklich bestimmt; aber andererseits wird dadurch auch die substituirte Function complicirter, so daß die Vortheile, welche man durch die Substitution erreichen wollte, wieder verloren gehen, je mehr willkührliche Parameter man einführt. Das Mittel, dessen sich die Analysten zur Beseitigung dieses Uebelstandes bedienen, besteht darin, daß sie für die gegebene Function eine Summe analytischer Functionen von derselben Form substituiren, welche sich nur durch die Werthe gewisser Parameter unterscheiden. Statt also z. B. für die Function $y = fx$ die Function:

$$y = A x^m, \text{ oder } y = A \sin. mx,$$

zu substituiren, kann man setzen:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{etc.}$$

oder:

$$y = A_1 \sin. x + A_2 \sin. 2x + A_3 \sin. 3x + \text{etc.}$$

und diese sogenannten Reihenausdrücke können als der gegebenen Function fx gleich betrachtet werden, wenn der Werth, welchen man erhält, wenn man eine hinreichende Anzahl von Gliedern dieser Reihen nimmt, beliebig wenig von dem Werthe der Function fx verschieden ist. Hierbei muß man sich die Reihe nothwendig als ins Unendliche fortlaufend vorstellen; denn wenn man den genauen Werth von fx, vermittelst einer endlichen Anzahl von Gliedern erhielte, so hätte man nur den analytischen Ausdruck von fx entwickelt, aber nicht in einer Reihe in dem eigentlichen Sinne des Wortes. So sind z. B. die identischen Gleichungen:

$$(x + h)^3 = h^3 + 3h^2 x + 3hx^2 + x^3,$$

$$(\sin. x)^5 = \tfrac{5}{8} \sin. x - \tfrac{5}{16} \sin. 3x + \tfrac{1}{16} \sin. 5x,$$

keine eigentlichen Reihenentwickelungen, sondern bloße Umformungen.

§. 23. Die einfachsten Reihen sind die, welche nach den ganzen und steigenden Potenzen der veränderlichen Größe fortschreiten. Mercator und Newton sind auf Reihen von dieser Form geführt, nämlich der erste, indem er die gewöhnliche Divisionsregel auf die gebrochene Function:

$$\frac{1}{a + bx}$$

anwandte und die successiven Glieder des Quotienten nach den absteigenden Potenzen von x ordnete, und der zweite, indem er die Regel für die Ausziehung der Wurzeln auf die irrationale Function:

$$\sqrt[n]{a + bx},$$

anwandte und die succeſſive erhaltenen Glieder der Wurzel ebenfalls nach den ſteigenden Potenzen von x ordnete. Bald darauf fanden Newton und Leibnitz ähnliche Entwickelungen für die damals bekannten transcendenten Functionen, und ſeit dieſer Zeit iſt die Umformung der Functionen in Reihen eins der Hauptgeſchäfte der Analyſis geworden.

Dieſe Transformation wird zu zwei verſchiedenen Zwecken vorgenommen, welche den beiden Seiten entſprechen, von welchem man das ganze Syſtem der mathematiſchen Wiſſenſchaften betrachten kann. Bald will man nämlich gewiſſe von den Zahlenwerthen der Größen unabhängige Geſetze und Relationen beweiſen und gibt zu dem Zwecke den Functionen, die zu dem Beweiſe am meiſten geeigneten Reihenformen, wobei es ziemlich gleichgültig iſt, wie viele Glieder der Reihe man nehmen muß, um einen hinreichend genäherten Werth der gegebenen Function zu erhalten, und es iſt hinreichend, wenn man einſieht, daß die Reihe in allen Fällen ſo weit fortgeſetzt werden kann, daß die Summe der unberückſichtigt gelaſſenen Glieder kleiner werden kann, als jede gegebene Größe.

In andern Fällen dagegen will man vermittelſt der Reihen Zahlenwerthe wirklich berechnen, und alsdann iſt es nothwendig, daß man eine hinreichende Annäherung erhalten kann, ohne eine zu große Anzahl von Gliedern der Reihe berechnen zu müſſen, was ſehr mühſam und zuweilen ganz unausführbar ſein würde.

§. 24. Unter convergirenden Reihen verſteht man ſolche, welche der Bedingung genügen, daß die Summe ihrer Glieder um ſo mehr gegen einen Grenzwerth convergirt, eine je größere Anzahl von Gliedern man nimmt, und dieſe Grenze wird die Summe der Reihen genannt. Soll die Transformation einer Function in einer Reihe zuläſſig ſein, ſo muß dieſe Reihe convergent ſein und die transformirte Function zur genauen Summe haben. Umgekehrt, ſoll eine Reihe von einer unendlichen Anzahl von Gliedern, deren Geſetz gegeben iſt, und worin die Veränderliche x vorkommt, als eine gewiſſe Function von x beſtimmend, betrachtet werden können; ſo iſt offenbar erforderlich, daß dieſe Reihe gegen einen Grenzwerth convergire, oder eine Summe habe, dieſe Summe mag ſich vermittelſt der gebräuchlichen algebraiſchen oder transcendenten Zeichen als Function von x ausdrücken laſſen (in welchem Falle man ſagt, die Reihe ſei unter endlicher Form ausgedrückt), oder der Zahlenwerth dieſer Summe mag ſich für jeden Zahlenwerth von x nur näherungsweiſe vermittelſt der Reihe ſelbſt berechnen laſſen, und in dieſem Falle bildet die in einer Reihenform ausgedrückte Function eine neue transcendente Function, welche ſich nicht auf die bekannten transcendenten Functionen zurückführen läßt.

Eine Reihe braucht nicht gleich in ihren erſten Gliedern convergent zu ſein, um als eine beſtimmte Function, welche die Summe derſelben iſt, ausdrückend betrachtet werden zu müſſen, und folglich für dieſe Function ſubſtituirt werden zu können; ſondern es genügt, daß ſie zuletzt convergent wird, wie weit das Glied, womit die Convergenz anhebt, auch von dem Anfange der Reihe entfernt ſein mag. Aber wenn es ſich um numeriſche Rechnungen handelt, ſo wendet man faſt nur Reihen an, welche ſchon in ihren erſten Gliedern ſchnell convergiren, wenigſtens für die Zahlenwerthe, welche man den in den Reihen vorkommenden veränderlichen Größen beilegen will; denn eine Convergenz, welche erſt nach einer beträchtlichen Anzahl von Gliedern oder auch in den erſten Gliedern, aber nur ſehr langſam ſtattfinden würde, wäre für einen ſolchen Zweck offenbar illuſoriſch.

Eigentlich müßte man nur die Reihen divergente nennen, für welche die Summen, welche man erhält, wenn man ſucceſſive eine immer größere Anzahl von Gliedern zuſammen addirt, divergent ſind, ſo daß der Unterſchied zwiſchen einer Summe und der folgenden, ſtatt immer kleiner zu werden und

sich der Null beliebig zu nähern, einen immer größer werdenden Zahlenwerth annimmt. Dieses ist bei der Reihe:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.}$$

für größere Zahlenwerthe von x, als die Einheit der Fall. Allein man pflegt der Einfachheit wegen jede Reihe, welche nicht convergent ist und keine Summe hat, divergent zu nennen. So sagt man z. B., daß die vorhergehende Reihe divergent ist, wenn man der Veränderlichen x den Werth — 1 beilegt, in welchem Falle die auf einander folgenden Summen abwechselnd die Werthe 1 und 0 haben.

§. 25. Wenn eine Function fx in eine Reihe entwickelt wird, so wollen wir den Zahlenwerth der Differenz, welche man erhält, wenn man die Summe der n ersten Glieder der Reihe von fx abzieht, mit $\varphi_n x$ bezeichnen. Wenn die Reihe convergent ist und fx zur Summe hat, so convergirt $\varphi_n x$ für zunehmende Werthe des Index n ohne Ende gegen Null, und diese Größe kann beliebig klein gemacht werden, wenn man für n eine hinreichend große Zahl nimmt. Wenn dagegen die Reihe divergent ist, so nimmt $\varphi_n x$ mit n zu, oder nimmt wenigstens für wachsende Werthe von n nicht ohne Ende ab. Aber es kann auch geschehen, und geschieht wirklich häufig, daß $\varphi_n x$ anfangs für einen entsprechenden Werth von n so weit abnimmt, daß der Werth desselben unberücksichtigt bleiben kann und dann für größere Werthe des Index n wieder zunimmt und hierauf immer größer und größer wird. In diesem Falle ist also die Reihe anfangs convergent und wird zuletzt wieder divergent, weßhalb solche Reihen von einigen Schriftstellern auch halbconvergente Reihen genannt werden. Offenbar ist die Substitution einer solchen Reihe für die Function, woraus sie abgeleitet ist, als Annäherungsmittel jedesmal gestattet, wenn man beweisen kann, daß der Rest $\varphi_n x$ für schicklich gewählte Werthe von n vernachlässigt werden kann und der hieraus entspringende Fehler auch in den Resultaten der folgenden Rechnungen nur Fehler verursacht, welche ihrer Kleinheit wegen ebenfalls unberücksichtigt bleiben können.

In den verschiedenen Zweigen der angewandten Mathematik muß man immer mit dieser Strenge verfahren, wodurch die Anwendbarkeit der Reihen sehr beschränkt wird. Selbst wenn man nur mit Reihen operirt, deren Convergenz erwiesen ist, ist es nicht immer möglich, die Grenzen des Fehlers anzugeben, welchen man begeht, wenn man die Reihe bei irgend einem Gliede schließt. Dieses sind die Unvollkommenheiten in der Auflösung der Aufgaben, welche die Geometer wiederholt zu beseitigen gesucht haben, so weit es möglich gewesen ist.

§. 26. Eine Reihe, deren sämmtliche Glieder dasselbe Zeichen haben, bleibt convergent oder divergent, in welcher Ordnung ihre Glieder auch auf einander folgen mögen, und wenn sie convergent ist, so bleibt die Summe oder der Grenzwerth, gegen welchen die Summe der Glieder convergirt, auch immer derselbe. Dagegen kann eine Reihe, deren Glieder sich wegen der Entgegengesetztheit ihrer Zeichen zum Theil gegenseitig aufheben, je nach der Aufeinanderfolge dieser Glieder convergent oder divergent sein, und wenn sie convergent bleibt, so kann sich die Summe mit der Aufeinanderfolge der Glieder ändern.

Wenn eine Reihe:

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \text{etc.},$$

zum Theil aus positiven und zum Theil aus negativen Gliedern besteht und sie ist convergent, wenn alle Glieder mit demselben Zeichen genommen werden, so ist sie auch in ihrer ursprünglichen Gestalt convergent. Denn wenn φ'_n die Summe der positiven Glieder der Reihe y von dem Gliede y'_n an und φ''_n die Summe der negativen Glieder bezeichnet, so hat man:

$$\varphi_n = y_n + y_{n+1} + \text{etc.} = \varphi'_n - \varphi''_n.$$

Für die Reihe, deren ſämmtliche Glieder mit demſelben Zeichen, z. B. mit dem poſitiven Zeichen genommen ſind, hätte man:

$$\varphi_n = \varphi'_n + \varphi''_n,$$

und da dieſe letzte Reihe convergent iſt, ſo muß die Summe $\varphi'_n + \varphi''_n$ für einen ſchicklichen Werth des Index n kleiner werden können, als jede gegebene Größe, und folglich um ſo mehr die Differenz $\varphi'_n - \varphi''_n$, wodurch die Convergenz der Reihe y dargethan iſt.

Eine Reihe iſt convergent, wenn ihre Glieder von einem beſtimmten Range an abwechſelnd poſitiv und negativ ſind und der Zahlenwerth derſelben ohne Ende gegen Null convergirt. Denn es ſei:

$$\varphi_n = y_n - y_{n+1} + y_{n+2} - y_{n+3} + y_{n+4} - \text{etc.}$$

die betrachtete Reihe, ſo kann man dieſelbe folgendermaßen ſchreiben:

$$\varphi_n = y_n - (y_{n+1} - y_{n+2}) - (y_{n+3} - y_{n+4}) - \text{etc.},$$

ſo daß alle zwiſchen den Klammern ſtehenden Binome poſitiv ſind. Es iſt alſo $\varphi_n < y_n$, und da y_n beliebig klein werden kann, ſo gilt daſſelbe um ſo mehr von φ_n.

Wenn alle Glieder der Reihe y von einem gewiſſen Range an daſſelbe Zeichen haben, ſo iſt dieſe Reihe convergent, oder divergent, je nachdem das Verhältniß $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ für zunehmende Werthe von n gegen eine Grenze convergirt, welche größer oder kleiner, als die Einheit iſt.

Denn es bezeichne α eine zwiſchen der Einheit und der in Rede ſtehenden Grenze liegende Zahl, ſo hat man für $\alpha < 1$ und für einen ſchicklichen Werth des Index n:

$$y_{n+1} < \alpha y_n,\ y_{n+2} < \alpha y_{n+1},\ y_{n+3} < \alpha y_{n+2},\ \ldots.$$

und um ſo mehr:

$$y_{n+2} < \alpha^2 y_n,\ y_{n+3} < \alpha^3 y_n,\ \ldots.$$

Es iſt folglich:

$$\varphi_n < y_n (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots.)$$

oder:

$$\varphi_n < \frac{y_n}{1-\alpha};$$

und folglich convergirt φ_n mit y_n zugleich ohne Ende gegen Null.

Für $\alpha > 1$ hätte man:

$$\varphi_n > y_n (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots.),$$

und da der zweite Theil dieſer Ungleichheit offenbar größer werden kann, als jede gegebene Größe, ſo gilt daſſelbe auch von φ_n.

Ebenſo würde bewieſen, daß die Reihe y, deren ſämmtlichen Glieder von einem gewiſſen Range an daſſelbe Zeichen haben, convergent, oder divergent iſt, je nachdem die Wurzelgröße:

$$\sqrt[n]{y_n}$$

gegen eine größere oder kleinere Grenze als die Einheit convergirt für zunehmende Werthe des Index n, wo y_n den Zahlenwerth des Gliedes vom Range n bezeichnet. *)

§. 27. Die Theorie der Reihen bildet einen nicht weniger wichtigen Zweig der allgemeinen Arithmetik oder Algebra wie die Theorie der Gleichungen, welche man in den ſpeciell darüber handelnden Werken ſtudiren muß. Wir betrachten ſie hier nur in ihren Berührungspunkten mit der Theorie der Functionen und ſchließen mit den folgenden Bemerkungen.

*) Mehr hierüber findet man in Cauchy's algebraiſcher Analyſis Kap. 6.

So wie man im Verlaufe einer algebraiſchen Rechnung oft mit imaginären Größen operirt, um kürzer zu den zwiſchen reellen Größen ſtatt findenden Relationen zu gelangen, nachdem ſich die Zeichen der Imaginarität gegenſeitig aufgehoben haben, ebenſo haben ſich die Analyſten lange Zeit hindurch nicht geſcheut, mit divergirenden Reihen zu operiren, um zuletzt zu convergirenden Reihen oder zu Relationen zwiſchen Größen unter endlicher Form zu gelangen; allein man hat ſpäter eingeſehen, daß dieſes Verfahren, welches ſich blos auf die Analogie und auf einen unbeſtimmten Begriff der Allgemeinheit der Algebra gründet, zu Irrthümern führen kann, ſo daß es jetzt nicht mehr als ſtreng betrachtet wird.

Es ſei nun $F(x, \alpha)$ eine Function der Veränderlichen x und eines willkührlichen Parameters α, welche vermittelſt einer Reihe ausgedrückt wird, deren allgemeines Glied $\Psi_n(x, \alpha)$ iſt, und welche wir mit $\Sigma\, \Psi_n(x, \alpha)$ bezeichnen wollen, wo Σ eine Summe von unendlich vielen Gliedern bezeichnet. Wir wollen annehmen, daß dieſe Reihe nur für gewiſſe beſondere Werthe des Parameters α aufhört convergent zu ſein, z. B. für $\alpha = 0$, ſo erhalten wir, wenn wir in der Gleichung:

$$F(x, \alpha) = \Sigma \cdot \Psi_n(x, \alpha),$$

$\alpha = 0$ ſetzen, die ungenaue Gleichung:

$$f(x) = \Sigma \cdot \Psi_n(x),$$

welche keinen beſtimmten Sinn hat, weil nach der Vorausſetzung $\Sigma \cdot \Psi_n(x)$ eine divergente Reihe iſt. Es kann jedoch geſchehen, daß man, wenn man im Laufe gewiſſer Rechnungsoperationen für die Function $F(x, \alpha)$ ihre Reihenentwickelung $\Sigma \cdot \Psi_n(x, \alpha)$ ſetzt, zu Reſultaten gelangt, welche von dem Werthe des Parameters α unabhängig ſind, und zu convergenten Reihen, woraus α verſchwunden iſt. Es iſt klar, daß alsdann die unmittelbare und tranſitoriſche Anwendung der divergirenden Reihe $\Sigma \cdot \Psi_n(x)$ ſtatt der Function $f(x)$ im Laufe derſelben Operationen zu genauen Reſultaten führt.

Drittes Kapitel.

Theorie der abgeleiteten Functionen und der Unterbrechungen der Stetigkeit der verſchiedenen Ordnungen. — Grundbegriffe über die Theorie der Fluxionen.

---

§. 28. Wenn zwei Functionen:

$$y = fx, \quad Y = Fx$$

gegeben ſind, ſo kann man eine dritte Function u betrachten, welche auf irgend eine Weiſe von den Functionen y und Y ſo abhängt, daß

$$u = \varphi(y, Y) = \varphi(fx, Fx)$$

iſt (§. 10), und wir wollen insbeſondere den Fall unterſuchen, wo:

$$\varphi(y, Y) = \frac{y}{Y},$$

oder:

$$u = \frac{fx}{Fx}$$

iſt.

Um ſogleich die allgemeinſte Vorausſetzung zu machen, kann man annehmen, daß die mathematiſchen oder empiriſchen Functionen f, F die Ordinaten

zweier wirklich gezeichneten Curven ausdrücken, vermittelst welcher man die Curve beschreiben soll, deren Ordinate u ist. Es seien M N, P Q, R S (Fig. 10) die Curven deren resp. Ordinaten y, Y und u sind. Die Operation würde keine Schwierigkeiten haben, so lange die derselben Abscisse x entsprechenden Ordinaten y, Y endliche, positive oder negative und von Null verschiedene Werthe haben.

Wenn die Ordinate y Null würde, während Y einen endlichen Werth behielte, so würde die Ordinate u auch verschwinden. Folglich schneiden die Curven M N, R S die Axe der Abscissen in demselben Punkte A.

Wenn die Ordinate Y verschwände, ohne daß y Null würde, so würde die Function u eine Unterbrechung der Stetigkeit erfahren, indem sie durch das Unendliche ginge. Durch den Punkt B, wo die Curve P Q die Axe der Abscissen schneidet, wollen wir zu den Ordinaten eine gerade Linie G K parallel ziehen, so ist dieselbe eine gemeinschaftliche Asymptote der beiden Zweige R S, R′ S′ der Curve, deren Ordinate u ist.

Wir wollen nun annehmen, daß die beiden Functionen f x, F x zu gleicher Zeit verschwinden, oder daß die beiden Curven M N, P Q (Fig. 11) die Axe der Abscissen in demselben Punkte A schneiden; so erscheint der Ausdruck von u unter der Form $\frac{0}{0}$, welche in der Algebra das Symbol der Unbestimmtheit ist, und man kann die der Abscisse O A entsprechende Ordinate A K der Curve R S nicht direct berechnen, obgleich die Curve R S die durch den Punkt A zu den Ordinaten parallel gezogene gerade Linie A K L nothwendig schneidet, wofern sie diese gerade Linie nicht zur Asymptote hat, welchen besonderen Fall wir hier zunächst bei Seite setzen können. Die Ordinate A K hat folglich einen bestimmten Werth, und wenn man auf der Abscissenaxe die dem Punkte A immer näher kommenden Punkte a′, a″ nimmt, so kann man auf der Curve R S Punkte K′, K″ bestimmen, welche sich dem Punkte K immer mehr nähern und deren Ordinaten a′ K′, a″ K″ immer weniger von A K verschieden sind. Man sieht also nicht blos, daß es einen bestimmten Werth von A K gibt, sondern, daß man denselben auch mit einer beliebigen Annäherung bestimmen kann.

In der Praxis würde diese Annäherung wegen der Unvollkommenheit der graphischen Verfahrungsarten beschränkt sein, wenn die Functionen f, F nur durch die Zeichnung der Curven M N, P Q gegeben wären, und um so mehr, wenn sie nur durch Tafeln gegeben wären, worin nur eine begrenzte Anzahl von Werthen der unabhängigen Veränderlichen und ihrer Functionen vorkommen. Allein bei mathematischen Functionen sieht man die Möglichkeit leicht ein, die Grenze, gegen welche das Verhältniß $\frac{f x}{F x}$ convergirt, wenn die beiden Glieder desselben ohne Ende gegen Null convergiren, a priori zu bestimmen. Wir werden in der Folge allgemeine Methoden zur Bestimmung dieser Grenze mittheilen, aber für den Augenblick genügt es, ihre Existenz nicht blos für mathematische, sondern für beliebige stetige Functionen nachgewiesen zu haben.

Diese Grenze könnte sowohl Null, als jeden anderen positiven, oder negativen Zahlenwerth haben, oder mit andern Worten: es ist nicht unmöglich, daß die Curve R S die Axe der Abscissen genau im Punkte A schneidet, welcher der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dieser Axe mit den beiden Curven M N, P Q ist. Auch haben wir schon bemerkt, daß in einem besonderen Falle die gerade Linie A K L eine Asymptote der Curve R S sein könnte, in welchem Falle die fragliche Grenze das positive oder negative Unendliche zum Werthe hat, wodurch keine Beschränkung des Gesagten entstehen kann; denn man

pflegt in der Mathematik Null und das Unendliche als zwei besondere Werthe zu betrachten, welche, eben sowohl wie jeder andere Werth, den veränderlichen Größen und folglich auch den Grenzen, gegen welche diese Größen convergiren, beigelegt werden können.

§. 29. Betrachten wir nun insbesondere den Fall, wo:

$$Y = Fx = x, \quad u = \frac{fx}{x}$$

gesetzt wird, und nehmen an, daß die Curve $y = fx$ durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, so daß man zu gleicher Zeit $x = 0$, $fx = 0$ hat. Es sei M N (Fig. 12) diese Curve, und wir wollen in dem Punkte O die Tangente O T an dieselbe ziehen; so ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die gerade Linie O T mit der Halbare O X bildet, genau die Grenze, deren Existenz wir vorhin nachgewiesen haben und gegen welche das Verhältniß $\frac{fx}{x}$ convergirt, wenn x und fx immer kleiner werdende Zahlenwerthe annehmen. Denn die Tangente einer beliebigen Curve ist die gerade Linie, von welcher sich die Curve in der unmittelbaren Nähe des Berührungspunktes weniger entfernt, als von jeder andern durch denselben Punkt gezogenen geraden Linie; d. h. die Tangente ist diejenige gerade Linie, welcher sich eine durch den Berührungspunkt gezogene Secante bei ihrer Drehung um diesen Punkt ohne Ende nähert, wobei sich der zweite Durchschnittspunkt der Secante mit der Curve dem ersten ohne Ende nähert, weil man, wie nahe der Punkt m dem Punkt O auch sein mag, doch immer einen zwischen m und O liegenden Punkt μ angeben kann, dessen Entfernung von der durch den Punkt O gehenden Secante O m größer ist, als seine Entfernung von den Secanten, welche durch den Punkt O und durch zwischen m und μ liegende Punkte gehen. Die in der ersten Definition ausgesprochene Eigenschaft kommt also keiner der Secanten, sondern ausschließlich der geraden Linie zu, welcher sich diese Secanten ohne Ende nähern, wenn sich die Punkte m und O einander ohne Ende nähern.

Nun ist aber in einem Systeme rechtwinkliger Coordinaten:

$$\frac{y}{x} = \frac{fx}{x} = \frac{mp}{Op}$$

die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die durch den Punkt, dessen Abscisse $Op = x$ ist, gezogene Secante O m mit der Abscissenaxe bildet. Folglich ist die trigonometrische Tangente des Winkels T O X, welchen die geometrische Tangente O T mit der Abscissenaxe bildet, die Grenze des Verhältnisses $\frac{fx}{x}$.

Nehmen wir nun an, daß die Curve M N (Fig. 13), deren Gleichung wieder $y = fx$ ist, in der Ebene der Coordinaten eine beliebige Lage hat, und es seien m, m_1 zwei Punkte dieser Curve, deren resp. Abscissen $Op = x$, $Op_1 = x_1$ sind; so ist nach dem Vorhergehenden die Grenze, gegen welche das Verhältniß:

$$\frac{fx_1 - fx}{x_1 - x}$$

convergirt, wenn die beiden Glieder desselben gleichzeitig gegen Null convergiren, der Werth der trigonometrischen Tangente des Winkels m T X, welchen die Tangente m T im Punkte m der Curve mit der Abscissenaxe auf der Seite der positiven x bildet. Diese Grenze ändert sich im Allgemeinen von einem Punkte der Curve M N zum andern, d. h. sie ist eine Function von x, welche von fx so abhängt, daß letztere die erste ebenso bestimmt, wie der Zug

einer Curve die Richtung der Tangente in jedem Punkte derſelben beſtimmt. Da dieſe Art der Abhängigkeit oder Ableitung ohne Vergleich wichtiger iſt, als jede andere, ſo nennt Lagrange die fragliche Function die Ableitung von f x und bezeichnet ſie durch:

$$y' \text{ oder } f'x,$$

wodurch die Abhängigkeit der Function y' von y oder f' x von f x angedeutet werden ſoll.

Wir wollen uns die Curve M' N' (Fig. 14), deren Gleichung $y' = f'x$ iſt, gezeichnet denken; ſo iſt die trigonometriſche Tangente des Winkels, welchen die geometriſche Tangente in einem Punkte dieſer Curve mit der Axe der x bildet, eine andere Function von x, welche ebenſo aus f' x abgeleitet wird, wie f' x von f x abgeleitet iſt. Man nennt daher dieſe Function die Ableitung der zweiten Ordnung oder die zweite Ableitung von f x und bezeichnet ſie nach der Analogie durch:

$$y'', \quad f''x.$$

Ebenſo werden die Ableitungen der dritten, vierten, ... n^{ten} Ordnung gebildet, deren Relationen zu der urſprünglichen Function $y = f x$ und zu allen frühern Ableitungen ſehr einfach durch die Bezeichnungen:

$$y''', \; y^{IV}, \; \ldots\ldots\ldots \; y^{(n)};$$

oder

$$f'''x, \; f^{IV}x, \; \ldots\ldots\ldots \; f^{(n)}x.$$

ausgedrückt werden.

§. 30. Wenn die Ableitung f' x poſitiv iſt, oder wenn die Tangente der Curve $y = f x$ mit der Axe der Abſciſſen x auf der Seite der poſitiven x einen ſpitzen Winkel bildet, ſo nimmt die urſprüngliche Function y offenbar mit x zu, wogegen die Function y für wachſende Werthe von x abnimmt, wenn dieſe Werthe von x die Ableitung f' x negativ machen. Wir können dieſes auch einfacher dadurch ausdrücken, daß wir ſagen: die Veränderungen der Function y haben daſſelbe oder das entgegengeſetzte Zeichen der Veränderungen der unabhängig veränderlichen Größe x, je nachdem die Ableitung f' x poſitiv oder negativ iſt, und alsdann betrachten wir die Zunahme als eine poſitive und die Abnahme als eine negative Veränderung. Statt der Ausdrücke, Zunahme und Abnahme, oder überhaupt Veränderung, bedienen ſich die Analyſten auch wohl der Ausdrücke Increment und Decrement, oder auch wohl des Ausdruckes Differenz, wo letztere poſitiv oder negativ ſein kann.

Wenn die Ableitung f' x verſchwindet, indem ſie vom Poſitiven zum Negativen übergeht, ſo geht die urſprüngliche Function f x durch ein Maximum (§. 6), wogegen dieſe urſprüngliche Function durch ein Minimum geht, wenn die Ableitung Null wird, indem ſie vom Negativen zum Poſitiven übergeht. Hieraus ſieht man ſchon, wie die Beſtimmung der Werthe der unabhängig veränderlichen Größe, für welche eine Function durch ein Maximum oder Minimum geht, auf die Beſtimmung der Werthe hinausläuft, welche ihre Ableitung verſchwinden machen, von welcher wichtigen Unterſuchung ſpäter umſtändlich die Rede ſein wird. Wenn die abgeleitete Function, oder die Ableitung ſchlechthin, das Zeichen verändern könnte, indem ſie nicht mehr durch Null, ſondern durch das Unendliche ginge, ſo erhielte man die merkwürdigen Maxima und Minima, wovon in dem angeführten Paragraph ebenfalls die Rede geweſen iſt.

Das Zeichen der Ableitung f' x lehrt uns nicht blos, ob die urſprüngliche Function f x mit wachſenden Werthen von x zu- oder abnimmt, ſondern der abſolute Werth dieſer Ableitung f' x iſt auch das Maß der Schnelligkeit der Zu- oder Abnahme der urſprünglichen Function f x. Obgleich der Ausdruck Schnelligkeit in ſeiner eigentlichen Bedeutung nur auf Bewegungserſcheinungen anwendbar iſt, ſo wird doch jeder leicht die dieſem Ausdrucke

hier beigelegte ausgedehntere Bedeutung begreifen. Denn wenn man z. B. ſagte: die Temperatur der Atmoſphäre ändere ſich an der Erdoberfläche ſchneller, als in hohen Regionen, ſo würde jeder den Sinn dieſes Ausdruckes deutlich einſehen, obgleich in dem auszudrückenden Begriffe oder Sinne, weder die Idee der Bewegung, noch die der Zeit vorkommt. Uebrigens läßt ſich der Begriff, welchen man ſich von der Schnelligkeit einer Veränderung der Function macht, auch mathematiſch beſtimmen oder definiren. Wenn zunächſt die Ableitung $f'x$ eine conſtante Größe wäre, was offenbar vorausſetzt, daß fx eine lineare Function von der Form $ax + b$ iſt; ſo würde ſich fx gleichförmig mit x ändern, ſo daß gleichen Veränderungen von x auch gleiche Veränderungen von fx entſprächen, welche daſſelbe oder das entgegengeſetzte Zeichen der Veränderungen von x hätten, je nachdem a poſitiv oder negativ wäre. In dieſem Falle iſt die Ableitung $f'x$ nichts anders, als die Conſtante a, oder als die trigonometriſche Tangente des Winkels, welchen die gerade Linie $y = ax + b$ mit der Axe der poſitiven x bildet, und da die gleichen Veränderungen von fx der Zahl a proportional ſind; ſo iſt dieſe Zahl offenbar das Maß der Schnelligkeit, mit welcher ſich die Function fx in Vergleich zu der gleichförmigen Veränderung der unabhängig veränderlichen Größe x ändert. Wenn $y = fx$ keine lineare Function iſt, oder nicht die Ordinate einer geraden Linie mehr ausdrückt, ſo entſprechen gleichen Veränderungen von x keine gleichen Veränderungen von y mehr. Geſetzt nun, man nähme auf der Curve M N (Fig. 15), deren Gleichung $y = fx$ iſt, einander ſehr nahe liegende Punkte m, m_1, m_2, m_3, ... und ſubſtituirte einſtweilen für die Curve M N das Polygon $m\,m_1\,m_2\,m_3$ ...., ſo ändert ſich die Ordinate auf den verſchiedenen Seiten dieſes Polygones mit verſchiedenen Schnelligkeiten, und nach dem Vorhergehenden muß man in einem Punkte m für die Schnelligkeit der Veränderung die trigonometriſche Tangente des Winkels $m_1\,m\,x$ nehmen, welchen die Secante $m_1\,m$, auf der Seite der poſitiven Abſciſſen mit der Abſciſſenaxe oder mit einer Parallele zu derſelben bildet. Nun iſt aber die Curve M N die Grenze, welcher ſich die Polygonallinie ohne Ende nähert, wenn ſich die Punkte .... m, m_1, m_2, m_3, ... einander ohne Ende nähern. Folglich iſt die Ableitung $f'x$ = tang. $T\,m\,x$, als die Grenze, welcher ſich tang. $m_1\,m\,x$ ohne Ende nähert, das Maß der Schnelligkeit der Veränderung der der Abſciſſe x entſprechenden Ordinate fx; aber immer in Vergleich zu der Schnelligkeit, mit welcher ſich die unabhängige Veränderliche x gleichförmig ändert.

Wir wollen der Einfachheit wegen den willkührlichen Anfangspunkt der Größe y ſo wählen, daß y in dem ganzen betrachteten Theile der Curve $y = fx$ poſitiv bleibt. Dieſe Curve M N kehrt der Abſciſſenaxe ihre Converität (Fig. 16), oder ihrer Concavität (Fig. 17) zu, je nachdem die abgeleitete Function $f'x$ zu- oder abnimmt, oder je nachdem $f''x$ poſitiv oder negativ iſt, und es findet eine Umkehrung in dem Sinne der Krümmung oder eine Inflexion der Curve ſtatt (Fig. 18), wenn $f''x$ das Zeichen verändert, in welchem Falle die erſte Ableitung $f'x$ im Allgemeinen durch ein Maximum oder Minimum geht. Der Winkel, welchen die Tangente $m\,T$ (Fig. 18) auf der Seite der poſitiven x mit der Abſciſſenaxe bildet, nimmt alſo, nachdem er von M bis zu dem Punkte m, worin die Curve M N eine Inflexion erfährt, zugenommen hat, von m bis N ab.

§. 31. Wenn die abgeleitete Function $f'x$ gegeben wird, ſo iſt dadurch allein die urſprüngliche Function fx nicht ebenſo vollſtändig beſtimmt, wie die erſte Ableitung und folglich die Ableitungen aller Ordnungen, wenn die urſprüngliche Function fx gegeben iſt. In der That, wenn man ſich vorſtellt, daß die Curve M N (Fig. 19), deren Gleichung $y = fx$ iſt, ſucceſſive in

die Lagen $M_1 N_1$ $M_2 N_2$ etc. gebracht wird, ſo daß alle Ordinaten der Curve M N um eine conſtante Länge vergrößert werden; ſo ſind die Tangenten $m T_1$, $m_1 T_1$, $m_2 T_2$, etc. alle zu einander parallel, und folglich iſt die Ableitung $y' = f' x$ allen Curven gemeinſchaftlich, deren Gleichung $y = f x + C$ iſt, wo C irgend eine Conſtante bezeichnet, welche man deßhalb eine willkührliche Conſtante nennt. Es ſei alſo y eine unbekannte Function von x, welche eine bekannte Function $y' = f' x$ zur erſten Ableitung haben muß, und $f x$ ſei eine Function, welche $f' x$ zur Ableitung hat, ſo muß man

$$y = f x + C$$

ſetzen, und die willkührliche Conſtante C durch eine andere Bedingung, z. B. durch die Bedingung, daß die Curve M N durch einen gegebenen Punkt (x_0, y_0) geht, oder daß die Function y für einen mit x_0 bezeichneten Werth von x einen beſtimmten Werth y_0 hat, beſtimmen. Nach dieſer Bedingung hat man:

$$y_0 = f x_0 + C$$

und folglich die Gleichung:

$$y - y_0 = f x - f x_0,$$

woraus die willkührliche Conſtante C eliminirt iſt, und worin nur bekannte Größen vorkommen.

§. 32. Die Ableitungen einer periodiſchen Function ſind ſämmtlich wieder periodiſche Functionen. Die Ableitungen von ungerader Ordnung einer geraden Function ſind ſämmtlich ungerade Functionen, während die Ableitungen von gerader Ordnung alle gerade Functionen ſind, und für die ungeraden urſprünglichen Functionen findet das Umgekehrte ſtatt. Die Wahrheit dieſer verſchiedenen Sätze erhellet unmittelbar aus der bloßen Betrachtung der den Functionen entſprechenden Curven und dieſe Sätze ſind auf beliebige mathematiſche oder empiriſche Functionen anwendbar.

§. 33. So wie wir den Uebergang von der urſprünglichen Function zu ihrer Ableitung geometriſch definirt haben, ebenſo können wir die geometriſche Bedeutung der Operation angeben, vermöge welcher man von der abgeleiteten Function zu der entſprechenden urſprünglichen Function übergeht. Denn es ſei M' N' (Fig. 20) die Curve, deren Gleichung:

$$y' = f' x$$

iſt, und wir wollen die trapezoidiſche Fläche zu beſtimmen ſuchen, welche zwiſchen der Abſciſſenaxe, der Curve M' N' und zwei Ordinaten $m_0 p_0$, $m p$ liegt, wovon die eine der beſtimmten Abſciſſe $O p_0 = x_0$ und die andere der veränderlichen Abſciſſe $O p = x$ entſpricht. Dieſe Fläche iſt eine Function der Veränderlichen x, welche wir vorläufig mit φx bezeichnen wollen. Wenn x wächſt und den Werth $O p_1 = x_1$ annimmt, ſo nimmt die Fläche um das krummlinige Trapez $m p p_1 m_1$ zu, und man hat:

$$\frac{\varphi x_1 - \varphi x}{x_1 - x} = \frac{\text{Fläche } m p p_1 m_1}{p p_1},$$

ſo daß die Ableitung der Function φ die Grenze iſt, gegen welche das Verhältniß des krummlinigen Trapezes $m p p_1 m_1$ zu ſeiner Seite $p p_1$ convergirt, wenn $p p_1$ ohne Ende gegen Null convergirt. Aber die Fläche dieſes Trapezes liegt zwiſchen der Fläche des Rechteckes $m p p_1 n_1$ und der des Rechteckes $p n m_1 p_1$, und das Verhältniß der Flächen dieſer beiden Rechtecke, nämlich:

$$\frac{m p}{m_1 p_1}$$

convergirt ohne Ende gegen die Einheit, wenn $p p_1$ ohne Ende gegen Null convergirt. Folglich convergirt auch das Verhältniß der Fläche eines dieſer

Rechtecke zu der des zwiſchen liegenden Trapezes ohne Ende gegen die Einheit und man kann ſetzen:

$$\text{Grenze} \cdot \frac{\text{Fläche } m\,p\,p_{,}\,m_{,}}{p\,p_{,}} = \frac{m\,p \times p\,p_{,}}{p\,p_{,}} = m\,p = f'x.$$

Die vorläufig mit φx bezeichnete Function hat alſo $f'x$ zur Ableitung und iſt folglich eine der urſprünglichen Functionen von $f'x$, welche in der Formel $fx + C$ enthalten ſind, wo C eine willkührliche Conſtante bezeichnet, und da ſie für $x = x_0$ verſchwinden muß, weil die Flächen von der feſten Ordinate $m_0\,p_0$ ausgemeſſen werden; ſo folgt, daß dieſe Function vollſtändig beſtimmt und gleich $fx - fx_0$ iſt. Aus dieſem Grunde bezeichnet man jede Operation, durch welche eine Function beſtimmt wird, die eine gegebene Function zur Ableitung hat und für einen beſondern Werth der veränderlichen Größe, wovon ſie abhängt, einen beſtimmten Zahlenwerth annimmt, mit dem Namen Quadratur.

Wenn man das Intervall $p_0\,p$ (Fig. 21) in n gleiche Theile theilt und die gleichweit von einander abſtehenden Ordinaten $m_{,}\,p_{,}$, $m_{,,}\,p_{,,}$, etc. zieht, ſo hat man, wenn ω, $\omega_{,}$, ... die Flächen der Rechtecke $p_0\,p_{,}\,m_{,}\,r_{0,}$ $p_{,}\,p_{,,}\,m''\,r_{,,}$ .... und ε das conſtante Intervall $p_0\,p_{,} = \frac{p_0\,p}{n}$ bezeichnet:

$$m_{,}\,p_{,} = \frac{\omega}{\varepsilon},\quad m_{,,}\,p_{,,} = \frac{\omega_{,}}{\varepsilon},\quad \text{etc.}$$

$$\frac{m_{,}\,p_{,} + m_{,,}\,p_{,,} + \text{etc.}}{n} = \frac{\omega + \omega_{,} + \text{etc.}}{n\,\varepsilon};$$

d. h. das arithmetiſche Mittel aus den Ordinaten $m_{,}\,p'$, $m_{,,}\,p_{,,}$, etc. iſt gleich der Summe der Flächen ω, $\omega_{,}$, etc. dividirt durch die Linie $p_0\,p = x - x_0$. Aber wenn die Zahl n immer größer und größer wird, ſo nimmt das Intervall ε im umgekehrten Verhältniſſe ab, damit das Product $n\,\varepsilon$ conſtant bleibt, und die Summe der Flächen ω, $\omega_{,}$, etc. convergirt ohne Ende gegen eine Grenze, welche die trapezoidiſche Fläche $m_0\,p_0\,p\,m$ iſt. Folglich drückt das Verhältniß dieſer Fläche zu dem Intervalle $p_0\,p_{,}$ oder vielmehr das Verhältniß:

$$\frac{fx - fx_0}{x - x_0}$$

das Mittel aus allen den unendlich vielen Werthen aus, welche die abgeleitete Function für die zwiſchen x_0 und x liegenden ebenfalls unendlich vielen Werthe der unabhängigen Veränderlichen annimmt.

Der Allgemeinheit dieſer Regel und aller ſich an die Theorie der Quadraturen anſchließenden Regeln wegen muß man die Flächen $q\,s\,s'\,q'$, welche von negativen Ordinaten begrenzt werden, als negativ betrachten.

§. 34. Aus dem Vorhergehenden erhellet leicht, daß wenn eine Function y durch die Bedingung gegeben wäre, eine bekannte Function:

$$y^{(n)} = f^{(n)}x, \qquad (a_n)$$

zur Ableitung der n^{ten} Ordnung zu haben, zur vollſtändigen Beſtimmung dieſer Function y unmittelbar oder mittelbar die Werthe:

$$y_0,\ y'_0,\ y''_0,\ \ldots\ y_0^{(n-1)}$$

welche die Functionen:

$$y,\ y',\ y'',\ \ldots\ y^{(n-1)}$$

für einen beſtimmten Werth x_0 von x außerdem noch gegeben ſein müßten. Denn es ſei $M^{(n)}\,N^{(n)}$ (Fig. 22) die durch die Gleichung (a_n) gegebene Curve, ſo beſtimmt der Zug dieſer Curve die trapezoidiſche Fläche $m_0\,p_0\,p\,m$

als Function der veränderlichen Abſciſſe $O p = x$, und folglich die Curve deren Gleichung folgende iſt:

$$y^{(n-1)} = f^{(n-1)} x, \quad (a_{n-1})$$

wofern $f^{(n-1)} x_0$ oder der Werth von $y^{(n-1)}$ für $x = x_0$ gegeben iſt. Wenn die Curve (a_{n-1}) gezeichnet wird, ſo beſtimmt ſie aus demſelben Grunde die Curve, deren Gleichung

$$y^{(n-2)} = f^{(n-2)} x$$

iſt, wofern die Ordinate $f^{(n-2)} x_0$ gegeben iſt u. ſ. f.

§. 35. In dem Vorhergehenden iſt ſtillſchweigend vorausgeſetzt, daß die Ordinate $f' x$ zwiſchen den Grenzen der Quadratur nicht unendlich wird; allein es könnte doch geſchehen, daß die vorhergehenden Schlüſſe und Conſtructionen auch ſelbſt dann noch anwendbar wären, wenn die abgeleitete Function $f' x$ zwiſchen den Grenzen der Quadratur einen unendlichen Werth annähme. Denn es ſei:

$$y = f x$$

die Gleichung einer Curve M R N (Fig. 23), welche in R einen Rückkehrpunkt hat (§. 6), ſo iſt die Ordinate P R eine gemeinſchaftliche Tangente der beiden Curvenzweige M R, R N und die Curve $M' N'$, deren Ordinate $f' x$ iſt, hat die durch den Punkt P', deſſen Abſciſſe $O P' = O P$ iſt, zu $O Y'$ gezogene Parallele $P' R'$ zur Aſymptote. In dieſem Falle folgt aus der Definition der Curve $M' N'$, daß die zwiſchen einer feſten Ordinate $m'_0 p'_0$, der Aſymptote $P' R'$, der Axe der x und der Curve $M' N'$ liegende Fläche einen endlichen Zahlenwerth hat, welcher der Differenz der Ordinaten P R, $p_0 m_0$ gleich iſt, oder mit andern Worten, es convergirt in einem ſolchen Falle die trapezoidiſche Fläche $m'_0 p'_0 p' m'$ gegen den endlichen Werth P R — $m'_0 p'_0$, wenn ſich der Punkt p' dem Punkte P' immer mehr und mehr nähert, und alsdann hindert nichts, die Ordinate der Curve M R N dieſſeits und jenſeits der Ordinate P R, als durch eine Quadratur beſtimmt anzuſehen. Dieſelbe Bemerkung iſt auch auf die Curve M R N (Fig. 24) anwendbar, welche im Punkte R von der Ordinate P R berührt wird und in dieſem Punkte eine Inflexion erfährt.

Wenn dagegen die einerſeits von der Ordinate $m'_0 p'_0$ (Fig. 23) und andererſeits von der Aſymptote $P' R'$ begrenzte Fläche unendlich wäre, oder wenn die trapezoidiſche Fläche $m'_0 p'_0 p' m'$ gegen das Unendliche convergirte, wenn ſich der Punkt p' dem Punkte P ohne Ende nähert; ſo wäre die Ordinate P R auch eine Aſymptote der Curve M, welche eine Unterbrechung der Stetigkeit erfahren würde, und man könnte nicht mehr durch die Fortſetzung derſelben Quadratur von dem Zweige M zu dem Zweige N übergehen.

Aus dieſen Bemerkungen folgt, daß, wenn eine Function eine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt, indem ſie durch das Unendliche geht, ſo erfahren ihre Ableitungen von allen Ordnungen dieſelbe Unterbrechung der Stetigkeit; allein das Umgekehrte findet nicht ſtatt, weil eine abgeleitete Function unendlich werden kann, ohne daß die ihr entſprechende urſprüngliche Function für denſelben Werth der unabhängigen Veränderlichen unendlich wird.

§. 36. Wenn irgend eine Function $y = f x$ durch die Ordinate der Curve M R N (Fig. 25) dargeſtellt wird, ſo kann dieſe Curve ſtetig ſein; d. h. die Ordinate derſelben endlich bleiben, ohne plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern überzugehen, und im Punkte R ein ſogenanntes Knie (einen Knick) haben, d. h. die Neigung der Tangente ändert ſich in dieſem Punkte plötzlich, ſo daß die Tangente mit einem Male aus der Richtung T' R T in die Richtung S R S' übergeht, und dann ihre Richtung von R bis N wieder ſtetig ändert, wie zuvor von M bis R. Wir werden in einem ſolchen Falle ſagen, daß die Curve M R N in R einen vorſpringenden Punkt hat.

Die Curve, deren Ordinate $y' = f' x$ ist, bietet alsdann eine Zerreißung dar und diese abgeleitete Function selbst erfährt eine Unterbrechung der Stetigkeit, welche davon herrührt, daß sie für den Werth von x, welcher die Abscisse des vorspringenden Punktes der Curve $y = f x$ ist, plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem anderen endlichen Werthe übergeht. Die Ableitungen der höhern Ordnungen erfahren im Allgemeinen für denselben Werth von x eine Unterbrechung der Stetigkeit, welche in dem plötzlichen Uebergange von einem endlichen Werthe zu einem andern besteht.

In diesem Falle, so wie in dem Falle, wo $f' x$ unendlich wird, indem $f x$ endlich bleibt, wollen wir sagen, daß die Ableitung $f' x$ und alle folgenden Ableitungen eine Unterbrechung der Stetigkeit von der ersten Ordnung erfahren und daß die ursprüngliche Function $f x$ eine Unterbrechung der Stetigkeit von der zweiten Ordnung erfährt.

Die Function $f' x$ könnte selbst nur eine Unterbrechung der Stetigkeit zweiter Ordnung erfahren, indem die der zweiten Ableitung $f'' x$ und der folgenden Ableitungen von der ersten Ordnung ist, und alsdann werden wir sagen, daß die ursprüngliche Function $f x$ eine Stetigkeitsunterbrechung der dritten Ordnung erfährt. Allgemein, man sagt, daß eine Function eine Stetigkeitsunterbrechung der n^{ten} Ordnung erfährt, wenn ihre Ableitung von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, und folglich die Ableitungen der höhern Ordnungen eine Stetigkeitsunterbrechung von der ersten Ordnung erfahren, welche davon herrührt, daß diese Functionen durch das Unendliche, oder plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem anderen endlichen Werthe übergehen.

§. 37. Die Unterscheidung der Stetigkeitsunterbrechungen der verschiedenen Ordnungen, wie wir sie eben angegeben haben, ist in der Theorie der Functionen von der höchsten Wichtigkeit, man mag sie auf die Algebra, auf die Geometrie, oder auf Aufgaben der mathematischen Physik anwenden. Bis auf die gegenwärtige Zeit verstanden die Analysten unter discontinuirlichen Functionen solche, welche in den verschiedenen Theilen ihres Verlaufes durch verschiedene algebraische Formeln ausgedrückt werden. In der That wird später bewiesen werden, daß jede Function y, welche der algebraischen Function $f x$ für kleinere Werthe von x, als x_0 und der ebenfalls algebraischen Function $f_1 x$ für größere Werthe von x, als x_0 gleich ist, für die Abscisse $x = x_0$ eine Stetigkeitsunterbrechung von einer bestimmten Ordnung erfährt, oder daß diese Functionen, wofern sie nicht identisch sind, der ins Unendliche fortlaufenden Reihe von Gleichungen:

$$f x_0 = f_1 x_0, \quad f' x_0 = f'_1 x_0, \quad f'' x_0 = f''_1 x_0, \quad \text{etc.}$$

nicht genügen können, so daß, wenn:

$$f^{(n)} x_0 = f_1^{(n)} x_0$$

die letzte der Gleichungen dieser Reihe ist, welcher man genügen kann, die Function y für die Abscisse x_0 eine Stetigkeitsunterbrechung von der Ordnung $n + 2$ erfährt.

Dieser Satz würde nicht mehr stattfinden, wenn die Functionen $f x$, $f_1 x$ keine entwickelten oder unentwickelten algebraischen Functionen wären, und wir werden in der That an Beispielen sehen, daß eine Function in verschiedenen Theilen ihres Laufes transcendente Ausdrücke von wesentlich verschiedenen Formen bekommen kann, ohne daß bei dem Uebergange von der einen Form zu der anderen eine Unterbrechung der Stetigkeit von irgend einer Ordnung stattfindet. Auch werden wir sehen, daß derselbe transcendente Ausdruck für Werthe von $x < x_0$ einer gewissen algebraischen Function $f x$ und für Werthe von $x > x_0$ einer anderen, von der ersten verschiedenen algebraischen Function $f_1 x$ gleich werden kann. So kann z. B. eine convergente Reihe, welche ein transcendenter Ausdruck ist, successive verschiedene algebraische Functionen $f x$ und $f_1 x$

nungen ſpielen müſſen. Newton hat auf dieſe Weiſe die Theorie der Functionen auf einen Begriff zu gründen geſucht, welchen der Geiſt direct faſſen kann, ohne durch die Betrachtung der Grenzen zu gehen und ohne einen Weg einzuſchlagen, welcher bis zu einem gewiſſen Punkte unnatürlich und indirect iſt. Er verſtand die Stetigkeit in der Veränderung der Größen vermittelſt der bekannteſten Erſcheinungen, wo dieſe Stetigkeit in die Sinne fällt, direct auszudrücken. Auch hat man nach Dalembert den Einwurf gemacht, daß man zur Definition einer beſtändig veränderlichen Geſchwindigkeit ſich immer der Betrachtung der Grenzen bedienen müſſe; allein man hat bei dieſem Einwurfe die Schärfe der Begriffe irrigerweiſe ihrer logiſchen Definition untergeordnet. Denn ein Begriff exiſtirt in dem Verſtande unabhängig von der Definition, welche man davon gibt, und oft läßt ſich von dem einfachſten Verſtandesbegriffe nur eine complicirte, oder gar keine Definition geben. Jedermann hat einen unmittelbaren und genauen Begriff von der Aehnlichkeit zweier Körper, obgleich nur wenige die complicirten Definitionen verſtehen können, welche die Geometrie von der Aehnlichkeit gegeben hat. Die weitere Verfolgung dieſes Gegenſtandes würde uns in die Theorie der Erzeugung der Begriffe führen und uns zu weit von unſerem Hauptzwecke entfernen.

Viertes Kapitel.

Von den Differenzen und den Annäherungen der verſchiedenen Ordnungen. — Theorie der unendlich kleinen Größen und Principien der Infinitesimalrechnung.

§. 43. Wir wollen uns zwei veränderliche Größen x, y denken, wovon die eine eine Function der andern iſt, und welche die beiden Reihen correſpondirender Werthe:

$$x,\ x_1,\ x_2,\ x_3.\ x_4,\ \ldots\ldots$$
$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots\ldots$$

durchlaufen. Zwiſchen je zwei auf einander folgenden Gliedern jeder dieſer Reihen wollen wir die Differenz beſtimmen und mit Δ andeuten, indem wir z. B. $x_1 - x = \Delta x$, $y_1 - y = \Delta y$, u. ſ. f. ſetzen, ſo daß der Buchſtabe Δ nur ein Zeichen und keine Größe iſt; ſo erhalten wir die beiden Reihen correſpondirender Werthe:

$$\Delta x,\ \Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \Delta x_3,\ \ldots\ldots$$
$$\Delta y,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \Delta y_3,\ \ldots\ldots$$

Mit dieſen letzten Reihen wollen wir wie mit den urſprünglichen verfahren, d. h. zwiſchen jedem Gliede und dem folgenden die Differenz nehmen und nach der Analogie, z. B. die Differenz $\Delta x_1 - \Delta x$ mit $\Delta \cdot \Delta x$ oder mit $\Delta^2 x$ bezeichnen, u. ſ. f.; ſo erhalten wir die beiden neuen Reihen:

$$\Delta^2 x,\ \Delta^2 x_1,\ \Delta^2 x_2,\ \ldots\ldots$$
$$\Delta^2 y,\ \Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2,\ \ldots\ldots$$

worin die Glieder $\Delta^2 x$, $\Delta^2 y$, ... Differenzen von Differenzen oder Differenzen der zweiten Ordnung in Beziehung auf die Glieder x, y, welche ihnen in den urſprünglichen Reihen entſprechen, ausdrücken. Ebenſo würden die Reihen mit den Differenzen der dritten, der vierten, ... Ordnung gebildet.

Dieſen Bezeichnungen zufolge hat man offenbar:

$$x_1 = x + \Delta x$$
$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = x + \Delta x + \Delta(x + \Delta x) = x + 2\Delta x + \Delta^2 x,$$
$$x_3 = x_2 + \Delta x_2 = x + 2\Delta x + \Delta^2 x + \Delta(x + 2\Delta x + \Delta^2 x$$
$$= x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x$$

. . . . . .

und nach einer offenbaren Induction (welche man übrigens auch leicht durch die sogenannte Käſtner'ſche Beweismethode beſtätigen könnte):

$$x_n = x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 x + \ldots + \Delta^n x.$$

Ebenſo hat man:

$$y_n = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y + \ldots + \Delta^n y.$$

Dieſe letzten Formeln können folgendermaßen ſymboliſch ausgedrückt werden;

$$x_n = (1 + \Delta)^n x, \quad y_n = (1 + \Delta)^n y,$$

wofern man ſich erinnert, daß ſolche Gleichungen nur nach der Entwickelung der zweiten Theile einen Sinn haben, wenn der Buchſtaben Δ nur ein Operations- und kein Quantitätszeichen iſt.

Die Analogie zwiſchen den Potenzen und den Differenzen, welche aus dieſen ſymboliſchen Gleichungen hervorgeht, und wovon wir noch viele andere Beiſpiele kennen lernen werden, rührt offenbar davon her, daß die Binomialformel nach den Regeln der combinatoriſchen Analyſis erhalten wird, welche ganz und gar von der Natur der Rechnungsoperationen unabhängig iſt, die jede Combination darſtellt, wobei der Begriff der Multiplication, welcher in den Elementen der Algebra ſich mit dem abſtracten Begriffe der Combination verbindet, ganz zufällig iſt.

§. 44. Wenn die Größe x ihrer Natur nach, oder nach der Annahme, die Rolle der unabhängig veränderlichen Größe ſpielt, ſo hat man beſonders den Fall zu betrachten, wo dieſe Veränderliche nach gleichen Differenzen oder Incrementen wächſt, ſo daß man hat:

$$x_1 = x + \Delta x,$$
$$x_2 = x + 2\Delta x,$$
$$x_3 = x + 3\Delta x, \text{ etc.},$$

wo ſich die Differenzen höherer Ordnungen $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$, ... alle auf Null reduciren. In dieſer Vorausſetzung wollen wir nun die Reihen betrachten, welche die aufeinander folgenden Werthe von y und ihre Differenzen der verſchiedenen Ordnungen enthalten.

Für unſeren gegenwärtigen Zweck würde nichts Weſentliches mehr zu bemerken ſein, ſo lange die Function $y = fx$ unbeſtimmt bleibt und außerdem keine Bedingung in der Wahl der willkührlichen Differenz Δx hinzugefügt wird. Wir wollen daher annehmen, daß Δx einen ſehr kleinen Bruch bezeichne, ſo werden die Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ... im Allgemeinen auch ſehr klein, jedoch ſo beſchaffen, was ſehr bemerkenswerth iſt, daß die Verhältniſſe von $\Delta^2 y$ zu Δy, von $\Delta^3 y$ zu $\Delta^2 y$, etc. ſelbſt durch ſehr kleine Brüche ausgedrückt werden. Je kleiner die Differenz Δx iſt, deſto deutlicher ſtellt ſich dieſe Größenſubordination zwiſchen den Differenzen der verſchiedenen Ordnungen der Function y heraus.

In der That, wenn wir von der identiſchen Gleichung:

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

ausgehen, ſo können wir zunächſt bemerken, daß das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ohne

Ende gegen die Grenze $f'x$ convergirt, wenn Δx ohne Ende abnimmt. Man hat also mit einer unbeschränkten Annäherung, welche desto größer ist, je kleiner der Bruch Δx ist:

$$\Delta y = f'x \cdot \Delta x.$$

Auch ist identisch:

$$\Delta^2 y = \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \cdot \Delta x$$

und aus dieser Gleichung folgt mit einer unbeschränkten Annäherung, welche desto größer ist, je kleiner der Werth von Δx wird:

$$\Delta^2 y = [f'(x+\Delta x) - f'x] \cdot \Delta x = \frac{f'(x+\Delta x) - f'x}{\Delta x} \cdot \Delta x^2 = f''x \cdot \Delta x^2.$$

Hieraus sieht man zunächst, daß die abgeleitete Function der zweiten Ordnung $f''x$ die Grenze ist, gegen welche das Verhältniß $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ convergirt, wenn Δx ohne Ende abnimmt, so wie die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ unter derselben Bedingung durch die erste Ableitung $f'x$ ausgedrückt wird. Ferner sehen wir hieraus, daß für sehr kleine Werthe von Δx nahezu:

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta y} = \frac{f''x}{f'x} \cdot \Delta x$$

ist. Wenn nun die abgeleiteten Functionen $f'x$, $f''x$ endlich bleiben, d. h. wenn die Function fx in dem Intervalle von x bis $x + \Delta x$ keine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten oder dritten Ordnung erfährt und in diesem Intervalle nicht durch ein Maximum oder Minimum geht, in welchem Falle $f'x$ verschwinden würde; so kann man setzen:

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta y} = \alpha \Delta x,$$

wo α eine endliche Zahl bezeichnet, und alsdann kann man Δx immer so klein annehmen, daß das Product $\alpha \Delta x$ oder das Verhältniß $\frac{\Delta^2 y}{\Delta y}$ kleiner wird, als jede gegebene Größe.

Ebenso ergibt sich aus der identischen Gleichung:

$$\Delta^3 y = \left(\frac{\Delta^2 y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right) \cdot \Delta x^2$$

für sehr kleine Werthe von Δx mit einer unbeschränkten Annäherung:

$$\Delta^3 y = [f''(x+\Delta x) - f''x] \cdot \Delta x^2 = \frac{f''(x+\Delta x) - f''x}{\Delta x} \cdot \Delta x^3$$
$$= f'''x \cdot \Delta x^3,$$

und da dieselbe Rechnung ohne Ende fortgesetzt werden kann, so sieht man, daß die Ableitung $f^{(n)}x$ die Grenze ist, gegen welche das Verhältniß $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ in der gemachten Voraussetzung convergirt, welches ein Mittel an die Hand gibt, die Werthe der Function $f^{(n)}x$ näherungsweise zu berechnen, wenn die ursprüngliche Function fx für einander sehr nahe liegende und um gleiche Differenzen von einander verschiedene Werthe durch eine Tafel gegeben ist. Denn vermittelst dieser Tafel bildet man die Werthe von Δy, $\Delta^2 y$, ... $\Delta^n y$

und man hat folglich den Werth des Verhältnisses $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$, welcher nahezu mit dem Werthe von $f^{n)}x$ übereinstimmt.

Ferner sieht man, wenn alle Ableitungen von fx bis zu der Ableitung $f^{(n)}x$ incl. endlich bleiben, daß man Δx immer so klein annehmen kann, daß die Differenzen der verschiedenen Ordnungen:

$$\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \ldots\ldots \Delta^n y$$

nicht blos eine Reihe sehr kleiner Brüche bilden, sondern daß diese Reihe so geordnet ist, daß das Verhältniß jedes Gliedes der Reihe zu dem vorhergehenden sich selbst auf einen sehr kleinen Bruch reducirt.

§. 45. Die Reihe der Potenzen eines sehr kleinen Bruches ist der arithmetische Typus der Subordination der Größen. Wenn man z. B. den Bruch $\frac{1}{1000}$ auf die successiven ganzen Potenzen erhebt, so erhält man die sehr schnell abnehmende Reihe:

$$\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000000}, \frac{1}{1000000000}, \text{ etc.},$$

worin man bei einer Näherungsrechnung nicht blos gegen irgend ein Glied der Reihe das folgende Glied, sondern auch ein Vielfaches dieses letztern unberücksichtigt lassen kann, so lange der Multiplicator nicht von der Ordnung der Zehner oder Hunderter ist. Wir wollen allgemein mit ε einen sehr kleinen Bruch und mit $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$ Zahlen bezeichnen, welche nicht sehr groß, oder so beschaffen sind, daß die Brüche:

$$\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{k_n}$$

ihrer Kleinheit wegen nicht mit ε vergleichbar sind; so besteht die Reihe:

$$k_1\varepsilon, k_2\varepsilon^2, k_3\varepsilon^3, \ldots\ldots k_n\varepsilon^n$$

aus Gliedern, wovon jedes gegen das vorhergehende als sehr klein betrachtet werden kann, oder wovon jedes durch einen seiner Kleinheit wegen mit ε vergleichbaren sehr kleinen Bruch ausgedrückt würde, wenn man den Werth des unmittelbar vorhergehenden Gliedes zur Einheit nähme.

Die Brüche ε und $k_1\varepsilon$ wollen wir *sehr kleine Größen der ersten Ordnung* nennen, so wird die eben erwähnte Größensubordination dadurch ausgedrückt, daß man sagt:

$$k_2\varepsilon^2, k_3\varepsilon^3, \ldots\ldots k_n\varepsilon^n$$

sind *sehr kleine Größen der zweiten, dritten, ... der n^ten Ordnung*. Wenn also Δx eine sehr kleine Größe der ersten Ordnung ist, und keiner der Brüche:

$$\frac{1}{f'x}, \frac{1}{f''x}, \frac{1}{f'''x}, \ldots\ldots \frac{1}{f^{(n)}x}$$

seiner Kleinheit wegen mit Δx vergleichbar ist; so werden wir sagen, daß die Differenzen:

$$\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \ldots\ldots \Delta^n y$$

sehr kleine Größen der ersten, zweiten, dritten, ... n^ten Ordnung, oder Größen resp. von derselben Ordnung als:

$$\Delta x, \Delta x^2, \Delta x^3 \ldots\ldots \Delta x^n$$

sind.

§. 46. Es wird nicht unzweckmäßig sein, hier einige Erläuterungen über die Unterscheidung, welche die Geometer zwischen Größen von verschiedenen Ordnungen machen, wenn sie nicht blos mathematische Verhältnisse in aller

Strenge bestimmen, sondern Größen, welche eine reelle Existenz haben, näherungsweise schützen wollen, hinzuzufügen.

Wenn man die Sache in ihrer abstracten Allgemeinheit betrachtet, so ist diese Distinction ohne Zweifel artificiell; denn es gibt in der Natur keine absolute Kleinheit, weil dieselbe Größe durch sehr große Zahlen oder durch sehr kleine Brüche ausgedrückt wird, je nachdem die zum Grunde gelegte Einheit klein oder groß ist, und auch die stetigen Größen derselben Art können ihrer Natur nach hinsichtlich ihrer Größe nicht in verschiedene Ordnungen unterschieden werden, eben deßwegen, weil sie stetige Größen sind und man von der einen zur andern allmählig übergehen kann.

Allein auf dem Standpunkte, wo sich der Mensch befindet, wenn er die Naturerscheinungen beobachtet und die davon abhängigen Größen mißt, werden Maßeinheiten durch die Natur der Sache von einer solchen Verschiedenheit angegeben, daß man bei dem Uebergange von einer Art von Erscheinungen zu einer andern nothwendig zwischen Größen derselben Art eine Größensubordination aufstellen muß.

So hat man z. B. bei gewissen feinen Untersuchungen der Physik, wie die, welche sich auf die Capillarität und auf die Optik beziehen, das Millimeter zur Längeneinheit nehmen können, und man würde die Zahlenausdrücke der bei diesen Untersuchungen zu vergleichenden Größen ohne Grund complicirter machen, wenn man das Meter oder Kilometer zur Längeneinheit nähme, so wie es absurd sein würde, wenn man bei der Vergleichung der Höhen der Berge, bei deren Messung immer ein Fehler von einigen Decimetern oder selbst von einigen Metern stattfinden kann, das Millimeter zur Einheit nehmen wollte. Bei der Messung des Durchmessers der Sonne und der Planeten wird man durch die Natur der Beobachtungen und durch die Analogie darauf geführt, den Erdhalbmesser zur Längeneinheit zu nehmen; denn es sind nicht blos Differenzen von einigen hundert Metern gegen die Dimensionen dieser enormen Körper bei den Erscheinungen, auf welche diese Dimensionen Einfluß haben, unbedeutend, sondern es können solche Differenzen durch die uns zu Gebote stehenden Beobachtungs- und Messungsmittel nicht einmal erkannt werden. Endlich würde bei der Bestimmung der Dimensionen der Planetenbahnen selbst der Halbmesser der Erde eine viel zu kleine Längeneinheit sein, und man nimmt daher die große Axe der elliptischen Erdbahn zu dieser Längeneinheit, gegen welche man die mit den Dimensionen der Erde vergleichbaren Entfernungsveränderungen als sehr klein und in vielen Fällen sogar als für uns unmeßbar klein betrachten kann.

Es würde sehr leicht sein, diese Progression weiter fortzusetzen, indem wir unsere Beispiele aus allgemein bekannten astronomischen Erscheinungen nähmen; allein aus dem bereits Gesagten geht zur Genüge hervor, wie wir auf die Betrachtung homogener Größen verschiedener Ordnungen geführt werden, so daß man bei jeder Klasse von Erscheinungen und bei der Messung der sich darauf beziehenden Größen die Einheit in einer gewissen Ordnung nehmen, und folglich die Einheiten der niedrigen Ordnungen durch sehr kleine Brüche ausdrücken muß. Auf dieser Größensubordination beruht, wenn sie stattfindet, die Einfachheit der Gesetze der Erscheinungen und die Möglichkeit, sie durch die Annäherungsmethoden, welche uns die Analysis kennen gelehrt hat, der Rechnung zu unterwerfen.

Theorie der unendlich kleinen Größen und Principien der Infinitesimalrechnung.

§. 47. Wenn die Reihe der Differenzen der verschiedenen Ordnungen:

$$\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y \ldots\ldots$$

gegeben ist, welche für sehr kleine Werthe von Δx resp. mit:

$\Delta x, \Delta x^2, \Delta^3 x, \ldots\ldots$

vergleichbar werden; so ist der Fehler, welchen man begeht, wenn man $\Delta^2 y$, Δx^2, $\Delta^3 y$, Δx^3, ... resp. gegen Δy, Δx, $\Delta^2 y$, Δx^2, ... vernachlässigt, desto kleiner, eine je kleinere Größe man für Δx nimmt, und man kann Δx immer so klein annehmen, daß der begangene Fehler kleiner wird, als jede gegebene Größe, was man nach Leibnitz kürzer dadurch ausdrückt, daß man sagt: die Größen $\Delta^2 y$, Δx^2, $\Delta^3 y$, Δx^3, ... können in aller Strenge resp. gegen die Größen Δy, Δx, $\Delta^2 y$, Δx^2, ... vernachlässigt werden, wenn die Differenz Δx unendlich klein ist, d. h. kleiner werden kann, als jede gegebene Größe.

Wenn Δx und folglich Δy unendlich kleine Größen sind, so sind Δx^2, $\Delta^2 y$ unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung, d. h. die Verhältnisse:

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta^2 y}{\Delta y}$$

werden auch unendlich kleine Größen. Die Größe Δx^3, $\Delta^3 y$ sind unendlich kleine Größen der dritten Ordnung, d. h. die Verhältnisse:

$$\frac{\Delta x^3}{\Delta x^2}, \quad \frac{\Delta^3 y}{\Delta^2 y}$$

werden unendlich kleine Größen der ersten Ordnung, oder die Verhältnisse:

$$\frac{\Delta x^3}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta^3 y}{\Delta y}$$

unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung. Allgemein, die Größen Δx^n, $\Delta^n y$ werden in dem eben erklärten Sinne unendlich kleine Größen der n^{ten} Ordnung.

Statt also zu sagen, daß die Ableitungen:

$$y', y'', y''', \ldots\ldots$$

die Grenzen sind, gegen welche die Verhältnisse:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \quad \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}, \ldots\ldots$$

ohne Ende convergiren, wenn die Differenz Δx ohne Ende gegen Null convergirt, drücken wir dasselbe aus, wenn wir sagen, daß diese abgeleiteten Functionen die Werthe der correspondirenden Verhältnisse selbst sind, wenn die Differenz Δx unendlich klein wird, und wenn folglich die Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ... unendlich kleine Größen der 1ten, 2ten, 3ten, ... Ordnung werden, wo jede dieser unendlich kleinen Größen gegen unendlich kleine Größen von einer niedrigen Ordnung in aller Strenge vernachläßigt werden kann und muß.

Um dasselbe mit der der algebraischen Sprache eigenthümlichen Kürze zu sagen oder auszudrücken, wendet Leibnitz zur Bezeichnung der unendlich kleinen Differenzen den Buchstaben d an, und nach dieser Bezeichnungsart wollen wir:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}, \text{ etc.}$$

oder vielmehr:

$$dy = f'x \cdot dx, \quad d^2 y = f''x \cdot dx^2, \quad d^3 y = f'''x \cdot dx^3, \text{ etc.}$$

setzen.

§. 48. Um den Grund und Zweck dieses Algorithmus sofort an einem sehr einfachen Beispiele zu begreifen, wollen wir die Ableitung der algebraischen Function:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

ſuchen. So haben wir, wenn wir zunächſt die Differenz Δy bilden, um von derſelben zu dem Verhältniſſe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und von dieſem zu der Grenze überzugehen:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 + a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (x^3 + ax^2 + bx + c) = (3x^2 + 2ax + b)\Delta x + (3x + a)\Delta x^2 + \Delta x^3,$$

woraus folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + ax + b + (3x + a)\Delta x + \Delta x^2.$$

Laſſen wir nun Δx ohne Ende gegen Null convergiren, ſo convergiren die Glieder:

$$(3x + a)\Delta x, \Delta x^2$$

ebenfalls ohne Ende gegen Null und verſchwinden an der Grenze, ſo daß man folglich hat:

$$y' = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Grenze von } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 2ax + b.$$

Statt dieſe Schlußweiſe anzuwenden, wollen wir die Differenzen Δx, Δy als unendlich kleine Größen betrachten und ſie mit dx, dy bezeichnen, ſo haben wir:

$$dy = (3x^2 + 2ax + b)\,dx + (3x + a)\,dx^2 + dx^3; \quad (1)$$

aber die Glieder:

$$(3x + a)\,dx^2, dx^3$$

ſind unendlich kleine Größen der zweiten und dritten Ordnung, welche gegen die unendlich kleinen Größen der erſten Ordnung:

$$dy, (3x^2 + 2ax + b)\,dx$$

vernachläßigt werden müſſen, und man hat folglich blos:

$$dy = (3x^2 + 2ax + b)\,dx \quad (2)$$

woraus, wie oben, folgt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b.$$

Nun beſteht aber der Hauptvortheil des Leibnitz'ſchen Verfahrens darin, daß man in der Gleichung (1) die Glieder mit dx^2 und dx^3 nicht hätte zu ſetzen und zu berechnen brauchen, weil dieſelben nur unendlich kleine Größen höherer Ordnungen ſein können, welche gegen unendlich kleine Größen der erſten Ordnung ebenſo und aus demſelben Grunde verſchwinden müſſen, wie dieſe gegen endliche Größen. Ferner war zur Bildung der Differenz Δy die Kenntniß der Formel erforderlich, welche die Entwickelungen der Potenzen $(x + \Delta x)^3$, $(x + \Delta x)^2$ geben, während es zur Bildung der Gleichung (2) hinreichend geweſen wäre, die Glieder dieſer Entwickelungen mit der erſten Potenz von Δx zu kennen.

Wir wollen ferner annehmen, daß wir die Ableitung der Function ſuchten, welche das Maß der zwiſchen der Curve M' N' (Fig. 20), der Axe der Abſciſſen und der den beiden Ordinaten $m_0 p_0$, mp, wovon die erſte feſt und die zweite beweglich iſt, liegenden trapezoidiſchen Fläche iſt. Dieſe Aufgabe iſt bereits in §. 33 durch die Betrachtung der Grenzen gelöſt, und um darauf die Leibnitz'ſchen Principien anzuwenden, wollen wir annehmen, daß die Abſciſſe $Op = x$ um die unendlich kleine Größe $pp_1 = dx$ zunimmt. Wenn die Fläche $m_0 p_0 pm$ mit y bezeichnet wird, ſo drückt dy das unendlich kleine krummlinige Trapez $mpp_1 m_1$ aus. Aber wenn wir die geraden Linien mn_1, $m_1 n$ parallel zu pp_1 ziehen, ſo iſt der Unterſchied zwiſchen dy und dem unendlich kleinen Rechtecke $mpp_1 n_1$, kleiner als die Fläche des Rechteckes

$m n_1$, $m_1 n$, welches ſelbſt eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung iſt, weil jede ſeiner beiden Dimenſionen $m n_1$, $m_1 n$ eine unendlich kleine Größe der erſten Ordnung iſt. Wenn man alſo, wie es geſchehen muß, die unendlich kleinen Größen der zweiten Ordnung gegen die der erſten Ordnung vernachläſſigt und mit $f' x$ die veränderliche Ordinate der Curve $M' N'$ bezeichnet, ſo hat man:

$$dy = f' x \cdot dx,$$

folglich:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f' x,$$

woraus erhellet, daß die Ableitung der geſuchten Function genau die gegebene Function $f' x$ iſt.

Man wendet im Allgemeinen bei den Schlüſſen, Conſtructionen und Rechnungen nur unendlich kleine Größen verſchiedener Ordnungen an, um die Verhältniſſe anzugeben, welche zwiſchen unendlich kleinen Größen derſelben Ordnung ſtattfinden, und zu dieſem Zwecke vernachläſſigt man ſtets unendlich kleine Größen einer höhern Ordnung gegen unendlich kleine Größen von einer niedrigern Ordnung, wodurch im Verlaufe der Betrachtungen Conſtructionen und Rechnungen, Vereinfachungen bewirkt werden, welche den weſentlichen Vorzug der Methode ausmachen.

§. 49. In der That, wenn wir die Methode der Grenzen und die der unendlich kleinen Größen nicht blos in ihren erſten Principien, ſondern auch in ihren eben ſo mannichfaltigen, als ausgedehnten Anwendungen mit einander vergleichen könnten, ſo würden wir finden, daß beide Methoden nach demſelben Ziele ſtreben, nämlich: das Geſetz der Stetigkeit bei der Veränderung der Größen auszudrücken, aber daß ſie zur Erreichung dieſes Zweckes entgegengeſetzte Wege einſchlagen. Wenn nach der erſten Methode eine Aufgabe über ſtetig veränderliche Größen behandelt werden ſoll, ſo nimmt man zuerſt an, daß ſie plötzlich von einem Größenzuſtande in einen andern übergehen, und unterſucht dann, gegen welche Grenzen die erhaltenen Werthe in dieſer Vorausſetzung convergiren, wenn man das Intervall zwiſchen zwei ſucceſſiven Zuſtänden immer mehr und mehr verkleinert. Offenbar erhält man auf dieſe Weiſe erſt am Ende der Auflöſung die Vereinfachungen, welche aus der Stetigkeit der betrachteten Größen entſpringen, und welche die Infiniteſimalmethode durch das ſucceſſive Verſchwinden der unendlich kleinen Größen höherer Ordnungen gegen die von einer niedrigern Ordnung unmittelbar und ſucceſſive bei der fortſchreitenden Unterſuchung von ſelbſt an die Hand gibt.

Uebrigens bildet die Infiniteſimalmethode nicht blos einen geiſtreichen Kunſtgriff, ſondern ſie iſt der natürliche Ausdruck der Entſtehungsart phyſiſcher Größen, welche nach Elementen wachſen, die kleiner ſind, als jede endliche Größe. Wenn z. B. ein Körper, um uns des in §. 42 angeführten Beiſpieles wieder zu bedienen, ſich abkühlt und fortwährend thermometriſche Wärme ausſtrahlt, ſo iſt ſein Temperaturverluſt in einer beliebig kleinen Zeit eine zuſammengeſetzte Erſcheinung, welche von dem Geſetze, wonach der Körper fortwährend in jedem unendlich kleinen Zeittheilchen eine unendlich kleine Quantität thermometriſcher Wärme ausſtrahlt, abhängt. Das Verhältniß zwiſchen den unendlich kleinen Veränderungen der thermometriſchen Wärme des Körpers und der Zeit iſt der Grund des Verhältniſſes, welches ſich zwiſchen den Veränderungen derſelben Größen herausſtellt, wenn ſie endliche Werthe erlangt haben, wo der Ausdruck Grund hier in ſeiner philoſophiſchen Bedeutung genommen iſt.

Ebenſo ändern ſich, um ein noch bekannteres Beiſpiel anzuführen, die von einem freifallenden Körper durchlaufenen Räume den Quadraten der ſeit dem

Beginnen des Falles verfloſſenen Zeiten proportional, weil der unendlich kleine Zuwachs des Raumes der erlangten Geſchwindigkeit proportional iſt, welche ſelbſt in Folge der fortdauernden conſtanten Wirkung der Schwere der ſeit dem Beginnen der Bewegung verfloſſenen Zeit proportional iſt. Dieſe ſo einfache Relation zwiſchen den Elementen der verfloſſenen Zeit und denen des beſchriebenen Raumes iſt der Grund oder die Urſache des weniger einfachen Geſetzes, welches zwiſchen den endlichen Veränderungen dieſer beiden Größen ſtattfindet.

Aus dieſem Geſichtspunkte betrachtet, hat man mit Grund ſagen können: daß die unendlich kleinen Größen in der Natur exiſtiren, und man könnte bei dieſer Vorſtellungsart ſehr paſſend die Function f' x die erzeugende oder urſprüngliche Function und fx die abgeleitete Function nennen, ſtatt dieſe Benennungen in einem umgekehrten Sinne anzuwenden, welches Lagrange, von rein algebraiſchen Betrachtungen geleitet, gethan hat.

Uebrigens beziehen ſich dieſe Bemerkungen nicht ausſchließlich auf Größen, welche eine phyſiſche Exiſtenz haben; denn in der reinen Geometrie werden die ſtetigen Größen als durch die Bewegung gewiſſer Punkte, Linien oder Flächen erzeugt, betrachtet, und in ſolchen Fällen iſt die directe Betrachtung des Geſetzes der unendlich kleinen Veränderungen, woraus das Geſetz endlicher Veränderungen entſpringt, ebenſo vortheilhaft.

Kurz, die Infiniteſimalmethode iſt der Natur der Sache mehr angemeſſen; ſie iſt, aus einem objectiven Geſichtspunkte betrachtet, die directe Methode und eben deßwegen iſt der Leibnitz'ſche Algorithmus, bei welchem dieſer Methode noch eine regelmäßige Bezeichnung zu Hülfe kommt, ein ſo kräftiges Erfindungsmittel geworden, wodurch die reine und angewandte Mathematik eine ganz neue Geſtalt bekommen hat, und welcher an und für ſich betrachtet, eine höchſt wichtige Erfindung iſt, welche wir dieſem großen Philoſophen allein verdanken. Dagegen läßt ſich der Begriff des unendlich Kleinen logiſch nur auf eine indirecte Weiſe mit Hülfe der Grenzen definiren, ſo daß aus dem logiſchen und ſubjectiven Geſichtspunkte betrachtet, die demonſtrative Strenge direct der Methode der Grenzen und nur indirect der Infiniteſimalmethode zukommt, und dieſe vermittelſt gewiſſer Worterklärungen nur eine Uebertragung der erſtern wird. Die Folge von dieſer zweifachen Thatſache iſt, daß man in den einfachſten Fällen die Identität der Reſultate beider Methoden nachweiſen muß; aber wenn dieſe Uebertragung einmal genau aufgefaßt iſt, ſo muß man ſich der Infiniteſimalmethode bedienen, welche allein bei der Auflöſung zuſammengeſetzter Aufgaben durch die Hinweglaſſung jedes unnützen Gerüſtes zum Ziele führen kann.

Obgleich die Methode der Grenzen zuverläſſig alle nur zu wünſchende logiſche Strenge hat, ſo ſcheint doch der Begriff, worauf ſie beruht von den Geometern des Alterthums noch nicht ſcharf genug definirt zu ſein, weil ſie, an die griechiſche Dialectik gewöhnt, die Anzahl der unmittelbaren Vorſtellungen immer zu vermindern ſuchten, indem ſie das Princip der Identität oder des Widerſpruches, worauf die logiſche Demonſtration beruht, anwandten. Sie ſubſtituirten daher für die Methode der Grenzen das aus den Elementen bekannte Verfahren der Zurückführung auf das Abſurde oder der Exhauſtion, welches das indirecteſte und complicirteſte Verfahren von allen iſt, welches man ſobald als möglich verlaſſen muß, wenn man allmählig von den einfachſten zu den zuſammengeſetzteſten Aufgaben übergeht.

Aus der Vergleichung und Zuſammenſtellung dieſer verſchiedenen mathematiſchen Theorieen ließen ſich werthvolle Inductionen für das allgemeine Studium der Operationen und der Geſetze des Verſtandes ableiten; allein wir

würden dadurch in das Gebiet der reinen Philoſophie geführt und von dem weſentlichen Zwecke des vorliegenden Werkes zu weit entfernt werden.

§. 50. Die unendlich kleinen Differenzen dx, dy, d^2y, d^3y, ... werden kürzer mit dem Ausdrucke Differenziale benannt. Die Verhältniſſe:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \ldots\ldots,$$

deren Identität mit den abgeleiteten Functionen y', y'', y''', ..., wenn das Differenzial dx conſtant iſt und mit den Fluxionen $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, ..., wenn die Fluente x ſich gleichförmig mit der Zeit ändert oder gleichförmig fließt, wir nachgewieſen haben, hat Lacroix die Differenzialcoefficienten der Function y genannt, und dieſer Ausdruck wird jetzt häufig angewandt. Sehr häufig werden ſie auch Differenzialquotienten genannt. Die Ordnung eines Differenzialcoefficienten iſt dieſelbe, wie die des entſprechenden Differenziales oder der entſprechenden abgeleiteten Function.

Eine Function differenziren, heißt von dieſer Function zu ihrem Differenziale übergehen, und der Zweig der Analyſis, welcher ſich mit der Differenzirung der Functionen beſchäftigt, wird die Differenzialrechnung genannt.

Die Gleichungen, welche zwiſchen der unabhängigen Veränderlichen x, der Function y und den Ableitungen oder Differenzialcoefficienten dieſer Function ſtattfinden, werden Differenzialgleichungen genannt, und die Ordnung einer ſolchen Differenzialgleichung wird durch die des höchſten in dieſer Gleichung vorkommenden Differenzialcoefficienten beſtimmt. So iſt z. B.:

$$f(x, y, y') = 0, \quad \text{oder} \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

eine Differenzialgleichung der erſten Ordnung und:

$$f(x, y, y', y'') = 0, \quad \text{oder} \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung, u. ſ. f.

§. 51. Die endliche Differenz $x - x_0$ iſt die Summe der unendlich kleinen Incremente, welche die unabhängige Veränderliche erhalten hat, indem ſie von dem Werthe x_0 zu dem Werthe x übergegangen iſt, und ebenſo iſt die endliche Differenz $y - y_0$ die Summe der unendlich kleinen Incremente oder Differenzialelemente:

$$dy = f'x \cdot dx,$$

durch deren ſucceſſive Annahme die Function von dem Werthe y_0 zu dem Werthe y übergegangen iſt, wo dieſe Elemente daſſelbe, oder das entgegengeſetzte Zeichen von dx haben können, je nachdem $f'x$ einen poſitiven oder negativen Werth annimmt (§. 30). *)

*) Denn es ſeien:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_{n-1}, x_n$$

n Werthe, welche die unabhängige Veränderliche x bei dem Uebergange von dem Werthe x_0 zu dem Werthe x annimmt, und:

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_{n-1}, y_n$$

ſeien die entſprechenden Werthe der Function y, indem ſie von dem Werthe y_0 zu dem Werthe y übergeht, ſo iſt offenbar:

$$(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_4-x_3)+ \ldots (x_n-x_{n-1})+(x-x_n)=x-x_0,$$

und:

$$(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+(y_4-y_3)+ \ldots (y_n-y_{n-1})+(y-y_n)=y-y_0.$$

Man ſchreibt daher:

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} f'x \cdot dx, \qquad (3)$$

oder:

$$fx - fx_0 = \int_{x_0}^{x} f'x \cdot dx,$$

wo das Zeichen $\int$ als die Abkürzung des Wortes Summe betrachtet wird, und man ſagt, daß:

$$\int_{x_0}^{x} f'x \cdot dx$$

das zwiſchen den Grenzen x_0, x genommene Integral des Differenziales $f'x \cdot dx$. *)

Mit andern Worten, wenn man:

$$\Delta x = \frac{x - x_0}{n}$$

nimmt, ſo convergirt die Summe:

$$f'x_0 \cdot \Delta x + f'(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x + f'(x_0 + 2\Delta x) \cdot \Delta x + \ldots$$
$$\ldots + f'[x_0 + (n + 1)\Delta x]\,\Delta x$$

gegen die Grenze:

$$fx - fx_0,$$

wenn man die Zahl n immer größer und größer nimmt oder Δx gegen Null convergiren läßt.

§. 52. Die Gleichung (3) zeigt, daß es zur vollſtändigen Beſtimmung der Function $y = fx$ nicht genügt, wenn ihre Ableitung $y' = f'x$ oder ihre Differenzial $y'dx = f'x \cdot dx$ gegeben iſt, ſondern es muß außerdem auch explicite oder implicite der einem beſtimmten Werthe der unabhängigen Veränderlichen entſprechende Werth der Function $y = fx$ gegeben ſein, was ganz mit dem bereits angeführten Principe übereinſtimmt (§. 31 und 39).

Hieraus folgt: 1) daß, wenn man durch irgend ein Mittel eine Function fx finden kann, welche die Eigenſchaft hat, daß $f'x$ ihre Ableitung iſt, für beliebige Werthe x_0, x der Grenzen der Werth des Integrales:

$$\int_{x_0}^{x} f'x\,dx = fx - fx_0;$$

Nimmt man nun n unendlich groß an, ſo gehen dieſe Differenzen reſp. in die Differenziale dx, dy über, wokaus die Richtigkeit des Geſagten erhellet.
Z. d. Ueberſ.

*) Leibnitz wandte immer den Ausdruck Summe an, wovon das Zeichen $\int$, wie geſagt, die Abkürzung iſt, wogegen der Ausdruck Integral von Bernoulli eingeführt iſt.

Dieſe Bezeichnungsart $\int_{x_0}^{x}$ rührt von Fourier her, und beſteht, wie man ſieht, darin, die Werthe der unabhängigen Veränderlichen, zwiſchen welchen die Summation oder Integration geſchehen ſoll, unten und oben an das Integralzeichen zu ſetzen.

ist, und 2) daß

$$fx + C,$$

wo C eine willkührliche Constante bezeichnet, der allgemeine Ausdruck der Functionen ist, welche $f'x$ zur Ableitung haben. Man bezeichnet daher die Operation, vermöge welcher man von der Ableitung $f'x$ zu dem allgemeinen Ausdrucke der Functionen übergeht, wovon sie die Ableitung ist, oder von dem Differenziale $f'x \cdot dx$ zu dem allgemeinen Ausdrucke der Functionen, wovon dasselbe das Differenzial ist, mit dem Namen der unbestimmten Integration und bedient sich zur Andeutung dieser Operation des Zeichens $\int$ ohne Angabe der Grenzen. Man setzt also:

$$\int f'x\,dx = fx + C,$$

oder vielmehr:

$$\int f'x\,dx = fx + \text{const.},$$

und sagt, daß der Ausdruck:

$$fx + \text{const.}$$

das unbestimmte Integral des Differenziales $f'x\,dx$ ist.

Dagegen nennt man bestimmte Integrale diejenigen, welche zwischen gegebenen Grenzen genommen sind und keine willkührliche Constante mehr bei sich führen.

§. 53. Die Integralrechnung, welche man als das Umgekehrte der Differenzialrechnung betrachten kann, hat die Bestimmung der unbestimmten und bestimmten Integrale zum Zwecke, und mit dem Namen Infinitesimalrechnung bezeichnet man die Differenzial- und Integralrechnung zusammen genommen.

Die Infinitesimalrechnung, in so fern sie vermittelst einer eigenthümlichen Sprache und eines besonderen Algorithmus die zwischen den Functionen und ihren verschiedenen Ableitungen statt findenden Relationen nachzuweisen hat, enthält das Wichtigste von der Theorie der Functionen und fällt bei dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft gewissermaßen damit zusammen; allein man muß in rationeller Hinsicht durchaus den Calcul, welcher nur ein Instrument ist, von der Theorie unterscheiden, worauf er angewandt wird.

Auch darf man nicht die Infinitesimalmethode, welche man schon vor Leibnitz angewandt hatte, und noch jetzt in den Elementen der Geometrie und der Statik anwendet, mit dem von Leibnitz erfundenen Differenzialalgorithmus wegen der Anwendungen der Infinitesimalmethode auf die Theorie der Functionen identificiren.

Der Gebrauch lehrt, daß dieser Algorithmus, ungeachtet seiner allgemeinen Vorzüge, dennoch einigen von der Schreibart herrührenden Unvollkommenheiten unterliegt, welche im Grunde nicht von der Infinitesimalmethode herrühren. In gewissen Fällen ist der Lagrange'sche Algorithmus bequemer, und alsdann tragen die Analysten kein Bedenken, denselben anzuwenden, obgleich sie sich gewöhnlicher der Leibnitz'schen Bezeichnung bedienen.

§. 54. In allem Vorhergehenden haben wir vorausgesetzt, daß die Function keine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt, welche davon herrührt, daß sie selbst, oder ihre Ableitungen der verschiedenen Ordnungen durch das Unendliche gehen, oder plötzlich von einem endlichen zu einem anderen endlichen Werthe übergehen. Denn wenn man sagt, eine Function y erfahre eine Stetigkeitsunterbrechung der ersten Ordnung, so heißt dieses so viel, daß einer unendlich kleinen Veränderung dx der unabhängigen Veränderlichen eine endliche oder

unendliche Veränderung dy der Function entſpricht, nämlich eine unendlich große Veränderung, wenn y durch das Unendliche geht und eine endliche Veränderung, wenn y plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem anderen endlichen Werthe übergeht, und in beiden Fällen iſt es nicht erlaubt dy als eine unendlich kleine Größe von derſelben Ordnung als dx zu behandeln. Desgleichen, wenn die Function y eine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung erfährt, ſo iſt $dy' = \frac{d^2y}{dx}$ eine endliche oder unendliche Größe α und das zweite Differenzial $d^2y = \alpha dx$ iſt keine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung mehr, welche gegen unendlich kleine Größen der erſten Ordnung vernachläſſigt werden kann. Alle Formeln, welche man durch Anwendung des Differenziales dy, indem man daſſelbe, als eine unendlich kleine Größe der erſten Ordnung betrachtet, erhalten hat, werden im Allgemeinen ungenau, wenn die Function y eine Stetigkeitsunterbrechung der erſten Ordnung erfährt, und alle Formeln, worin das zweite Differenzial d^2y als eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung betrachtet iſt, werden ebenfalls im Allgemeinen ungenau, nicht blos, wenn y innerhalb der Grenzen der Anwendung dieſer Formeln eine Stetigkeitsunterbrechung der erſten Ordnung erfährt, ſondern auch, wenn ſie zwiſchen denſelben Grenzen nur eine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung erfährt, u. ſ. f.

So oft unendlich kleinen Werthen von dx unendlich große Werthe von dy entſprechen, wird der Differenzialcoefficient $\frac{dy}{dx}$ unendlich; aber das Umgekehrte findet nicht allgemein ſtatt, was nach der bereits gemachten und durch die Betrachtung der Curven erläuterten Bemerkung davon herrührt, daß die Ableitung y' durch das Unendliche gehen kann, ohne daß die Function y aufhört endlich zu ſein. Wenn man übrigens dy als die Grenze des aus der Gleichung:

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

gezogenen Werthes von Δy betrachtet, ſo ſieht man leicht ein, daß die Grenze des Productes zweier Factoren, wovon der eine $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gegen das Unendliche und der andere Δx gegen Null convergirt, unendlich, oder endlich, oder auch Null ſein kann. In den beiden erſten Fällen iſt:

$$dy = f'x\,dx$$

eine unendliche oder eine endliche Größe, und die Function y erfährt eine Stetigkeitsunterbrechung der erſten Ordnung; aber im dritten Falle bleibt dy eine unendlich kleine Größe und y erfährt nur eine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung. Ebenſo, wenn $dy' = \frac{d^2y}{dx}$ durch das Unendliche geht, wird der Differenzialcoefficient der zweiten Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2}$ um ſo mehr unendlich groß; allein das Umgekehrte iſt nicht allgemein wahr, und dieſer Differenzialcoefficient oder die entſprechende Ableitung $f''x$ kann durch das Unendliche gehen, ohne daß $dy' = \frac{d^2y}{dx}$ aufhört, eine unendlich kleine Größe der erſten Ordnung, und folglich d^2y eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung zu ſein, in welchem Falle y nur eine Stetigkeitsunterbrechung der dritten Ordnung erfährt.

Die Gleichung:

$$dy = f'x\,dx$$

und die, welche ſich daraus ergibt (§. 51):

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} f'x\,dx$$

hat keinen Sinn mehr, wenn das Differenzial dx für Werthe von x, die zwischen den Grenzen des Integrales liegen, durch das Unendliche geht, was nach dem eben Gesagten nicht blos voraussetzt, daß $f'x$ unendlich wird, sondern auch, daß das Product $f'x \cdot dx$ einen unendlichen Werth behält. Wenn jedoch fx eine Function bezeichnet, deren Ableitung $f'x$ ist, so daß man das unbestimmte Integral hat:

$$\int f'x\,dx = fx + C;$$

so ergibt sich daraus:

$$y - y_0 = fx - fx_0$$

als die Gleichung einer Curve, deren abgeleitete Curve $y' = f'x$ ist, und welche außerdem durch den Punkt (x_0, y_0) gehen muß, aber deren Ordinate y für Werthe der Abscisse zwischen x_0 und x durch das Unendliche geht. Der Ausdruck $fx - fx_0$ drückt wieder die Differenz der Ordinaten y, y_0, aber nicht mehr die Summe der Werthe des Differenziales $dy = f'x \cdot dx$ zwischen den Werthen x_0, x der unabhängigen Veränderlichen aus. Wir werden später auf Beispiele dieses bereits in §. 35 unter einer anderen Form dargestellten Ausnahmfalles, welcher hier blos in Erinnerung gebracht zu werden braucht, zurückkommen.

§. 55. Aus demselben Grunde wollen wir hier blos die Formen, welche die im vorhergehenden Kapitel bewiesenen allgemeinen Lehrsätze annehmen, wenn darauf die Methode und die Bezeichnungen der Infinitesimalrechnung angewandt werden, kurz andeuten.

1) Wenn man setzt:

$$y = u + v + w + \text{etc.}$$

wo u, v, w, etc., Functionen derselben unabhängigen Veränderlichen x bezeichnen, so hat man offenbar, indem man zu den Differenzialen übergeht:

$$dy = du + dv + dw + \text{etc.}$$

Das Differenzial einer Summe von Functionen ist also die Summe ihrer Differenziale, wo das Wort Summe in seiner algebraischen Bedeutung genommen werden muß. Hieraus ergibt sich ferner die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \text{etc.}$$

welche der Ausdruck des in §. 39 über die abgeleiteten Functionen bewiesenen Lehrsatzes ist.

Umgekehrt hat man:

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx = \int_{x_0}^{x} u\,dx + \int_{x_0}^{x} v\,dx + \int_{x_0}^{x} w\,dx + \text{etc.}$$

d. h. das bestimmte Integral einer Summe von Functionen ist die Summe ihrer zwischen denselben Grenzen genommenen Integrale.

Dieselbe Identität findet zwischen den unbestimmten Integralen statt, so daß:

$$\int y\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx + \text{etc.} \qquad (4)$$

ist, und um diese letzte Formel zu integriren, wollen wir annehmen, daß man einzeln:

$$\int y\,dx = Fx + C,\quad \int u\,dx = fx + c,\quad \int v\,dx = f_1x + c_1,$$

$$\int w\,dx = f_2x + c_2,\ \text{etc.}$$

gefunden habe, wo C, c, c_1, c_2, ... die willkührlichen Conſtanten bezeichnen; ſo muß man nach der Formel (4) die Conſtante C ſo beſtimmen können, daß für beliebige Werthe der Conſtanten c, c_1, c_2, etc. die Identität ſtatt findet:

$$Fx + C = fx + c + f_1x + c_1 + f_2x + c_2 + \text{etc.}$$

2) Das Differenzial des Productes zweier Functionen iſt gleich der Summe der Producte, welche man erhält, wenn man jede der beiden Functionen durch das Differenzial der anderen multiplicirt. Denn man hat:

$$d \cdot uv = (u + du)(v + dv) - uv,$$

woraus folgt, wenn man entwickelt und die unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung $du \cdot dv$ gegen die unendlich kleinen Größen der erſten Ordnung hinwegläßt:

$$d \cdot uv = v\,du + u\,dv. \qquad (5)$$

Wenn man zu den Differenzialcoefficienten übergeht, ſo kommt:

$$\frac{d \cdot uv}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx},$$

welches der Ausdruck eines andern in der Gleichung (b) des angeführten § enthaltenen Lehrſatzes über die abgeleiteten Functionen iſt.

Wenn man die Gleichung (5) auf die Form:

$$\frac{d \cdot uv}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$

bringt, ſo ergibt ſich daraus leicht:

$$\frac{d \cdot uvw \ldots\ldots}{uvw \ldots\ldots} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \text{etc.} \qquad (6)$$

Wenn u eine conſtante Zahl a iſt, ſo wird $du = 0$, und man hat blos:

$$d \cdot av = a\,dv,$$

und umgekehrt hat man:

$$\int_{x_0}^{x} av\,dx = a\int_{x_0}^{x} v\,dx,\quad \int av\,dx = a\int v\,dx,$$

wo dieſe letzte Gleichung wie die Gleichung (4) interpretirt wird.

Es ſei:

$$u = \varphi x,\ v = \psi x,\ \text{alſo}\ uv = \varphi x \cdot \psi x = fx;$$

ſo nimmt die Gleichung (5) folgende Form an:

$$f'x\,dx = \psi x \cdot \varphi' x\,dx + \varphi x \cdot \psi' x\,dx,$$

woraus folgt:

$$\varphi x \cdot \psi' x\,dx = f'x\,dx - \psi x \cdot \varphi' x\,dx, \qquad (7)$$

und wenn man integrirt:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi x \cdot \psi' x\,dx = fx - fx_0 - \int_{x_0}^{x} \psi x \cdot \varphi' x\,dx,$$

oder vielmehr:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi x \cdot \psi' x\,dx = \varphi x \cdot \psi x - \varphi x_0 \cdot \psi x_0 - \int_{x_0}^{x} \psi x \cdot \varphi' x\,dx. \qquad (8)$$

Auf dieſe Weiſe iſt die Integration der Function $\varphi x \cdot \psi' x\,dx$ auf die der Function $\psi' x\,dx$ zurückgeführt (welches die Function ψ gibt), und auf die

Integration der Function $\psi x \cdot \varphi' x\,dx$, wo ſich ſowohl die eine, als die andere dieſer Integrationen in vielen Fällen einfacher verrichten läßt, als die der gegebenen Function. Dieſes Verfahren, wovon man, wie wir ſpäter ſehen werden, in der Integralrechnung häufig Gebrauch macht, iſt unter den Namen der partiellen Integration bekannt.

Wenn man von den beiden Theilen der Gleichung (7) die unbeſtimmten Integrale nimmt, ſo erhält man:

$$\int \varphi x \cdot \psi' x\,dx = fx - \int \psi x \cdot \varphi' x\,dx,$$

oder:

$$\int \varphi x \cdot \psi' x\,dx = \varphi x \cdot \psi x - \int \psi x \cdot \varphi' x\,dx. \qquad (9)$$

Eine willkührliche Conſtante braucht zu dem Integrale des Gliedes $f' x\,dx$ nicht hinzugefügt zu werden, weil dieſelbe mit der willkührlichen Conſtante übereinſtimmt, welche das unbeſtimmte Integral $\int \psi x \cdot \varphi' x\,dx$ nothwendig bei ſich haben muß. Auf dieſe Weiſe wird jeder Theil der Gleichung (9) als mit einer willkührlichen Conſtante verſehen betrachtet, ſo daß man den Werth der einen Conſtanten immer ſo annehmen kann, daß die Identität ſtatt findet, was für einen Zahlenwerth man der anderen Conſtanten auch beigelegt haben mag, wie dieſes in Beziehung auf die Formel (4) näher gezeigt iſt.

3) Es ſei:

$$uv = r, \text{ oder } v = \frac{r}{u}$$

ſo erhält man durch die Gleichung (5):

$$dv = \frac{d \cdot uv - v\,du}{u}, \text{ oder } d \cdot \frac{r}{u} = \frac{u\,dr - r\,du}{u^2} \qquad (10)$$

Für $r = 1$ hat man:

$$d \cdot \frac{1}{u} = -\frac{du}{u^2}. \qquad (11)$$

§. 56. In dem Vorhergehenden haben wir y als eine unmittelbare Function der unabhängigen Veränderlichen x betrachtet; aber wenn x ſelbſt eine Function der Veränderlichen t wäre und man zugleich:

$$y = fx, \; x = \varphi t$$

hätte, ſo wäre das Differenzial dx nicht mehr conſtant und würde durch die Gleichung:

$$dx = \varphi' t \cdot dt$$

gegeben, woraus folgte:

$$dy = f' x \cdot \varphi' t \cdot dt,$$

oder wenn man zu den Differenzialcoefficienten übergeht:

$$\frac{dy}{dt} = f' x \cdot \varphi' t = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Dieſe Gleichung iſt der Ausdruck der Regel für die Bildung der Ableitungen mittelbarer Functionen, welche bereits in §. 40 aufgeſtellt iſt, und es iſt mit keiner Schwierigkeit verbunden, ſie zu verallgemeinern.

§. 57. Wenn man die beiden Theile der Gleichung:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

differenzirt, indem man die Veränderliche x nicht mehr als die unabhängige Veränderliche und folglich ihre Veränderung nicht als gleichförmig oder dx nicht als eine conſtante Größe betrachtet; ſo hat man vermöge der Formel (10), wenn man $r = dy$, $u = dx$ ſetzt:

$$dy' = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^2}$$

und folglich:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3} \qquad (12)$$

Wenn x und y als Functionen der unabhängigen Veränderlichen t durch Gleichungen von der Form:

$$x = \varphi t,\ y = \psi t$$

gegeben ſind, ſo ergibt ſich daraus:

$$dx = \psi' t\,dt,\ dy = \psi' t\,dt,$$
$$d^2x = \varphi'' t\,dt^2,\ d^2y = \psi'' t\,dt^2,$$

und wenn man dieſe Werthe in die Formel (12) ſubſtituirt hat, ſo fällt dt als gemeinſchaftlicher Factor der beiden Glieder des Verhältniſſes hinaus und man kommt wieder auf die Gleichung (d) in §. 41.

Durch ähnliche Rechnungen fände man die Formeln wieder, durch welche die höhern Ableitungen y''', y^{IV}, ... als Functionen der Differenziale: dy, d^2y, d^3y, d^4y, ...; dx, d^2x, d^3x, d^4x ....., ausgedrückt werden, wenn man das Differenzial dx nicht mehr als conſtant betrachtet; aber um dieſe Rechnungen bequem verrichten zu können, muß man ſich mit der Anwendung der Regeln der Differenzialrechnung auf algebraiſche Functionen wohl vertraut machen, und es ſoll daher das folgende Kapitel dieſem Gegenſtande gewidmet werden.

Will man wieder zu dem Falle zurückkehren, wo x als unabhängige veränderliche Größe betrachtet wird, ſo ſetzt man in der Gleichung (12), $d^2x = 0$ und man kommt wieder auf die Formel:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

wie es ſein muß. Wenn man dagegen y zur unabhängigen Veränderlichen nehmen will, ſo ſetzt man $d^2y = 0$, und man erhält die Formel:

$$y'' = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

welche mit der Formel (e) des weiter oben angeführten § identiſch iſt.

Zweites Buch.

Differenzirung der entwickelten Functionen mit einer einzigen veränderlichen Größe.

Erſtes Kapitel.

Differenzirung der algebraiſchen und transcendenten Functionen.

§. 58. In den beiden vorhergehenden Kapiteln haben wir die allgemeinen Principien der Ableitung oder der Differenzirung durchgenommen, welche Principien auf beliebige Functionen anwendbar und von den beſonderen Verfahrungsarten unabhängig ſind, durch welche man in den einzelnen Fällen die Ableitungen oder die Differenziale einer gegebenen Function erhalten kann. Dieſe Principien finden ſtatt, wenn man auch die Zahlenwerthe der abgeleiteten Functionen oder Differenzialcoefficienten nur näherungsweiſe und für einzelne Werthe der unabhängigen Veränderlichen angeben kann (§. 44), wie dieſes in Beziehung auf die empiriſchen Functionen der Fall iſt, welche nur durch eine Tafel gegeben ſind, oder wenn man in einer einzigen mathematiſchen Formel die genauen Werthe der Differenzialcoefficienten für beliebige Werthe der unabhängigen Veränderlichen zuſammenfaſſen kann, wie dieſes bei den bekannten algebraiſchen und transcendenten Functionen der Fall iſt. *)

---

*) Es wird nicht unzweckmäßig ſein, wenn wir dieſe Principien hier theils auf eine andere Weiſe abzuleiten und theils zu vervollſtändigen ſuchen.

Wenn $y = u \cdot v$ iſt, wo u und v zwei Functionen von x ſind, ſo iſt:

$$\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = uv + v\Delta u + (u+\Delta u)\Delta v - uv$$
$$= v \cdot \Delta u + (u+\Delta u)\Delta v,$$

alſo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + (u+\Delta u) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

folglich, wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

Oder, Wenn $y = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ iſt, ſo iſt:

$$\Delta y = \varphi(x+\Delta x) \cdot \psi(x+\Delta x) - \varphi(x)\,\psi(x)$$
$$= [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)]\,\psi(x+\Delta x) + [\psi(x+\Delta x) - \psi(x)]\,\varphi(x),$$

folglich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \cdot \psi(x+\Delta x) + \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} \cdot \varphi(x),$$

und wenn man zu den Grenzen übergeht:

Vermöge der eben erwähnten allgemeinen Principien (§. 55 u. folg.) iſt das Problem der Differenzirung der algebraiſchen, logarithmiſchen, exponen-

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \cdot \psi(x) + \psi'(x) \cdot \varphi(x).$$

Wenn $y = \frac{u}{v}$ iſt, ſo iſt:

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv+v\,.\,\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v+\Delta v)} = \frac{v\,.\,\Delta u - u\,.\,\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

folglich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v - \frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot u}{v(v+\Delta v)} \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}\cdot v - \frac{dv}{dx}\cdot u}{v^2} = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Oder, wenn $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ iſt, ſo iſt:

$$\Delta y = \frac{\varphi(x+\Delta x)}{\psi(x+\Delta x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\psi(x)\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\psi(x+\Delta x)}{\psi(x)\,\psi(x+\Delta x)}$$
$$= \frac{\psi(x)[\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)] - \varphi(x)[\psi(x+\Delta x) - \psi(x)]}{\psi(x)\,.\,\psi(x+\Delta x)},$$

folglich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\psi(x).\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} - \varphi(x).\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}}{\psi(x)\;\psi(x+\Delta x)}$$

und:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x)\,\varphi'(x) - \psi'(x)}{[\psi(x)]^2}.$$

Wenn man die für die Ableitungen einer Summe, oder Differenz, eines Productes oder Quotienten zweier Functionen von x erhaltenen Reſultate näher betrachtet, ſo ſieht man, daß man die Ableitung einer ſolchen zuſammengeſetzten Function erhält, wenn man ſucceſſive jede der einzelnen Functionen, woraus die zuſammengeſetzte beſteht, differenzirt, indem man die andere Function als eine Conſtante betrachtet und die erhaltenen partiellen Reſultate in eine Summe bringt.

Dieſe Regel läßt ſich in der That auf folgende Weiſe allgemein darthun. Es ſei:

$$y = f(v, w),$$

wo v, w zwei Functionen von x ſind, ſo hat man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(v+\Delta v, w+\Delta w) - f(v, w)}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(v+\Delta v, w) - f(v, w)}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{f(v+\Delta v, w+\Delta w) - f(v+\Delta v, w}{\Delta w}\cdot\frac{\Delta w}{\Delta x},$$

und folglich, wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}.$$

Wenn:

$$y = f(u, v, w, \ldots.)$$

wäre, wo u, v, w, ... lauter Functionen von x ſind, ſo hätte man allgemein:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\cdot\frac{dw}{dx} + \ldots.$$

Folglich gilt die obige Regel allgemein, d. h. man erhält die Ableitung einer wie immer zuſammengeſetzten Function, wenn man ſie ſucceſſive in Beziehung auf jede der einzelnen Functionen, woraus ſie beſteht, differenzirt und die

tiellen und trigonometriſchen Functionen auf die Differenzirung der drei folgenden Elementarfunctionen zurückgeführt:

1) $y = x^m$, wo der Exponent m einen beliebigen Werth hat.

2) $y = \log. x$, was zugleich das Differenzial der umgekehrten Function $x = a^y$ gibt (wo a die Baſis des Logarithmenſyſtemes bezeichnet), oder durch eine Vertauſchung der Buchſtaben, das Differenzial der Exponentialfunction $y = a^x$.

3) $y = \sin. x$, woraus ſich die Differenziale der übrigen trigonometriſchen Functionen und der Kreisbogen ergeben, welche die umgekehrten Functionen derſelben ſind.

Wenn man dieſe Elementarfunctionen zu differenziren weiß, ſo gibt die Regel für die Differenzirung der mittelbaren Functionen die Differenziale beliebiger zuſammengeſetzter Functionen, welche ſich durch die in der Algebra und Trigonometrie üblichen Zeichen entwickelt ausdrücken laſſen.

§. 59. Betrachten wir zunächſt die Function x^m. Wenn der Exponent m eine ganze poſitive Zahl iſt, ſo gibt die Gleichung (6) in §. 55, nachdem man darin $u = v = w \ldots\ldots = x$ geſetzt hat:

$$\frac{d \cdot x^m}{x^m} = m \frac{dx}{x},$$

oder:

$$d \cdot x^m = m x^{m-1} dx. \text{*)} \qquad (a)$$

---

erhaltenen einzelnen Reſultate ſummirt, wobei das in §. 40 bewieſene Princip in Anwendung gebracht wird, nämlich, daß man, wenn

$$y = f(v) \text{ und } v = \varphi(x)$$

iſt, hat:

$$y' = f'(v) \cdot \varphi'(x).$$

Was vorhin von den Ableitungen geſagt iſt, gilt offenbar auch von den Differenzialen.

Wenn ferner $y = f(x)$ die directe Function, $f'(x)$ ihre Ableitung, $x = \varphi(y)$ inverſe Function $\varphi'(y)$ ihre Ableitung bezeichnet; ſo hat man:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}, \text{ folglich } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ oder } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Z. d. Ueberſ.

*) Wenn $y = x^n$ iſt, wo n eine ganze poſitive Zahl bezeichnet, ſo hat man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x) - x} = (x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2} \cdot x + (x+\Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \ldots + x^{n-1},$$

folglich:

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}, \text{ oder } dy = n x^{n-1} dx.$$

Wenn $y = x^{\frac{m}{n}}$, $y = x^{-m}$, $y = x^{-\frac{m}{n}}$ iſt, ſo laſſen ſich dieſe Fälle leicht auf den erſten Fall zurückführen, wenn man $x^{\frac{1}{n}} = z$ ſetzt.

Der von dem Verfaſſer für die Differenzirung von $x^{\frac{p}{q}}$ befolgte Gang ſetzt als bewieſen, oder für ſich klar voraus, daß, wenn für jeden Werth von x ſtets $f(x) = \varphi(x)$ iſt, auch $f'(x) = \varphi'(x)$ ſein muß. In der That, aus $f(x) = \varphi(x)$ folgt $f(x + \Delta x) = \varphi(x + \Delta x)$, $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$, $f'(x) + \mu = \varphi'(x) + \nu$, wo μ und ν zwei Größen bezeichnen, welche mit Δx zugleich verſchwinden. Folglich iſt $f'(x) = \varphi'(x)$.

Z. d. Ueberſ.

Wenn m ein poſitiver Bruch $\frac{p}{q}$ iſt, wo p und q ganze poſitive Zahlen bezeichnen, ſo ſetze man $x^{\frac{p}{q}} = z$ folglich $x^p = z^q$, ſo erhält man, wenn man nach der Formel (a) differenzirt:

$$px^{p-1}\,dx = qz^{q-1}\,dz,$$

und hieraus folgt:

$$dz = d \cdot x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}\,dx,$$

ſo daß die Formel (a) für alle poſitiven und commenſurabeln Werthe von m bewieſen iſt.

Wir wollen nun annehmen, daß m einen negativen Werth $= -n$ habe, wo n eine commenſurabele poſitive Zahl bezeichnet, ſo hat man, wenn man in der Gleichung (11) des §. 55, $u = x^n$ ſetzt:

$$d \cdot x^m = d \cdot \frac{1}{x^n} = -\frac{d \cdot x^n}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}\,dx = mx^{m-1}\,dx,$$

wodurch die Formel (a) für alle poſitiven und negativen commenſurabelen Werthe des Exponenten m bewieſen iſt.

Hieraus darf man ſchließen, daß ſie auch für incommenſurabele Werthe von m ſtatt finden wird. Denn wir wollen annehmen, daß man, wenn m eine incommenſurabele Zahl iſt, habe:

$$\frac{d \cdot x^m}{dx} = mx^{m-1} + \varphi x,$$

und es ſei m' eine commenſurabele Zahl, welche von m beliebig wenig verſchieden ſein kann. Außerdem wollen wir durch x_1, x_0 zwei Werthe von x bezeichnen, welche durch ein endliches Intervall von einander getrennt, und ſo gewählt ſind, daß die Function φx in dieſem Intervalle das Zeichen nicht ändert, was immer möglich iſt; ſo hat man:

$$x_1^m - x_0^m = \int_{x_0}^{x_1} mx^{m-1} \cdot dx + \int_{x_0}^{x_1} \varphi x \cdot dx$$

$$x_1^{m'} - x_0^{m'} = \int_{x_0}^{x_1} m'x^{m'-1}\,dx;$$

folglich:

$$x_1^m - x_1^{m'} - (x_0^m - x_0^{m'}) = \int_{x_0}^{x_1} mx^{m-1} \cdot dx - \int_{x_0}^{x_1} m'x^{m'-1} \cdot dx + \int_{x_0}^{x_1} \varphi x\,dx.$$

Aber wenn die Differenz $m - m'$ ohne Ende gegen Null convergirt, ſo convergiren die Größen:

$$x_1^m - x_1^{m'},\quad x_0^m - x_0^{m'},$$

$$\int_{x_0}^{x_1} mx^{n-1} \cdot dx - \int_{x_0}^{x_1} m'x^{m'-1} \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} (mx^{m-1} - m'x^{m'-1})\,dx$$

auch ohne Ende gegen Null; folglich muß das beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi x\,dx,$$

welches nur von m' abhängt, von ſelbſt verſchwinden, und da die Grenzen des Integrales ſo gewählt ſind, daß φx zwiſchen dieſen Grenzen ſein Zeichen nicht ändert, ſo muß die Function φx für jeden Werth von x Null ſein.

Zwei beſondere Werthe von m, welche in den Anwendungen häufig vorkommen, nämlich $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ ſind hier zu bemerken, und man hat:

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \quad d \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{dx}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 60. Da die Formel (a) für $y = x^m$ gibt:

$$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1},$$

ſo erhält man durch eine zweite Differenzirung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2};$$

und im Allgemeinen:

$$\frac{d^iy}{dx^i} = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-i+1)x^{m-i}.$$

Wenn der Exponent m eine ganze poſitive Zahl iſt, ſo reducirt ſich der Differenzialcoefficient der m^{ten} Ordnung auf die conſtante Zahl:

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

und folglich ſind die Differenzialcoefficienten der höheren Ordnungen Null. Dieſe Eigenſchaft der Function x^m, wenn m eine ganze poſitive Zahl iſt, kommt auch jeder andern ganzen und rationalen algebraiſchen Function von x zu, weil ſich eine Function dieſer Art in eine endliche Reihe von Monomen:

$$Ax^m + Bx^n + Cx^p + \text{etc.},$$

entwickeln läßt, wo $m, n, p, \ldots\ldots$ ganze poſitive Zahlen ſind. Wenn m den höchſten Exponenten bezeichnet, ſo iſt nach dem Vorhergehenden klar, daß ſich der Differenzialcoefficient der m^{ten} Ordnung der in Rede ſtehenden Function auf die conſtante Zahl:

$$Am(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

reducirt, und daß die Differenzialcoeffizienten der höhern Ordnung verſchwinden.

§. 61. Zur Beſtimmung des Differenziales der transcendenten Function:

$$y = \log. x$$

wollen wir uns unmittelbar der Betrachtung der Grenzen bedienen, ſo haben wir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log.(x+\Delta x) - \log. x}{\Delta x} = \frac{\log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Das Verhältniß $\frac{\Delta x}{x}$ convergirt mit Δx zugleich ohne Ende gegen Null, ſo lange nicht $x = 0$ iſt, ſo daß man, um $\frac{dy}{dx}$ zu erhalten, nur die Grenze zu beſtimmen braucht, gegen welche der Ausdruck:

$$\frac{\log.(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = \log.(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

und folglich die Grenze gegen welche der Ausdruck:

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}, \qquad (E)$$

convergirt, wenn die Zahl ε ohne Ende gegen Null convergirt.

Nun kann man aber die Zahl ε immer ohne Ende gegen Null convergiren laſſen, wenn man:

$$\varepsilon = \frac{1}{n}$$

ſetzt und für n eine immer größer werdende poſitive Zahl nimmt. Die Binomialformel gibt alsdann:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\nu+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\nu}\cdot\frac{1}{n^\nu} + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(n-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

oder:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\nu}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2.3..\nu(\nu+1)..n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right) \cdot (n)$$

Alle Glieder dieſer Reihe von dem dritten an nehmen offenbar fortwährend ab, und wir behaupten ferner, daß man n und ν immer ſo groß annehmen kann, daß, wenn man die Reihe bei dem Gliede:

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\nu}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right) \qquad (\nu)$$

abbricht, die Summe der vernachläſſigten Glieder kleiner werden kann, als jede gegebene Größe; denn dieſe Summe iſt kleiner als:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots\nu(\nu+1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots\nu(\nu+1)(\nu+2)} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots\nu(\nu+1)\ldots\ldots n},$$

und um ſo mehr kleiner als:

$$\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu+1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}};$$

und folglich wieder um ſo mehr kleiner, als die Summe der ins Unendliche fortlaufenden Reihe:

$$\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu+1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \text{etc.}$$

nämlich als:

$$\frac{1}{2^{\nu-1}},$$

welche für einen ſchicklichen Werth von ν kleiner werden kann, als jede gegebene Größe.

Wird die Reihe (n) mit dem Gliede (ν) geſchloſſen und man nimmt für n eine immer größer werdende Zahl, ſo convergirt der Werth dieſer Reihe ohne Ende gegen den der Reihe:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\nu}.$$

Die Grenze, gegen welche die Zahl (E) für immer kleiner werdende Werthe von ε convergirt, wird also durch dieſe letzte Reihe mit einer deſto größeren Annäherung ausgedrückt, je größer die Zahl ν angenommen wird, oder je größer die Anzahl der in Betracht gezogenen Glieder der Reihe iſt. Wenn man alſo die in Rede ſtehende Grenze, wie gewöhnlich, mit e bezeichnet, ſo hat man:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}, \quad (e)$$

wo der zweite Theil dieſer Gleichung, eine ins Unendliche fortlaufende und nach der Regel in §. 26 convergente Reihe iſt. Uebrigens ſind alle Glieder der Reihe:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

kleiner, als die entſprechenden Glieder der Reihe:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \text{etc.},$$

welche convergent iſt und die Einheit zur Summe hat. Folglich liegt der Werth von e zwiſchen 2 und 3.

§. 62. Wenn man die Summe der 14 erſten Glieder der Reihe (e) nimmt, ſo findet man:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ \ldots\ldots$$

Wenn man nur die 9 erſten Decimalſtellen des Werthes von e berechnet hatte, ſo hätte man auf den Gedanken kommen können, daß die Zahl e durch einen periodiſchen Decimalbruch ausgedrückt würde, und folglich einen commenſurablen Werth hätte. Allein dieſe Induction würde irrig ſein; denn wenn e einem commenſurabeln Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ gleich ſein könnte, ſo daß man hätte:

$$\frac{\mu}{\nu} = 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu(\nu+1)} + \text{etc.},$$

wo μ, ν ganze Zahlen bezeichnen; ſo erhielte man, wenn man alle Glieder durch das Product $1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu$ multiplicirte:

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu-1)\,\mu - [2^2\cdot 3\cdot 4\ldots\nu + 3\cdot 4\ldots\nu + 4\cdot 5\ldots\nu + \ldots\ldots + 1]$$
$$= \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \text{etc.}$$

Die Summe der Reihe, welche den zweiten Theil der vorhergehenden Gleichung bildet, müßte alſo eine ganze poſitive oder negative Zahl ſein, während ſie poſitiv und kleiner als die Summe $\frac{1}{\nu}$ der Reihe:

$$\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{(\nu+1)^2} + \frac{1}{(\nu+1)^3} + \text{etc.}$$

iſt.

Auch läßt ſich, aber nicht ſo einfach, beweiſen, daß alle Potenzen der Zahl e mit rationalen Exponenten irrational ſind, ſo daß e keine Wurzel einer binomiſchen algebraiſchen Gleichung mit rationalen Coefficienten ſein kann.

Unter transcendenten Zahlen verſteht man diejenigen, welche nicht Wurzeln irgend einer algebraiſchen Gleichung mit rationalen Coefficienten ſein können, und man hat Grund zu glauben, daß die Zahl e, ſowie die Zahl π, womit ſie in naher Verwandtſchaft ſteht, transcendente Zahlen ſind, obgleich

dieſer negative Character weder für die eine, noch für die andere auf ganz entſchiedene Weiſe dargethan iſt.

§. 63. Die Gleichung:

$$e = \text{Grenze von } (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

iſt nur unter der Bedingung bewieſen, daß die Zahl ε gegen Null convergirt, indem ſie eine Reihe poſitiver Werthe durchläuft; denn die Binomialformel, worauf wir uns geſtützt haben, wird in den Elementen, obgleich ſie, wie man in der Folge ſehen wird, für beliebige Werthe des Exponenten n ſtattfindet, gewöhnlich nur für ganze poſitive Werthe von n bewieſen. Um ſich dieſer Beſchränkung zu überheben, kann man ſetzen:

$$1+\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon'},$$

ſo daß ε' mit ε zugleich verſchwindet und negativen Werthen von ε poſitive Werthe von ε' entſprechen. Hieraus ergibt ſich:

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = (1+\varepsilon')^{\frac{1}{\varepsilon'}}(1+\varepsilon'),$$

und folglich:

$$\text{Grenze von } (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \text{Grenze von } (1+\varepsilon')^{\frac{1}{\varepsilon'}} = e,$$

ſo daß die Grenze dieſelbe bleibt, was für ein Zeichen ε auch haben mag.

§. 64. Für jedes Zeichen von $\frac{dx}{x}$ hat man alſo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log. e, \text{ oder } dy = \frac{dx}{x}\cdot\log. e,$$

wo y den Logarithmus von x für eine beliebige Grundzahl bezeichnet und der Logarithmus von e ſich auf dieſelbe Grundzahl als der von x bezieht.

Wenn man alſo die transcendente Zahl e zur Grundzahl der Logarithmen nähme, ſo hätte man blos:

$$dy = \frac{dx}{x}.$$

Die Logarithmen, deren Grundzahl e iſt, werden *natürliche*, *hyperboliſche*, oder auch wohl nach dem Namen des Erfinders *Neper* der Logarithmen, *neperſche* Logarithmen genannt.

Aber unmittelbar nach *Neper's* Entdeckung im Jahre 1614 ſahe *Briggs*, Profeſſor der Mathematik zu Oxford, den Vortheil ein, welchen es für die numeriſchen Rechnungen gewähren würde, wenn man nicht, wie *Neper*, die Zahl e, ſondern die Grundzahl 10 unſeres decadiſchen Zahlenſyſtemes zur Grundzahl der Logarithmen nähme, und er berechnete Logarithmentafeln für dieſe Grundzahl. Allein in den höheren Zweigen der Mathematik deutet das Zeichen log. immer natürliche oder neper'ſche Logarithmen an, wofern nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt iſt, welchem Gebrauche auch wir uns anſchließen werden.

Uebrigens iſt einleuchtend, daß man von den für eine gewiſſe Grundzahl berechneten Logarithmen zu den für eine andere Grundzahl berechneten übergehen kann, wenn man die erſten durch einen conſtanten Factor multiplicirt. Wir wollen allgemein durch $\log._a$ die Logarithmen aus dem Syſteme von der Grundzahl a bezeichnen und es ſei:

$$y = \log._a x, \quad Y = \log._b x,$$

ſo hat man umgekehrt:

$$x = a^y,\ x = b^Y,\ a^y = b^Y,$$

woraus folgt, wenn man nun die Logarithmen aus einem beliebigen Syſteme nimmt:

$$y \log. a = Y \log. b,$$

oder:

$$\log._b x = \log._a x \cdot \frac{\log. a}{\log. b}.$$

Wenn y den neper'ſchen und Y den gewöhnlichen oder brigg'ſchen Logarithmus der Zahl x bezeichnet, ſo hat man:

$$Y = y \log. e,$$

wo der Logarithmus von e aus dem gewöhnlichen Logarithmenſyſteme von der Grundzahl 10 genommen iſt. Die Zahl, durch welche man die neper'ſchen Logarithmen multipliciren muß, um die entſprechenden gewöhnlichen Logarithmen zu erhalten, wird der Modulus genannt, und wir werden ſpäter ſehen, wie man den Werth desſelben bequem berechnen kann.

§. 65. Da die Gleichung:

$$y = \log._a x,$$

welche gleichbedeutend iſt mit:

$$x = a^y,$$

gibt:

$$dy = \frac{dx}{x} \log._a e,$$

ſo hat man umgekehrt:

$$dx = x\,dy \cdot \frac{1}{\log._a e}$$

oder:

$$d \cdot a^y = \frac{1}{\log._a e} \cdot a^y\,dy,$$

oder endlich, wenn man x für y ſetzt, weil die unabhängige Veränderliche mit x bezeichnet zu werden pflegt:

$$d \cdot a^x = \frac{1}{\log._a e} \cdot a^x\,dx.$$

Außerdem hat man:

$$\log._a e = \frac{\log. e}{\log. a},$$

wo die im zweiten Theile dieſer Gleichung vorkommenden Logarithmen aus einem beliebigen Syſteme, z. B. aus dem gewöhnlichen, genommen ſind; folglich iſt:

$$d \cdot a^x = \frac{\log. a}{\log. e} \cdot a^x\,dx, *)$$

---

*) Dieſes Reſultat kann man nach dem Vorhergehenden auch leicht direct erhalten; denn wenn $y = a^x$ iſt, ſo iſt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Setzt man nun $a^{\Delta x} - 1 = \varepsilon$, ſo iſt $a^{\Delta x} = 1 + \varepsilon$ und $\Delta x = \log._a (1+\varepsilon)$; folglich:

also:

$$d \cdot e^x = e^x dx,$$

oder auch:

$$\frac{d \cdot e^x}{dx} = e^x.$$

Der Differenzialcoeffizient der ersten Ordnung der Function $y = e^x$ und folglich die Differenzialcoefficienten oder abgeleiteten Functionen aller Ordnungen sind also mit der ursprünglichen Function identisch. Diese characteristische und äußerst merkwürdige Eigenschaft gibt schon zum Voraus den Grund an, weßhalb die Exponentialfunction e^x und die Zahl e selbst in der Theorie der Functionen eine so wichtige Rolle spielt. Wir wollen der Kürze wegen:

$$V = \frac{\log. a}{\log. e}, \text{ und } y = a^x$$

setzen, so kommt:

$$\frac{dy}{dx} = Vy,$$

oder nach der Newton'schen Bezeichnung (§. 42):

$$\dot{y} \frac{\dot{Y}}{\dot{x}} = Vy,$$

und außerdem weiß man, daß für $x = 0$ die Fluente $y = 1$ ist.

Wenn man sich also zwei Punkte ξ, η (Fig. 28) denkt, wovon sich der erste auf der geraden Linie OX mit einer constanten Geschwindigkeit, oder Flurion und der zweite auf der geraden Linie O'Y mit einer seiner Entfernung von dem festen Punkte O' proportionalen Geschwindigkeit bewegt, so daß er in A oder um die Längeneinheit vom Punkte O' entfernt ist, wenn sich der Punkt ξ in O befindet, und wenn man endlich annimmt, daß die constante Geschwindigkeit des Punktes ξ, zur Einheit genommen, und daß die veränderliche Ge-

---

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{\varepsilon}{\log_a (1+\varepsilon)} = \frac{a^x}{\frac{\log_a (1+\varepsilon)}{\varepsilon}}$$

und:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log_a e} \cdot a^x = \log_e a \cdot a^x = \frac{\log. a}{\log. e} \cdot a^x,$$

weil aus $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$ folgt:

$$\frac{\log_a (1+\varepsilon)}{\varepsilon} = \log_a e = \frac{1}{\log_e a} = \frac{\log. e}{\log. a}.$$

Uebrigens kann man die Grenze von $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ leicht unmittelbar und ohne Anwendung von Reihenentwickelungen erhalten, wenn man bemerkt, daß für jeden Werth von a, b, Δx ist:

$$a^{\Delta x} = b^{\frac{\log. a}{\log. b} \cdot \Delta x}.$$

Wenn $y = f(x) = a^x$ ist, so ist auch $f'(x) = \log_e a \cdot a^x$ und $q(y) = \log_a y$, folglich:

$$q'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\log_e a \cdot a^x} = \frac{1}{\log_e a} \cdot \frac{1}{y}.$$

Z. d. Ueberf.

ſchwindigkeit des Punktes $\eta = V$ iſt, wenn derſelbe durch den Punkt A geht; ſo ſtellen die veränderlichen Entfernungen $O\xi$, $O'\eta$, in jedem Augenblicke die Werthe der Veränderlichen x, y dar, oder mit andern Worten, die Fluente $O\xi$ iſt in dem Logarithmenſyſteme von der Grundzahl a der Logarithmus der durch die Fluente $O\eta$ dargeſtellten Zahl.

Wenn man die Geſchwindigkeit V der Einheit oder der conſtanten Geſchwindigkeit des Punktes ξ gleich annimmt, welches die natürlichſte oder am wenigſten willkührliche Vorausſetzung iſt, welche man machen kann, ſo iſt $O\xi$ der natürliche oder neper'ſche Logarithmus von $O'\eta$.

Gerade auf dieſe Weiſe hat ſich Neper die Entſtehung der Logarithmen gedacht, und er hat ebenſo der Vorläufer Newton's bei der Erfindung der Theorie der Fluxionen ſein müſſen, wie Kepler und Cavaleri als die Vorläufer Leibnitz's in der Theorie der Infiniteſimalgrößen betrachtet werden können.

Es iſt ſehr bemerkenswerth, daß Neper, dem gewöhnlichen Gange der Erfinder entgegen, die logarithmiſche Function unmittelbar durch ihren weſentlichen und hervorragenden Character definirt hat, ſtatt von ihren ſecundären Eigenſchaften auszugehen, aus welchen man noch jetzt die Logarithmen in den Elementen ableitet, und welche die Grundlage ihrer gewöhnlichen Anwendungen bilden.

§. 66. Wir haben vorhin aus dem Differenziale der logarithmiſchen Function das der Exponentialfunction abgeleitet; es läßt ſich aber auch ganz einfach daraus das Differenzial der Function x^m ableiten, indem der Exponent m einen beliebigen reellen, poſitiven, oder negativen, commenſurabeln, oder incommenſurabeln Werth hat. Denn aus:

$$y = x^m,$$

folgt:

$$\log. y = m \log. x,$$

und wenn man differenzirt:

$$\frac{dy}{y} = m \frac{dx}{x};$$

folglich:

$$dy = m \frac{y}{x} dx = mx^{m-1} dx. \qquad (a)$$

Aber alsdann ſetzt der Beweis dieſer letzten Formel den der Binomialformel voraus, wenigſtens für den Fall eines ganzen poſitiven Exponenten, wogegen der zuerſt gegebene Beweis derſelben Bedingung nicht unterliegt und im Gegentheil zur Aufſtellung der Binomialformel dienen kann, wie man in der Folge ſehen wird.

Umgekehrt, wenn die Formel (a) bewieſen iſt, ſo ergibt ſich daraus die Ableitung der logarithmiſchen Function. Denn wenn φx die Function log. x und $\varphi' x$ ihre unbekannte Ableitung bezeichnet, ſo hat man:

$$\varphi(x^m) = m\varphi x,$$

und wenn man nach der Regel für die Differenzirung der mittelbaren Functionen differenzirt, ſo erhält man:

$$\varphi'(x^m) \cdot \frac{d \cdot x^m}{dx} = m\varphi' x,$$

oder vielmehr wegen der Gleichung (a):

$$x^m \varphi'(x^m) = x\varphi' x.$$

Dieſe letzte Gleichung kann nur in ſo fern für beliebige Werthe von x und m ſtattfinden, als $x\varphi' x$ ſich auf eine Conſtante reducirt, deren Werth man

erhält, wenn man in dem erſten Theile der Gleichung $m = o$ ſetzt. Wenn man alſo dieſe Conſtante $\varphi' (1)$ mit k bezeichnet, ſo kommt:

$$\varphi' x = \frac{k}{x}, \text{ oder } d \cdot \log. x = \frac{k\,dx}{x},$$

woraus ſich alle vorhin erhaltenen Reſultate wieder ableiten laſſen.

§. 67. Wir wollen nun zu den trigonometriſchen Functionen übergehen und zunächſt

$$y = \sin. x$$

ſetzen, ſo haben wir, wenn wir auf dieſe transcendente Function unmittelbar wieder den Begriff der Grenzen anwenden:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin.(x+\Delta x) - \sin. x}{\Delta x} = \frac{\sin. \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cdot \cos.\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right).$$

Der Factor $\cos.\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right)$ convergirt gegen die Grenze $\cos. x$, wenn Δx gegen Null convergirt und der Factor:

$$\frac{\sin. \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

hat die Einheit zur Grenze, wenn Δx gegen Null convergirt. Denn aus der Identität:

$$\frac{\sin. \varepsilon}{\tang. \varepsilon} = \cos. \varepsilon,$$

folgt, daß das Verhältniß des Sinus zur Tangente die Einheit zur Grenze hat, wenn der Bogen gegen Null convergirt, und außerdem iſt nach einem bekannten Principe der Geometrie die Länge eines Kreisbogens immer größer, als die ſeines Sinus und kleiner, als die ſeiner Tangente.

Folglich hat um ſo mehr $\frac{\sin. \varepsilon}{\varepsilon}$ die Einheit zur Grenze. Folglich iſt:

$$\frac{dy}{dx} = \cos. x,$$

oder:

$$d \cdot \sin. x = \cos. x \cdot dx. \qquad (b)$$

Durch eine ganz ähnliche Rechnung fände man direct:

$$d \cdot \cos. x = -\sin. x \cdot dx. \qquad (c)$$

Wenn man übrigens:

$$\cos. x = \sin. z,$$

folglich:

$$z = \tfrac{1}{2}\pi - x$$

ſetzt, ſo erhält man:

$$d \cdot \cos. x = d \cdot \sin. z = \cos. z\,dz,$$

und da:

$$dz = -dx, \quad \cos. z = \sin. x$$

iſt, ſo kommt man wieder auf die Gleichung (c).

Aus den Differenzialen des Sinus und Coſinus laſſen ſich nun leicht die der übrigen trigonometriſchen Functionen ableiten. So hat man z. B.:

$$d \cdot \text{tang. } x = d\left(\frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}\right) = \frac{\text{cos. } x\, d \cdot \text{sin. } x - \text{sin. } x \cdot d \cdot \text{cos. } x}{\text{cos.}^2 x}$$

$$= \frac{(\text{cos.}^2 x + \text{sin.}^2 x)\, dx}{\text{cos.}^2 x} = \frac{dx}{\text{cos.}^2 x}, \quad *)$$

und durch ähnliche Rechnungen findet man:

$$d \cdot \text{cot. } x = -\frac{dx}{\text{sin.}^2 x},$$

$$d \cdot \text{sec. } x = \frac{\text{sin. } x\, dx}{\text{cos.}^2 x}$$

$$d \text{ cosec. } x = -\frac{\text{cos. } x\, dx}{\text{sin.}^2 x}.$$

Aus $y = \text{sin. } x$ ergibt ſich nach dem Vorhergehenden:

$$dy = \text{cos. } x dx = \sqrt{1 - y^2} \cdot dx,$$

und man hat daher umgekehrt:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}},$$

oder:

$$d \cdot \text{arc sin. } y = \frac{dy}{\sqrt{1 - x^2}},$$

oder wenn man y mit x vertauſcht, um die unabhängige Veränderliche immer mit x zu bezeichnen:

---

*) Wenn $y = \text{tang. } x$, ſo hat man auch:

$$\Delta y = \text{tang. } (x + \Delta) - \text{tang. } x = \frac{\text{tang. } x + \text{tang. } \Delta x}{1 - \text{tang. } x \,.\, \text{tang. } \Delta x} - \text{tang. } x$$

$$= \frac{\text{tang. } \Delta x\, (1 + \text{tang.}^2 x)}{1 - \text{tang. } x \text{ tang. } \Delta x},$$

folglich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{tang. } \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1 + \text{tang.}^2 x}{1 - \text{tang. } x \text{ tang. } \Delta x},$$

und:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \text{tang.}^2 x = \text{sec. } x = \frac{1}{\text{cos.}^2 x},$$

oder:

$$dy = \frac{dx}{\text{cos.}^2 x}.$$

Oder wenn $y = \text{tang. } x = \frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}$, iſt, ſo iſt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\text{sin. } (x + \Delta x)}{\text{cos. } (x + \Delta x)} - \frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}\right] = \frac{\text{sin. } \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\text{cos. } (x + \Delta x) \text{ cos. } x},$$

folglich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{cos.}^2 x}, \text{ oder } dy = \frac{dx}{\text{cos.}^2 x}.$$

Uebrigens erhält man alle dieſe Reſultate unmittelbar durch Anwendung der oben mitgetheilten allgemeinen Regel für die Differenzirung der zuſammengeſetzten Functionen. Z. d. Ueberſ.

$$d \cdot \text{arc sin. } x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \text{ *)}$$

Auf dieſelbe Weiſe findet man:

$$d \cdot \text{arc cos. } x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$d \cdot \text{arc tang. } x = \frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d \cdot \text{arc cot. } x = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

Zur Interpretation aller dieſer Formeln muß man ſich vorſtellen, daß, da der Halbmeſſer des Kreiſes zur Einheit genommen iſt, die Sinus und Coſinus poſitive oder negative echte Brüche ſind, deren Zahlenwerth, alſo zwiſchen Null und der Einheit liegt. Was die Kreisbogen anlangt, ſo ſind dieſelben nothwendig Zahlen, welche auf dieſelbe Maßeinheit bezogen werden, als die Sinus, Coſinus, Tangenten ꝛc., weil ſonſt die Formeln nicht homogen wären und die Relation:

$$\text{Grenze von } \frac{\sin. \varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

keinen Sinn hätte. Die Bogen müſſen alſo nicht durch die Anzahl ihrer Grade, ſondern durch die Verhältniſſe ihrer Länge zu der Länge des zur Einheit genommenen Halbmeſſers gegeben ſein. Wenn ein Bogen in Sexageſimalgraden durch die Zahl X^0 ausgedrückt wäre, ſo erhielte man die Zahl x, welche in die Formeln ſubſtituirt werden muß, durch die Proportion:

$$180^0 : X^0 = \pi : x,$$

wo π, wie gewöhnlich, die Länge des halben Kreisumfanges von dem Halbmeſſer gleich 1 bezeichnet.

Wenn man die Sexageſimalſecunde zur Winkeleinheit nimmt, wie dieſes bei genauen Rechnungen geſchieht, und der Bogen wird in Secunden durch die Zahl X'' ausgedrückt, ſo wird die Zahl x durch die Proportion:

$$648000'' : X'' = \pi : x$$

beſtimmt, woraus folgt:

$$x = \frac{X''}{206264{,}81\ldots}$$

Oft muß man den Werth eines Kreisbogens in Graden kennen, deſſen Länge der des Halbmeſſers des Kreiſes gleich iſt, und dieſer Werth iſt $= 57^0\ 17'\ 44'', 81 = 206264'', 81$.

---

*) Wenn $y = f(x) = \sin. x$ iſt, ſo iſt $f'(x) = \cos. x = \sqrt{1 - y^2}$, $\varphi(y) = \text{arc. sin. } y$, und folglich nach der Formel:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ iſt } \varphi'(y) = \frac{1}{\cos. x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Oder, wenn $x = \text{arc. sin. } y$ iſt, ſo iſt $y = \sin. x$, $\cos. x = \sqrt{1-y^2}$, $\Delta y = \sin. (x + \Delta x) - \sin. x = 2 \sin. \frac{\Delta x}{2} . \cos. \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, folglich:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\sin. \frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos. (x+\Delta x)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos. x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Z. d. Ueberſ.

Aus den Gleichungen (b) und (c) folgt:

$$\frac{d^2 \cdot \sin. x}{dx^2} = -\sin. x, \quad \frac{d^2 \cdot \cos. x}{dx^2} = -\cos. x.$$

Die beiden Functionen $y = \sin. x$, $y = \cos. x$ haben also die sehr merkwürdige gemeinschaftliche Eigenschaft, welche durch die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y$$

ausgedrückt wird.

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^{2i} \cdot \sin. x}{dx^{2i}} &= \pm \sin. x, \quad \frac{d^{2i} \cdot \cos. x}{dx^{2i}} = \pm \cos. x, \\ \frac{d^{2i+1} \cdot \sin. x}{dx^{2i+1}} &= \pm \cos. x, \quad \frac{d^{2i+1} \cos. x}{dx^{2i+1}} = \mp \sin. x, \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

wo die oberen oder unteren Zeichen genommen werden müssen, je nachdem die ganze Zahl i gerade oder ungerade ist.

§. 68. Aus den folgenden Beispielen sieht man, welchen Weg man bei der Differenzirung zusammengesetzter Functionen einschlagen muß.

Es sei zu differenziren:

1) $$y = (ax^m + b)^n$$

so setze man:

$$ax^m + b = u,$$

folglich:

$$y = u^n, \quad dy = nu^{n-1}\, du, \quad du = max^{m-1}\, dx,$$

und alsdann hat man:

$$dy = mna\,(ax^m + b)^{n-1} x^{m-1}\, dx.$$

2) $$y = \log. \sin. x,$$

so setze man:

$$\sin. x = u,$$

so ist:

$$y = \log. u, \quad dy = \frac{du}{u}, \quad du = \cos. x\, dx,$$

und endlich:

$$dy = \frac{dx}{\tang. x}.$$

3) $$y = \log. \{x + \sqrt{1 + x^2}\}.$$

Wenn man hierbei zwei Hülfsveränderliche:

$$u = x + \sqrt{1 + x^2}, \quad v = 1 + x^2,$$

anwendet, so erhält man:

$$dy = \frac{du}{u}, \quad du = dx + \frac{dv}{2\sqrt{v}}, \quad dv = 2\, xdx,$$

und nach verrichteten Reductionen:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4) $$y = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos. x + r'^2}}.$$

Man setze:

$$u = r^2 - 2rr' \cos. x + r'^2,$$

so ist:

$$y = \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad dy = -\frac{du}{2u^{\frac{3}{2}}}, \quad du = 2r' \sin. x dx,$$

und folglich:

$$dy = -\frac{rr' \sin. x\, dx}{(r^2 - 2rr' \cos x + r'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad *)$$

Zweites Kapitel.

Vergleichung der logarithmiſchen, Exponential- und Kreistranscendenten. — Moivre'ſche Formel und Grundbegriffe über die Theorie der Winkelſchnitte.

I. Vergleicher der logarithmiſchen, Exponential- und Kreistranscendenten.

§. 69. In dem vorhergehenden Kapitel ſind die Regeln zur Differenzirung der Exponential-, logarithmiſchen und Kreisfunctionen angegeben, welches die einzigen transcendenten Functionen ſind, die man in der Elementarmathematik betrachtet; allein dieſer Gegenſtand muß in verſchiedenen Beziehungen gründlicher unterſucht werden, weil er den Rechnungen der höhern Analyſis zur Grundlage dient.

Im Vorhergehenden haben wir geſehen, daß Neper von einer mit der Differenzialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad (a)$$

gleichbedeutenden Relation ausging, um die Exponentialfunction:

$$y = e^x,$$

oder, die logarithmiſche Function:

$$x = \log. y,$$

welche das Umgekehrte der erſten iſt, zu definiren. In der That drückt dieſe Differenzialgleichung in Verbindung mit der Bedingung, daß x für $y = 1$ verſchwindet, den weſentlichen Character beider transcendenten Functionen aus, indem ſie das ſehr einfache Geſetz beſtimmt, nach welchem ſich dieſe Functionen ſtetig ändern.

---

*) Die folgenden allgemeinen Formeln verdienen hier noch bemerkt zu werden:

Wenn $y = (f(x))^n$ iſt, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$.

Wenn $y = a^{f(x)}$ iſt, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \log.e\, a \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{\log. a}{\log. e} \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$.

Wenn $y = \log. f(x)$, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \log._a e \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\log. e}{\log. a} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Wenn $y = \sin. f(x)$, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \cos. f(x) \cdot f'(x)$.

Wenn $y = \text{arc. sin.} f(x)$, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$.

Z. d. Ueberſ.

Die Definitionen, welche man in den Elementen der Arithmetik und Algebra von den Logarithmen gibt, drücken nur ſecundäre Eigenſchaften der logarithmiſchen Function aus und ſind nur Folgerungen aus der urſprünglichen Definition.

Nach der Form der Gleichung (a) ſieht man leicht ein, welche Rolle die Exponentialfunction in dem Ausdrucke einer Menge von Naturerſcheinungen, und namentlich derjenigen ſpielen muß, welche ſich unter dem generiſchen Namen der Phänomene der Abſorption oder allmähliger Erlöſchung zuſammenfaſſen laſſen. Wenn man ſich z. B. einen bewegten Körper in einem widerſtehenden Mittel denkt, durch deſſen Wirkung er fortwährend einen Theil ſeiner Geſchwindigkeit verliert; ſo iſt der Widerſtand des Mittels oder die Abſorption der Geſchwindigkeit in einem unendlich kleinen Zeittheilchen offenbar von der Geſchwindigkeit des Körpers abhängig, indem derſelbe mit dieſer Geſchwindigkeit zunimmt, verſchwindet, wenn die Geſchwindigkeit Null wird, ſehr klein bleibt, wenn die Geſchwindigkeit ſehr klein iſt, und folglich für ſehr kleine Werthe der Geſchwindigkeit nahezu der Geſchwindigkeit des Körpers in jedem Augenblicke proportional iſt (§. 5). Man hat alſo eine Gleichung von der Form:

$$\frac{dy}{dt} = -ky,$$

wo y die als ſehr klein vorausgeſetzte Geſchwindigkeit, t die Zeit und k einen gewiſſen conſtanten Coefficienten bezeichnet. Dieſe Gleichung verwandelt ſich aber in folgende:

$$\frac{dy}{dx} = y,$$

wenn man $x = -kt$ ſetzt, und den Werth von y in dem Augenblicke, wo $t = 0$ oder $x = 0$ iſt zur Einheit nimmt, und aus dieſer letzten Gleichung folgt:

$$y = e^x = e^{-kt}, \text{ oder } t = -\frac{1}{k} \log. y.$$

Aehnliche Schlüſſe ließen ſich auf die allmählige Erlöſchung des Lichtes und der Wärme in abſorbirenden Mitteln, auf die Verluſte der Wärme und Electricität in Folge der Ausſtrahlung der Oberflächen, oder der Berührung eines umgebenden Mittels und auf alle ähnliche Erſcheinungen anwenden.

§. 70. Nach der weiter oben (§. 51) angegebenen Bezeichnungsart der beſtimmten Integrale, kann man ſetzen:

$$\log. y = \int_1^y \frac{dy}{y},$$

oder:

$$\log. x = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Die logarithmiſche Function iſt alſo nichts weiter, wie ein beſtimmtes Integral, und wir haben ſie nicht blos eine transcendente Function genannt, weil ſie ſich bis jetzt nicht hat algebraiſch ausdrücken laſſen, ſondern weil ſie, wie ſpäter bewieſen werden wird, weder explicite noch implicite durch einen algebraiſchen Ausdruck dargeſtellt werden kann. Dieſer Betrachtung zufolge müſſen wir die beſtimmten Integrale in Zukunft als neue transcendente Functionen anſehen, ſo oft ſie ſich nicht algebraiſch oder durch andere bereits bekannte transcendente Functionen ausdrücken laſſen.

Die transcendente Zahl e ist der Werth, welchen man der oberen Grenze des Integrales beilegen muß, damit der Werth desselben der Einheit gleich wird, oder mit andern Worten, e ist eine Constante, welche implicite durch die transcendente Gleichung:

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = 1.$$

bestimmt wird.

§. 71. Gesetzt, man suchte eine Function φx von solcher Beschaffenheit, daß für alle Werthe von x und z die Gleichung stattfindet:

$$\varphi x + \varphi z = \varphi(xz). \qquad (b)$$

Setzt man in dieser Gleichung $z = o$, so ergibt sich daraus:

$$\varphi x + \varphi(o) = \varphi(o),$$

so daß, wenn $\varphi(o)$ irgend einen endlichen Werth hätte, φx für alle Werthe von x Null wäre. Die gesuchte Function erfährt also für $x = o$ eine Unterbrechung der Stetigkeit.

In derselben Gleichung wollen wir $z = 1$ setzen, so erhalten wir:

$$\varphi x + \varphi(1) = \varphi(x), \text{ oder } \varphi(1) = o. \qquad (b_1)$$

Die Gleichung (b) kann man in Beziehung auf x und in Beziehung auf z differenziren, indem man darin successive x und z als veränderlich betrachtet, wodurch man nach bekannten Regeln erhält:

$$\varphi' x = z\varphi'(xz), \quad \varphi' z = x\varphi'(xz),$$

und folglich:

$$x\varphi' x = z\varphi' z.$$

Die Function φ ist also so beschaffen, daß das Product $x\varphi' x$ von x unabhängig ist, so daß man hat:

$$x\varphi' x = k,$$

wo k eine beliebige Constante bezeichnet, oder:

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{k}{x},$$

und da die Function φx für $x = 1$ verschwinden muß, so ergibt sich aus dieser letzten Gleichung:

$$\varphi x = k\int_1^x \frac{dx}{x} = k \log. x.$$

In der That drückt die Gleichung (b) die Eigenschaft aus, welche der gewöhnlichen Anwendung der Logarithmen zum Grunde liegt, und wir hätten, wie man eben gesehen hat, von dieser Gleichung oder von der Eigenschaft, welche sie ausdrückt, ausgehen können, um das Differenzial der logarithmischen Function zu finden.

§. 72. Es werde ferner eine andere Function ψ gesucht, welche durch die Gleichung:

$$\psi x \cdot \psi z = \psi(x + z) \qquad (c)$$

characterisirt wird, woraus folgt, wenn man $z = o$ setzt:

$$\psi(o) = 1. \qquad (c_0)$$

Wenn man die Gleichung (c) in Beziehung auf x und in Beziehung auf z differenzirt, so erhält man:

$$\psi' x \cdot \psi z = \psi'(x + z), \quad \psi x \cdot \psi' z = \psi'(x + z),$$

und folglich:

$$\frac{\psi' x}{\psi x} = \frac{\psi' z}{\psi z}.$$

Es muß alſo:

$$\frac{\psi' x}{\psi x} = a, \text{ oder } \frac{d\psi x}{dx} = a\psi x,$$

wo a eine beliebige Conſtante bezeichnet, welche wir zunächſt als reel vorausſetzen wollen. Nun wiſſen wir aber aus dem Vorhergehenden, daß die Function von x, welche dieſer Differenzialgleichung und der Bedingung $\psi(0) = 1$ genügt, folgende iſt:

$$\psi x = e^{ax},$$

und in der That iſt die Gleichung (c) nichts weiter, als der algebraiſche Ausdruck der Grundregel für die Rechnung mit Potenzen, ſo daß wir von dieſer Gleichung hätten ausgehen können, um direct das Differenzial der Exponentialfunction zu finden.

Wir wollen nun annehmen, daß die Conſtante a imaginär oder von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ ſei, ſo wird die Function ψx ſelbſt eine imaginäre Größe von der Form:

$$fx + fx \cdot \sqrt{-1} \quad (\S. 17).$$

Denn die Gleichung:

$$d \cdot \psi x = (\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi x\, dx \qquad (d)$$

kann mit einer deſto größeren Annäherung durch:

$$\Delta \cdot \psi x = (\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi x\, \Delta x$$

erſetzt werden, einen je kleinern Bruch man für Δx nimmt. Wenn man z. B. wegen $\psi(0) = 1$ die Differenz $\Delta x = 0{,}001$ nimmt, indem dieſer Werth von Δx als eine ſehr kleine Größe der erſten Ordnung betrachtet wird (§. 44 und 45); ſo erhält man, wenn man die ſehr kleinen Größen der zweiten Ordnung hinwegläßt:

$$\psi(0{,}001) = 1 + 0{,}001\,(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$
$$\psi(0{,}002) = [1 + 0{,}001\,(\alpha + \beta\sqrt{-1})]^2,$$
$$\psi(0{,}003) = [1 + 0{,}001\,(\alpha + \beta\sqrt{-1})]^3,$$
$$\text{u. ſ. w.,}$$

und alle dieſe Werthe der Function ψ laſſen ſich auf die Form:

$$\mu + \nu\sqrt{-1}$$

zurückführen. Da der Fehler, welcher durch die Subſtitution einer endlichen Differenz Δx für das Differenzial dx begangen wird, beliebig verkleinert werden kann, ſo folgt nicht blos, daß es wirklich eine Function:

$$\psi x = fx + fx\sqrt{-1}$$

gibt, welche die Eigenſchaft beſitzt, den Gleichungen (c) und (c_0), und folglich der Gleichung (d) zu genügen, ſondern auch, daß die in der Function ψx vorkommenden reellen Functionen fx, fx für einen beliebigen Werth von x mit einer unbeſchränkten Annäherung numeriſch berechnet werden können.

Wegen der Gleichung (c_0) hat man:

$$f(0) = 1, f(0) = 0, \qquad (e)$$

und wegen der Gleichung (c):

$$(fx + fx\sqrt{-1})(fz + fz\sqrt{-1}) = f(x+z) + f(x+z)\sqrt{-1},$$

woraus ſich die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} fx \cdot fz - fx \cdot fz &= f(x+z), \\ fx \cdot fz + fx \cdot fz &= f(x+z), \end{aligned}\right\} \qquad (f)$$

ergeben, aus denen ſogleich mehrere Folgerungen gezogen werden ſollen.

also:

$$d \cdot e^x = e^x dx,$$

oder auch:

$$\frac{d \cdot e^x}{dx} = e^x.$$

Der Differenzialcoeffizient der ersten Ordnung der Function $y = e^x$ und folglich die Differenzialcoefficienten oder abgeleiteten Functionen aller Ordnungen sind also mit der ursprünglichen Function identisch. Diese characteristische und äußerst merkwürdige Eigenschaft gibt schon zum Voraus den Grund an, weßhalb die Exponentialfunction e^x und die Zahl e selbst in der Theorie der Functionen eine so wichtige Rolle spielt. Wir wollen der Kürze wegen:

$$V = \frac{\log. a}{\log. e}, \text{ und } y = a^x$$

setzen, so kommt:

$$\frac{dy}{dx} = Vy,$$

oder nach der Newton'schen Bezeichnung (§. 42):

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = Vy,$$

und außerdem weiß man, daß für $x = 0$ die Fluente $y = 1$ ist.

Wenn man sich also zwei Punkte ξ, η (Fig. 28) denkt, wovon sich der erste auf der geraden Linie **OX** mit einer constanten Geschwindigkeit, oder Fluxion und der zweite auf der geraden Linie **O'Y** mit einer seiner Entfernung von dem festen Punkte **O'** proportionalen Geschwindigkeit bewegt, so daß er in **A** oder um die Längeneinheit vom Punkte **O'** entfernt ist, wenn sich der Punkt ξ in **O** befindet, und wenn man endlich annimmt, daß die constante Geschwindigkeit des Punktes ξ, zur Einheit genommen, und daß die veränderliche Ge-

---

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{\varepsilon}{\log_a (1+\varepsilon)} = \frac{a^x}{\frac{\log_a (1+\varepsilon)}{\varepsilon}}$$

und:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log_a \overset{\frac{1}{\varepsilon}}{e}} \cdot a^x = \log_e a \cdot a^x = \frac{\log. a}{\log. e} \cdot a^x,$$

weil aus $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$ folgt:

$$\frac{\log_a (1+\varepsilon)}{\varepsilon} = \log_a e = \frac{1}{\log_e a} = \frac{\log. e}{\log. a}.$$

Uebrigens kann man die Grenze von $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ leicht unmittelbar und ohne Anwendung von Reihenentwickelungen erhalten, wenn man bemerkt, daß für jeden Werth von a, b, Δx ist:

$$a^{\Delta x} = b^{\frac{\log. a}{\log. b} \cdot \Delta x}.$$

Wenn $y = f(x) = a^x$ ist, so ist auch $f'(x) = \log. a \cdot a^x$ und $\varphi(y) = \log_a y$, folglich:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\log. a \cdot a^x} = \frac{1}{\log. a} \cdot \frac{1}{y}.$$

Z. d. Ueberf.

ſchwindigkeit des Punktes $\eta = V$ iſt, wenn derſelbe durch den Punkt A geht; ſo ſtellen die veränderlichen Entfernungen $O\xi$, $O'\eta$, in jedem Augenblicke die Werthe der Veränderlichen x, y dar, oder mit andern Worten, die Fluente $O\xi$ iſt in dem Logarithmenſyſteme von der Grundzahl a der Logarithmus der durch die Fluente $O\eta$ dargeſtellten Zahl.

Wenn man die Geſchwindigkeit V der Einheit oder der conſtanten Geſchwindigkeit des Punktes ξ gleich annimmt, welches die natürlichſte oder am wenigſten willkührliche Vorausſetzung iſt, welche man machen kann, ſo iſt $O\xi$ der natürliche oder neper'ſche Logarithmus von $O'\eta$.

Gerade auf dieſe Weiſe hat ſich Neper die Entſtehung der Logarithmen gedacht, und er hat ebenſo der Vorläufer Newton's bei der Erfindung der Theorie der Fluxionen ſein müſſen, wie Kepler und Cavaleri als die Vorläufer Leibnitz's in der Theorie der Infiniteſimalgrößen betrachtet werden können.

Es iſt ſehr bemerkenswerth, daß Neper, dem gewöhnlichen Gange der Erfinder entgegen, die logarithmiſche Function unmittelbar durch ihren weſentlichen und hervorragenden Character definirt hat, ſtatt von ihren ſecundären Eigenſchaften auszugehen, aus welchen man noch jetzt die Logarithmen in den Elementen ableitet, und welche die Grundlage ihrer gewöhnlichen Anwendungen bilden.

§. 66. Wir haben vorhin aus dem Differenziale der logarithmiſchen Function das der Exponentialfunction abgeleitet; es läßt ſich aber auch ganz einfach daraus das Differenzial der Function x^m ableiten, indem der Exponent m einen beliebigen reellen, poſitiven, oder negativen, commenſurabeln, oder incommenſurabeln Werth hat. Denn aus:

$$y = x^m,$$

folgt:

$$\log. y = m \log. x,$$

und wenn man differenzirt:

$$\frac{dy}{y} = m \frac{dx}{x};$$

folglich:

$$dy = m \frac{y}{x} dx = mx^{m-1} dx. \qquad (a)$$

Aber alsdann ſetzt der Beweis dieſer letzten Formel den der Binomialformel voraus, wenigſtens für den Fall eines ganzen poſitiven Exponenten, wogegen der zuerſt gegebene Beweis derſelben Bedingung nicht unterliegt und im Gegentheil zur Aufſtellung der Binomialformel dienen kann, wie man in der Folge ſehen wird.

Umgekehrt, wenn die Formel (a) bewieſen iſt, ſo ergibt ſich daraus die Ableitung der logarithmiſchen Function. Denn wenn φx die Function log. x und $\varphi' x$ ihre unbekannte Ableitung bezeichnet, ſo hat man:

$$\varphi(x^m) = m\varphi x,$$

und wenn man nach der Regel für die Differenzirung der mittelbaren Functionen differenzirt, ſo erhält man:

$$\varphi'(x^m) \cdot \frac{d \cdot x^m}{dx} = m\varphi' x,$$

oder vielmehr wegen der Gleichung (a):

$$x^m \varphi'(x^m) = x\varphi' x.$$

Dieſe letzte Gleichung kann nur in ſo fern für beliebige Werthe von x und m ſtattfinden, als $x\varphi' x$ ſich auf eine Conſtante reducirt, deren Werth man

dieſer negative Character weder für die eine, noch für die andere auf ganz entſchiedene Weiſe dargethan iſt.

§. 63. Die Gleichung:

$$e = \text{Grenze von } (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

iſt nur unter der Bedingung bewieſen, daß die Zahl ε gegen Null convergirt, indem ſie eine Reihe poſitiver Werthe durchläuft; denn die Binomialformel, worauf wir uns geſtützt haben, wird in den Elementen, obgleich ſie, wie man in der Folge ſehen wird, für beliebige Werthe des Exponenten n ſtattfindet, gewöhnlich nur für ganze poſitive Werthe von n bewieſen. Um ſich dieſer Beſchränkung zu überheben, kann man ſetzen:

$$1+\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon'},$$

ſo daß ε' mit ε zugleich verſchwindet und negativen Werthen von ε poſitive Werthe von ε' entſprechen. Hieraus ergibt ſich:

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = (1+\varepsilon')^{\frac{1}{\varepsilon'}(1+\varepsilon')},$$

und folglich:

$$\text{Grenze von } (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \text{Grenze von } (1+\varepsilon')^{\frac{1}{\varepsilon'}} = e,$$

ſo daß die Grenze dieſelbe bleibt, was für ein Zeichen ε auch haben mag.

§. 64. Für jedes Zeichen von $\frac{dx}{x}$ hat man alſo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log. e, \text{ oder } dy = \frac{dx}{x} \cdot \log. e,$$

wo y den Logarithmus von x für eine beliebige Grundzahl bezeichnet und der Logarithmus von e ſich auf dieſelbe Grundzahl als der von x bezieht.

Wenn man alſo die transcendente Zahl e zur Grundzahl der Logarithmen nähme, ſo hätte man blos:

$$dy = \frac{dx}{x}.$$

Die Logarithmen, deren Grundzahl e iſt, werden *natürliche*, *hyperboliſche*, oder auch wohl nach dem Namen des Erfinders *Neper* der Logarithmen, *neperſche* Logarithmen genannt.

Aber unmittelbar nach *Neper's* Entdeckung im Jahre 1614 ſahe *Briggs*, Profeſſor der Mathematik zu Oxford, den Vortheil ein, welchen es für die numeriſchen Rechnungen gewähren würde, wenn man nicht, wie *Neper*, die Zahl e, ſondern die Grundzahl 10 unſeres decadiſchen Zahlenſyſtemes zur Grundzahl der Logarithmen nähme, und er berechnete Logarithmentafeln für dieſe Grundzahl. Allein in den höheren Zweigen der Mathematik deutet das Zeichen log. immer natürliche oder neper'ſche Logarithmen an, wofern nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt iſt, welchem Gebrauche auch wir uns anſchließen werden.

Uebrigens iſt einleuchtend, daß man von den für eine gewiſſe Grundzahl berechneten Logarithmen zu den für eine andere Grundzahl berechneten übergehen kann, wenn man die erſten durch einen conſtanten Factor multiplicirt. Wir wollen allgemein durch $\log._a$ die Logarithmen aus dem Syſteme von der Grundzahl a bezeichnen und es ſei:

$$y = \log._a x, \quad Y = \log._b x,$$

ſo hat man umgekehrt:

$$x = a^y,\ x = b^Y,\ a^y = b^Y,$$

woraus folgt, wenn man nun die Logarithmen aus einem beliebigen Syſteme nimmt:

$$y \log. a = Y \log. b,$$

oder:

$$\log._b x = \log._a x \cdot \frac{\log. a}{\log. b}.$$

Wenn y den neper'ſchen und Y den gewöhnlichen oder brigg'ſchen Logarithmus der Zahl x bezeichnet, ſo hat man:

$$Y = y \log. e,$$

wo der Logarithmus von e aus dem gewöhnlichen Logarithmenſyſteme von der Grundzahl 10 genommen iſt. Die Zahl, durch welche man die neper'ſchen Logarithmen multipliciren muß, um die entſprechenden gewöhnlichen Logarithmen zu erhalten, wird der Modulus genannt, und wir werden ſpäter ſehen, wie man den Werth desſelben bequem berechnen kann.

§. 65. Da die Gleichung:

$$y = \log._a x,$$

welche gleichbedeutend iſt mit:

$$x = a^y,$$

gibt:

$$dy = \frac{dx}{x} \log._a e,$$

ſo hat man umgekehrt:

$$dx = x\,dy \cdot \frac{1}{\log._a e}$$

oder:

$$d \cdot a^y = \frac{1}{\log._a e} \cdot a^y\,dy,$$

oder endlich, wenn man x für y ſetzt, weil die unabhängige Veränderliche mit x bezeichnet zu werden pflegt:

$$d \cdot a^x = \frac{1}{\log._a e} \cdot a^x\,dx.$$

Außerdem hat man:

$$\log._a e = \frac{\log. e}{\log. a},$$

wo die im zweiten Theile dieſer Gleichung vorkommenden Logarithmen aus einem beliebigen Syſteme, z. B. aus dem gewöhnlichen, genommen ſind; folglich iſt:

$$d \cdot a^x = \frac{\log. a}{\log. e} \cdot a^x\,dx, *)$$

---

*) Dieſes Reſultat kann man nach dem Vorhergehenden auch leicht direct erhalten; denn wenn $y = a^x$ iſt, ſo iſt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Setzt man nun $a^{\Delta x} - 1 = \varepsilon$, ſo iſt $a^{\Delta x} = 1 + \varepsilon$ und $\Delta x = \log._a (1+\varepsilon)$; folglich:

alſo:

$$d \cdot e^x = e^x dx,$$

oder auch:

$$\frac{d \cdot e^x}{dx} = e^x.$$

Der Differenzialcoeffizient der erſten Ordnung der Function $y = e^x$ und folglich die Differenzialcoefficienten oder abgeleiteten Functionen aller Ordnungen ſind alſo mit der urſprünglichen Function identiſch. Dieſe characteriſtiſche und äußerſt merkwürdige Eigenſchaft gibt ſchon zum Voraus den Grund an, weßhalb die Exponentialfunction e^x und die Zahl e ſelbſt in der Theorie der Functionen eine ſo wichtige Rolle ſpielt. Wir wollen der Kürze wegen:

$$V = \frac{\log. a}{\log. e}, \text{ und } y = a^x$$

ſetzen, ſo kommt:

$$\frac{dy}{dx} = Vy,$$

oder nach der Newton'ſchen Bezeichnung (§. 42):

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = Vy,$$

und außerdem weiß man, daß für $x = 0$ die Fluente $y = 1$ iſt.

Wenn man ſich alſo zwei Punkte ξ, η (Fig. 28) denkt, wovon ſich der erſte auf der geraden Linie **OX** mit einer conſtanten Geſchwindigkeit, oder Flurion und der zweite auf der geraden Linie **O'Y** mit einer ſeiner Entfernung von dem feſten Punkte **O'** proportionalen Geſchwindigkeit bewegt, ſo daß er in **A** oder um die Längeneinheit vom Punkte **O'** entfernt iſt, wenn ſich der Punkt ξ in **O** befindet, und wenn man endlich annimmt, daß die conſtante Geſchwindigkeit des Punktes ξ, zur Einheit genommen, und daß die veränderliche Ge-

---

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{\varepsilon}{\log_a (1+\varepsilon)} = \frac{a^x}{\frac{\log_a (1+\varepsilon)}{\varepsilon}},$$

und:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log_a e} \cdot a^x = \log_e a \cdot a^x = \frac{\log. a}{\log. e} \cdot a^x,$$

weil aus $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$ folgt:

$$\frac{\log_a (1+\varepsilon)}{\varepsilon} = \log_a e = \frac{1}{\log_e a} = \frac{\log. e}{\log. a}.$$

Uebrigens kann man die Grenze von $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ leicht unmittelbar und ohne Anwendung von Reihenentwickelungen erhalten, wenn man bemerkt, daß für jeden Werth von a, b, Δx iſt:

$$a^{\Delta x} = b^{\frac{\log. a}{\log. b} \cdot \Delta x}.$$

Wenn $y = f(x) = a^x$ iſt, ſo iſt auch $f'(x) = \log_e a \cdot a^x$ und $\varphi(y) = \log_a y$, folglich:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\log_e a \cdot a^x} = \frac{1}{\log_e a} \cdot \frac{1}{y}.$$

Z. d. Ueberſ.

ſchwindigkeit des Punktes $\eta = V$ iſt, wenn derſelbe durch den Punkt A geht; ſo ſtellen die veränderlichen Entfernungen $O\xi$, $O'\eta$, in jedem Augenblicke die Werthe der Veränderlichen x, y dar, oder mit andern Worten, die Fluente $O\xi$ iſt in dem Logarithmenſyſteme von der Grundzahl a der Logarithmus der durch die Fluente $O\eta$ dargeſtellten Zahl.

Wenn man die Geſchwindigkeit V der Einheit oder der conſtanten Geſchwindigkeit des Punktes ξ gleich annimmt, welches die natürlichſte oder am wenigſten willkührliche Vorausſetzung iſt, welche man machen kann, ſo iſt $O\xi$ der natürliche oder neper'ſche Logarithmus von $O'\eta$.

Gerade auf dieſe Weiſe hat ſich Neper die Entſtehung der Logarithmen gedacht, und er hat ebenſo der Vorläufer Newton's bei der Erfindung der Theorie der Fluxionen ſein müſſen, wie Kepler und Cavaleri als die Vorläufer Leibnitz's in der Theorie der Infiniteſimalgrößen betrachtet werden können.

Es iſt ſehr bemerkenswerth, daß Neper, dem gewöhnlichen Gange der Erfinder entgegen, die logarithmiſche Function unmittelbar durch ihren weſentlichen und hervorragenden Character definirt hat, ſtatt von ihren ſecundären Eigenſchaften auszugehen, aus welchen man noch jetzt die Logarithmen in den Elementen ableitet, und welche die Grundlage ihrer gewöhnlichen Anwendungen bilden.

§. 66. Wir haben vorhin aus dem Differenziale der logarithmiſchen Function das der Exponentialfunction abgeleitet; es läßt ſich aber auch ganz einfach daraus das Differenzial der Function x^m ableiten, indem der Exponent m einen beliebigen reellen, poſitiven, oder negativen, commenſurabeln, oder incommenſurabeln Werth hat. Denn aus:

$$y = x^m,$$

folgt:

$$\log. y = m \log. x,$$

und wenn man differenzirt:

$$\frac{dy}{y} = m \frac{dx}{x};$$

folglich:

$$dy = m \frac{y}{x} dx = mx^{m-1} dx. \qquad (a)$$

Aber alsdann ſetzt der Beweis dieſer letzten Formel den der Binomialformel voraus, wenigſtens für den Fall eines ganzen poſitiven Exponenten, wogegen der zuerſt gegebene Beweis derſelben Bedingung nicht unterliegt und im Gegentheil zur Aufſtellung der Binomialformel dienen kann, wie man in der Folge ſehen wird.

Umgekehrt, wenn die Formel (a) bewieſen iſt, ſo ergibt ſich daraus die Ableitung der logarithmiſchen Function. Denn wenn φx die Function log. x und $\varphi' x$ ihre unbekannte Ableitung bezeichnet, ſo hat man:

$$\varphi(x^m) = m\varphi x,$$

und wenn man nach der Regel für die Differenzirung der mittelbaren Functionen differenzirt, ſo erhält man:

$$\varphi'(x^m) \cdot \frac{d \cdot x^m}{dx} = m\varphi' x,$$

oder vielmehr wegen der Gleichung (a):

$$x^m \varphi'(x^m) = x\varphi' x.$$

Dieſe letzte Gleichung kann nur in ſo fern für beliebige Werthe von x und m ſtattfinden, als $x\varphi' x$ ſich auf eine Conſtante reducirt, deren Werth man

erhält, wenn man in dem erſten Theile der Gleichung $m = o$ ſetzt. Wenn man alſo dieſe Conſtante $\varphi' (1)$ mit k bezeichnet, ſo kommt:

$$\varphi' x = \frac{k}{x}, \text{ oder } d \cdot \log. x = \frac{k\,dx}{x},$$

woraus ſich alle vorhin erhaltenen Reſultate wieder ableiten laſſen.

§. 67. Wir wollen nun zu den trigonometriſchen Functionen übergehen und zunächſt

$$y = \sin. x$$

ſetzen, ſo haben wir, wenn wir auf dieſe transcendente Function unmittelbar wieder den Begriff der Grenzen anwenden:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin.(x+\Delta x) - \sin. x}{\Delta x} = \frac{\sin. \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cdot \cos.\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right).$$

Der Factor $\cos.\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right)$ convergirt gegen die Grenze $\cos. x$, wenn Δx gegen Null convergirt und der Factor:

$$\frac{\sin. \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

hat die Einheit zur Grenze, wenn Δx gegen Null convergirt. Denn aus der Identität:

$$\frac{\sin. \varepsilon}{\text{tang.}\,\varepsilon} = \cos. \varepsilon,$$

folgt, daß das Verhältniß des Sinus zur Tangente die Einheit zur Grenze hat, wenn der Bogen gegen Null convergirt, und außerdem iſt nach einem bekannten Principe der Geometrie die Länge eines Kreisbogens immer größer, als die ſeines Sinus und kleiner, als die ſeiner Tangente.

Folglich hat um ſo mehr $\frac{\sin. \varepsilon}{\varepsilon}$ die Einheit zur Grenze. Folglich iſt:

$$\frac{dy}{dx} = \cos. x,$$

oder:

$$d \cdot \sin. x = \cos. x \cdot dx. \qquad (b)$$

Durch eine ganz ähnliche Rechnung fände man direct:

$$d \cdot \cos. x = -\sin. x \cdot dx. \qquad (c)$$

Wenn man übrigens:

$$\cos. x = \sin. z,$$

folglich:

$$z = \tfrac{1}{2}\pi - x$$

ſetzt, ſo erhält man:

$$d \cdot \cos. x = d \cdot \sin. z = \cos. z\,dz,$$

und da:

$$dz = -dx, \quad \cos. z = \sin. x$$

iſt, ſo kommt man wieder auf die Gleichung (c).

Aus den Differenzialen des Sinus und Coſinus laſſen ſich nun leicht die der übrigen trigonometriſchen Functionen ableiten. So hat man z. B.:

$$d \cdot \text{tang. } x = d\left(\frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}\right) = \frac{\text{cos. } x\, d \cdot \text{sin. } x - \text{sin. } x \cdot d \cdot \text{cos. } x}{\text{cos.}^2 x}$$

$$= \frac{(\text{cos.}^2 x + \text{sin.}^2 x)\, dx}{\text{cos.}^2 x} = \frac{dx}{\text{cos.}^2 x}, \quad *)$$

und durch ähnliche Rechnungen findet man:

$$d \cdot \text{cot. } x = -\frac{dx}{\text{sin.}^2 x},$$

$$d \cdot \text{sec. } x = \frac{\text{sin. } x\, dx}{\text{cos.}^2 x}$$

$$d \text{ cosec. } x = -\frac{\text{cos. } x\, dx}{\text{sin.}^2 x}.$$

Aus $y = \text{sin. } x$ ergibt sich nach dem Vorhergehenden:

$$dy = \text{cos. } x dx = \sqrt{1-y^2} \cdot dx,$$

und man hat daher umgekehrt:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

oder:

$$d \cdot \text{arc sin. } y = \frac{dy}{\sqrt{1-x^2}},$$

oder wenn man y mit x vertauscht, um die unabhängige Veränderliche immer mit x zu bezeichnen:

---

*) Wenn $y = \text{tang. } x$, so hat man auch:

$$\Delta y = \text{tang. } (x+\Delta) - \text{tang. } x = \frac{\text{tang. } x + \text{tang. } \Delta x}{1 - \text{tang. } x \,.\, \text{tang. } \Delta x} - \text{tang. } x$$

$$= \frac{\text{tang. } \Delta x\, (1 + \text{tang.}^2 x)}{1 - \text{tang. } x \text{ tang. } \Delta x},$$

folglich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{tang. } \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1 + \text{tang.}^2 x}{1 - \text{tang. } x \text{ tang. } \Delta x},$$

und:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \text{tang.}^2 x = \text{sec. } x = \frac{1}{\text{cos.}^2 x},$$

oder:

$$dy = \frac{dx}{\text{cos.}^2 x}.$$

Oder wenn $y = \text{tang. } x = \frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}$, ist, so ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\text{sin. } (x+\Delta x)}{\text{cos. } (x+\Delta x)} - \frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}\right] = \frac{\text{sin. } \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\text{cos. } (x+\Delta x) \text{ cos. } x},$$

folglich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{cos.}^2 x}, \text{ oder } dy = \frac{dx}{\text{cos.}^2 x}.$$

Uebrigens erhält man alle diese Resultate unmittelbar durch Anwendung der oben mitgetheilten allgemeinen Regel für die Differenzirung der zusammengesetzten Functionen. Z. d. Ueberf.

$$d \cdot \text{arc sin. } x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \text{ *)}$$

Auf dieſelbe Weiſe findet man:

$$d \cdot \text{arc cos. } x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$d \cdot \text{arc tang. } x = \frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d \cdot \text{arc cot. } x = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

Zur Interpretation aller dieſer Formeln muß man ſich vorſtellen, daß, da der Halbmeſſer des Kreiſes zur Einheit genommen iſt, die Sinus und Coſinus poſitive oder negative echte Brüche ſind, deren Zahlenwerth, alſo zwiſchen Null und der Einheit liegt. Was die Kreisbogen anlangt, ſo ſind dieſelben nothwendig Zahlen, welche auf dieſelbe Maßeinheit bezogen werden, als die Sinus, Coſinus, Tangenten ꝛc., weil ſonſt die Formeln nicht homogen wären und die Relation:

$$\text{Grenze von } \frac{\text{sin. } \varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

keinen Sinn hätte. Die Bogen müſſen alſo nicht durch die Anzahl ihrer Grade, ſondern durch die Verhältniſſe ihrer Länge zu der Länge des zur Einheit genommenen Halbmeſſers gegeben ſein. Wenn ein Bogen in Sexageſimalgraden durch die Zahl X^0 ausgedrückt wäre, ſo erhielte man die Zahl x, welche in die Formeln ſubſtituirt werden muß, durch die Proportion:

$$180^0 : X^0 = \pi : x,$$

wo π, wie gewöhnlich, die Länge des halben Kreisumfanges von dem Halbmeſſer gleich 1 bezeichnet.

Wenn man die Sexageſimalſecunde zur Winkeleinheit nimmt, wie dieſes bei genauen Rechnungen geſchieht, und der Bogen wird in Secunden durch die Zahl X'' ausgedrückt, ſo wird die Zahl x durch die Proportion:

$$648000'' : X'' = \pi : x$$

beſtimmt, woraus folgt:

$$x = \frac{X''}{206264{,}81\ldots}$$

Oft muß man den Werth eines Kreisbogens in Graden kennen, deſſen Länge der des Halbmeſſers des Kreiſes gleich iſt, und dieſer Werth iſt $= 57^0\ 17'\ 44'',\ 81 = 206264'',\ 81.$

---

*) Wenn $y = f(x) = \text{sin. } x$ iſt, ſo iſt $f'(x) = \text{cos. } x = \sqrt{1 - y^2}$, $\varphi(y) = \text{arc. sin. } y$, und folglich nach der Formel:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ iſt } \varphi'(y) = \frac{1}{\text{cos. } x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Oder, wenn $x = \text{arc. sin. } y$ iſt, ſo iſt $y = \text{sin. } x$, $\text{cos. } x = \sqrt{1-y^2}$, $\Delta y = \text{sin. } (x + \Delta x) - \text{sin. } x = 2 \text{ sin. } \frac{\Delta x}{2} \cdot \text{cos. } \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, folglich:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\text{sin.}\frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{1}{\text{cos. } (x+\Delta x)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{cos. } x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Z. d. Ueberſ.

Aus den Gleichungen (b) und (c) folgt:

$$\frac{d^2 \cdot \sin. x}{dx^2} = -\sin. x, \quad \frac{d^2 \cdot \cos. x}{dx^2} = -\cos. x.$$

Die beiden Functionen $y = \sin. x$, $y = \cos. x$ haben also die sehr merkwürdige gemeinschaftliche Eigenschaft, welche durch die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y$$

ausgedrückt wird.

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^{2i} \cdot \sin. x}{dx^{2i}} &= \pm \sin. x, & \frac{d^{2i} \cdot \cos. x}{dx^{2i}} &= \pm \cos. x, \\ \frac{d^{2i+1} \cdot \sin. x}{dx^{2i+1}} &= \pm \cos. x, & \frac{d^{2i+1} \cos. x}{dx^{2i+1}} &= \mp \sin. x, \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

wo die oberen oder unteren Zeichen genommen werden müssen, je nachdem die ganze Zahl i gerade oder ungerade ist.

§. 68. Aus den folgenden Beispielen sieht man, welchen Weg man bei der Differenzirung zusammengesetzter Functionen einschlagen muß.

Es sei zu differenziren:

1) $$y = (ax^m + b)^n$$

so setze man:

$$ax^m + b = u,$$

folglich:

$$y = u^n, \quad dy = nu^{n-1}\, du, \quad du = max^{m-1}\, dx,$$

und alsdann hat man:

$$dy = mna\,(ax^m + b)^{n-1} x^{m-1}\, dx.$$

2) $$y = \log. \sin. x,$$

so setze man:

$$\sin. x = u,$$

so ist:

$$y = \log. u, \quad dy = \frac{du}{u}, \quad du = \cos. x\, dx,$$

und endlich:

$$dy = \frac{dx}{\tang. x}.$$

3) $$y = \log. \{x + \sqrt{1 + x^2}\}.$$

Wenn man hierbei zwei Hülfsveränderliche:

$$u = x + \sqrt{1 + x^2}, \quad v = 1 + x^2,$$

anwendet, so erhält man:

$$dy = \frac{du}{u}, \quad du = dx + \frac{dv}{2\sqrt{v}}, \quad dv = 2\, x dx,$$

und nach verrichteten Reductionen:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4) $$y = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos. x + r'^2}}.$$

Man setze:

$$u = r^2 - 2rr' \cos. x + r'^2,$$

so ist:

$$y = \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad dy = -\frac{du}{2u^{\frac{3}{2}}}, \quad du = 2r' \sin. x dx,$$

und folglich:

$$dy = -\frac{rr' \sin. x\, dx}{(r^2 - 2rr' \cos x + r'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad *)$$

Zweites Kapitel.

Vergleichung der logarithmiſchen, Exponential- und Kreistranscendenten. — Moivre'ſche Formel und Grundbegriffe über die Theorie der Winkelſchnitte.

I. Vergleicher der logarithmiſchen, Exponential- und Kreistranscendenten.

§. 69. In dem vorhergehenden Kapitel ſind die Regeln zur Differenzirung der Exponential-, logarithmiſchen und Kreisfunctionen angegeben, welches die einzigen transcendenten Functionen ſind, die man in der Elementarmathematik betrachtet; allein dieſer Gegenſtand muß in verſchiedenen Beziehungen gründlicher unterſucht werden, weil er den Rechnungen der höhern Analyſis zur Grundlage dient.

Im Vorhergehenden haben wir geſehen, daß Neper von einer mit der Differenzialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad (a)$$

gleichbedeutenden Relation ausging, um die Exponentialfunction:

$$y = e^x$$

oder, die logarithmiſche Function:

$$x = \log. y,$$

welche das Umgekehrte der erſten iſt, zu definiren. In der That drückt dieſe Differenzialgleichung in Verbindung mit der Bedingung, daß x für $y = 1$ verſchwindet, den weſentlichen Character beider transcendenten Functionen aus, indem ſie das ſehr einfache Geſetz beſtimmt, nach welchem ſich dieſe Functionen ſtetig ändern.

---

*) Die folgenden allgemeinen Formeln verdienen hier noch bemerkt zu werden:

Wenn $y = (f(x))^n$ iſt, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$.

Wenn $y = a^{f(x)}$ iſt, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \log.e\, a \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{\log. a}{\log. e} \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$.

Wenn $y = \log. f(x)$, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \log._a e \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\log. e}{\log. a} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Wenn $y = \sin. f(x)$, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \cos. f(x) \cdot f'(x)$.

Wenn $y = \text{arc. sin.} f(x)$, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$.

Z. d. Ueberſ.

Die Definitionen, welche man in den Elementen der Arithmetik und Algebra von den Logarithmen gibt, drücken nur secundäre Eigenschaften der logarithmischen Function aus und sind nur Folgerungen aus der ursprünglichen Definition.

Nach der Form der Gleichung (a) sieht man leicht ein, welche Rolle die Exponentialfunction in dem Ausdrucke einer Menge von Naturerscheinungen, und namentlich derjenigen spielen muß, welche sich unter dem generischen Namen der Phänomene der Absorption oder allmähliger Erlöschung zusammenfassen lassen. Wenn man sich z. B. einen bewegten Körper in einem widerstehenden Mittel denkt, durch dessen Wirkung er fortwährend einen Theil seiner Geschwindigkeit verliert; so ist der Widerstand des Mittels oder die Absorption der Geschwindigkeit in einem unendlich kleinen Zeittheilchen offenbar von der Geschwindigkeit des Körpers abhängig, indem derselbe mit dieser Geschwindigkeit zunimmt, verschwindet, wenn die Geschwindigkeit Null wird, sehr klein bleibt, wenn die Geschwindigkeit sehr klein ist, und folglich für sehr kleine Werthe der Geschwindigkeit nahezu der Geschwindigkeit des Körpers in jedem Augenblicke proportional ist (§. 5). Man hat also eine Gleichung von der Form:

$$\frac{dy}{dt} = -ky,$$

wo y die als sehr klein vorausgesetzte Geschwindigkeit, t die Zeit und k einen gewissen constanten Coefficienten bezeichnet. Diese Gleichung verwandelt sich aber in folgende:

$$\frac{dy}{dx} = y,$$

wenn man $x = -kt$ setzt, und den Werth von y in dem Augenblicke, wo $t = 0$ oder $x = 0$ ist zur Einheit nimmt, und aus dieser letzten Gleichung folgt:

$$y = e^x = e_1^{-kt}, \text{ oder } t = -\frac{1}{k} \log. y.$$

Aehnliche Schlüsse ließen sich auf die allmählige Erlöschung des Lichtes und der Wärme in absorbirenden Mitteln, auf die Verluste der Wärme und Electricität in Folge der Ausstrahlung der Oberflächen, oder der Berührung eines umgebenden Mittels und auf alle ähnliche Erscheinungen anwenden.

§. 70. Nach der weiter oben (§. 51) angegebenen Bezeichnungsart der bestimmten Integrale, kann man setzen:

$$\log. y = \int_1^y \frac{dy}{y},$$

oder:

$$\log. x = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Die logarithmische Function ist also nichts weiter, wie ein bestimmtes Integral, und wir haben sie nicht blos eine transcendente Function genannt, weil sie sich bis jetzt nicht hat algebraisch ausdrücken lassen, sondern weil sie, wie später bewiesen werden wird, weder explicite noch implicite durch einen algebraischen Ausdruck dargestellt werden kann. Dieser Betrachtung zufolge müssen wir die bestimmten Integrale in Zukunft als neue transcendente Functionen ansehen, so oft sie sich nicht algebraisch oder durch andere bereits bekannte transcendente Functionen ausdrücken lassen.

Die transcendente Zahl e ist der Werth, welchen man der oberen Grenze des Integrales beilegen muß, damit der Werth desselben der Einheit gleich wird, oder mit andern Worten, e ist eine Constante, welche implicite durch die transcendente Gleichung:

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = 1.$$

bestimmt wird.

§. 71. Gesetzt, man suchte eine Function φx von solcher Beschaffenheit, daß für alle Werthe von x und z die Gleichung stattfindet:

$$\varphi x + \varphi z = \varphi(xz). \qquad (b)$$

Setzt man in dieser Gleichung $z = o$, so ergibt sich daraus:

$$\varphi x + \varphi(o) = \varphi(o),$$

so daß, wenn $\varphi(o)$ irgend einen endlichen Werth hätte, φx für alle Werthe von x Null wäre. Die gesuchte Function erfährt also für $x = o$ eine Unterbrechung der Stetigkeit.

In derselben Gleichung wollen wir $z = 1$ setzen, so erhalten wir:

$$\varphi x + \varphi(1) = \varphi(x), \text{ oder } \varphi(1) = o. \qquad (b_1)$$

Die Gleichung (b) kann man in Beziehung auf x und in Beziehung auf z differenziren, indem man darin successive x und z als veränderlich betrachtet, wodurch man nach bekannten Regeln erhält:

$$\varphi' x = z\varphi'(xz), \quad \varphi' z = x\varphi'(xz),$$

und folglich:

$$x\varphi' x = z\varphi' z.$$

Die Function φ ist also so beschaffen, daß das Product $x\varphi' x$ von x unabhängig ist, so daß man hat:

$$x\varphi' x = k,$$

wo k eine beliebige Constante bezeichnet, oder:

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{k}{x},$$

und da die Function φx für $x = 1$ verschwinden muß, so ergibt sich aus dieser letzten Gleichung:

$$\varphi x = k\int_1^x \frac{dx}{x} = k \log. x.$$

In der That drückt die Gleichung (b) die Eigenschaft aus, welche der gewöhnlichen Anwendung der Logarithmen zum Grunde liegt, und wir hätten, wie man eben gesehen hat, von dieser Gleichung oder von der Eigenschaft, welche sie ausdrückt, ausgehen können, um das Differenzial der logarithmischen Function zu finden.

§. 72. Es werde ferner eine andere Function ψ gesucht, welche durch die Gleichung:

$$\psi x \cdot \psi z = \psi(x + z) \qquad (c)$$

characterisirt wird, woraus folgt, wenn man $z = o$ setzt:

$$\psi(o) = 1. \qquad (c_0)$$

Wenn man die Gleichung (c) in Beziehung auf x und in Beziehung auf z differenzirt, so erhält man:

$$\psi' x \cdot \psi z = \psi'(x+z), \quad \psi x \cdot \psi' z = \psi'(x+z),$$

und folglich:

$$\frac{\psi' x}{\psi x} = \frac{\psi' z}{\psi z}.$$

Es muß also:

$$\frac{\psi' x}{\psi x} = a, \text{ oder } \frac{d\psi x}{dx} = a\psi x,$$

wo a eine beliebige Constante bezeichnet, welche wir zunächst als reel voraussetzen wollen. Nun wissen wir aber aus dem Vorhergehenden, daß die Function von x, welche dieser Differenzialgleichung und der Bedingung $\psi(0) = 1$ genügt, folgende ist:

$$\psi x = e^{ax},$$

und in der That ist die Gleichung (c) nichts weiter, als der algebraische Ausdruck der Grundregel für die Rechnung mit Potenzen, so daß wir von dieser Gleichung hätten ausgehen können, um direct das Differenzial der Exponentialfunction zu finden.

Wir wollen nun annehmen, daß die Constante a imaginär oder von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ sei, so wird die Function ψx selbst eine imaginäre Größe von der Form:

$$fx + fx \cdot \sqrt{-1} \quad (\S. 17).$$

Denn die Gleichung:

$$d \cdot \psi x = (\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi x\, dx \qquad (d)$$

kann mit einer desto größeren Annäherung durch:

$$\Delta \cdot \psi x = (\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi x\, \Delta x$$

ersetzt werden, einen je kleinern Bruch man für Δx nimmt. Wenn man z. B. wegen $\psi(0) = 1$ die Differenz $\Delta x = 0{,}001$ nimmt, indem dieser Werth von Δx als eine sehr kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet wird (§. 44 und 45); so erhält man, wenn man die sehr kleinen Größen der zweiten Ordnung hinwegläßt:

$$\psi(0{,}001) = 1 + 0{,}001\,(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$
$$\psi(0{,}002) = [1 + 0{,}001\,(\alpha + \beta\sqrt{-1})]^2,$$
$$\psi(0{,}003) = [1 + 0{,}001\,(\alpha + \beta\sqrt{-1})]^3,$$
$$\text{u. s. w.,}$$

und alle diese Werthe der Function ψ lassen sich auf die Form:

$$\mu + \nu\sqrt{-1}$$

zurückführen. Da der Fehler, welcher durch die Substitution einer endlichen Differenz Δx für das Differenzial dx begangen wird, beliebig verkleinert werden kann, so folgt nicht blos, daß es wirklich eine Function:

$$\psi x = fx + fx\sqrt{-1}$$

gibt, welche die Eigenschaft besitzt, den Gleichungen (c) und (c_0), und folglich der Gleichung (d) zu genügen, sondern auch, daß die in der Function ψx vorkommenden reellen Functionen fx, fx für einen beliebigen Werth von x mit einer unbeschränkten Annäherung numerisch berechnet werden können.

Wegen der Gleichung (c_0) hat man:

$$f(0) = 1, f(0) = 0, \qquad (e)$$

und wegen der Gleichung (c):

$$(fx + fx\sqrt{-1})(fz + fz\sqrt{-1}) = f(x+z) + f(x+z)\sqrt{-1},$$

woraus sich die Formeln:

$$fx \cdot fz - fx \cdot fz = f(x+z),$$
$$fx \cdot fz + fx \cdot fz = f(x+z), \qquad (f)$$

ergeben, aus denen sogleich mehrere Folgerungen gezogen werden sollen.

Da die Gleichung (c) nichts anders ist, als der algebraische Ausdruck der Regel für die Rechnung mit Potenzen, so folgt, daß wir, selbst wenn die Constante a imaginär ist, die Function ψx, welche die Eigenschaft besitzt, den Gleichungen (c) und (c_0) zu genügen, $= e^{ax}$ setzen können; denn obgleich man eine Zahl nicht zu einer Potenz mit einem imaginären Exponenten erheben kann, und folglich der Ausdruck e^{ax}, wenn ax imaginär ist, keine mögliche arithmetische Operation ausdrückt, welche sich genau, oder annäherungsweise ausführen läßt; so muß man doch nothwendig zu einem genauen Resultate gelangen, wenn man auf einen solchen Ausdruck, der Natur der Function ψ gemäß, welche er ausdrückt, die Regeln der algebraischen Rechnung anwendet.

§. 73. Da die transcendente Function:

$$y = \sin. x$$

die Eigenschaft hat, der Differenzialgleichung:

$$dy = \cos. x dx, \qquad (g)$$

oder:

$$dy = \sqrt{1-y^2} \cdot dx, \qquad (g')$$

zu genügen, so kann man von der geometrischen Bedeutung der Function y abstrahiren und sie durch die doppelte Bedingung characterisiren, daß sie zugleich mit x verschwindet und nach einem durch die Gleichung (g') ausgedrückten Gesetze stetig zunimmt.

Man kann auch die umgekehrte Function als ein bestimmtes Integral betrachten und setzen:

$$\text{arc. sin. } y = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

oder wenn man x für y setzt

$$\text{arc. sin. } x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

so daß die transcendente Zahl π durch die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ausgedrückt wird.

Die Gleichungen (g) und (g') stimmen für die Werthe von y zwischen -1 und $+1$, oder für die Werthe von x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ überein; aber wenn x größer wird als $\frac{1}{2}\pi$, so muß man nach dem, was die Trigonometrie über die Veränderung des Zeichens des Cosinus lehrt, für die Gleichung (g') die Gleichung:

$$dy = -\sqrt{1-y^2} \cdot dx \qquad (g'')$$

setzen.

Es ist in der That nicht möglich, daß die Gleichung (g') für reelle Werthe von y stattfindet, nachdem die Veränderliche x, welche als unabhängig betrachtet wird, und deren stetige Zunahme folglich durch nichts beschränkt wird, den Werth überschritten hat, für welchen $y = 1$ ist; denn da alsdann dx positiv ist und die Wurzelgröße $\sqrt{1-y^2}$ positiv genommen wird, so wäre dy positiv, folglich würde y den Werth 1 überschreiten und die Wurzelgröße $\sqrt{1-y^2}$ würde

folglich imaginär, was nicht geſchehen kann, ohne daß dy und folglich y imaginäre Werthe annehmen.

§. 74. Um aber direct zu beweiſen, daß man von der Gleichung (ε′) zu der Gleichung (ε″) übergehen muß, ohne etwas aus der Trigonometrie zu entlehnen, weder in dem Beweiſe, noch in der Definition der Function y, wollen wir zwei Functionen fx, $\mathfrak{f}x$ betrachten, welche gleichzeitig durch das Syſtem der beiden Differenzialgleichungen:

$$\mathrm{d} \cdot fx = \mathfrak{f}x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(i)}$$

$$\mathrm{d} \cdot \mathfrak{f}x = -fx\,\mathrm{d}x \qquad \text{(j)}$$

in Verbindung mit den Bedingungen:

$$f(0) = 0,\ \mathfrak{f}(0) = 1 \qquad (\mathrm{i}_0)$$

beſtimmt werden.

Aus dieſen Gleichungen ergibt ſich:

$$fx\,\mathrm{d} \cdot fx + \mathfrak{f}x\,\mathrm{d} \cdot \mathfrak{f}x = 0,$$

oder:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d} \cdot \left|(fx)^2 + (\mathfrak{f}x)^2\right| = 0,$$

und hieraus folgt:

$$(fx)^2 + (\mathfrak{f}x)^2 = \mathrm{C},$$

wo C eine beliebige von x unabhängige Zahl bezeichnet. Aber die Gleichungen (i_0) geben:

$$(f0)^2 + (\mathfrak{f}0)^2 = 1,$$

folglich iſt:

$$(fx)^2 + (\mathfrak{f}x)^2 = 1. \qquad \text{(k)}$$

So lange nun fx für zunehmende Werthe von x von dem Werthe Null bis zu dem Werthe 1 übergeht, iſt $\mathrm{d} \cdot fx$, ſo wie dx poſitiv; folglich iſt $\mathfrak{f}x$ vermöge der Gleichung (i) poſitiv und man hat:

$$\mathfrak{f}x = \sqrt{1 - (fx)^2}\,.$$

Wir wollen den Werth von x, für welchen $fx = 1$ und folglich $\mathfrak{f}x = 0$ iſt, mit $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnen, ſo iſt $\mathrm{d}fx$ vermöge der Gleichung (j) negativ und $\mathfrak{f}x$ nimmt für wachſende Werthe von x ſo lange ab, als fx poſitiv iſt. Für größere Werthe von x als $\frac{1}{2}\pi$ wird die Function $\mathfrak{f}x$, nachdem ſie durch Null gegangen iſt, negativ und gleich:

$$-\sqrt{1 - (fx)^2}\,.$$

Die Function fx nimmt alſo zu beiden Seiten ihres größten Werthes $f(\frac{1}{2}\pi) = 1$ ſymmetriſch zu und ab, ſo daß man hat:

$$f(\tfrac{1}{2}\pi + z) = f(\tfrac{1}{2}\pi - z),$$

und folglich:

$$f(\pi) = f(0) = 0,\ \mathfrak{f}(\pi) = -1.$$

Wenn die unabhängige Veränderliche x den Werth π überſchreitet und $\mathfrak{f}x$ negativ iſt, ſo iſt $\mathrm{d} \cdot fx$ negativ und fx nimmt fortwährend ab, indem ſie negative Werthe annimmt. Da nun $\mathfrak{f}x$ für gleiche Zahlenwerthe von fx mit entgegengeſetzten Zeichen den Werth nicht ändert, ſo hat man auch:

$$f(\pi + z) = f(\pi - z),$$

und folglich:

$$f(\tfrac{3}{2}\pi) = -f(\tfrac{1}{2}\pi) = -1,\ \mathfrak{f}(\tfrac{3}{2}\pi) = 0.$$

Wenn x den Werth $\frac{1}{2}\pi$ überſchritten hat, ſo wird $\mathfrak{f}x$ wieder poſitiv, fx fängt wieder an algebraiſch zuzunehmen, indem es immer größere Zahlenwerthe durchläuft und nimmt zu beiden Seiten des größten Werthes $f(\frac{3}{2}\pi) = -1$ aus dem bereits angegebenen Grunde ſymmetriſch ab und zu, ſo daß man hat:

$$f(\tfrac{3}{2}\pi + z) = f(\tfrac{3}{2}\pi - z),$$

und endlich:

$$f(2\pi) = f(\pi) = 0,\ \mathfrak{f}(2\pi) = 1.$$

Die Werthe von fx und fx werden nun wieder dieſelben, wie für $x = 0$, $f(x)$ durchläuft dieſelbe Reihe gleichweit von einander abſtehender Werthe und des Intervall der Periode iſt gleich 2π.

Ebenſo könnte man den periodiſchen Lauf der Function fx unterſuchen und dieſe Unterſuchung auf negative Werthe von x ausdehnen.

Die Regel für die Veränderung der Zeichen der Sinus und Coſinus, welche in der Trigonometrie nur durch Induction und durch Nachweiſung der Richtigkeit der Formeln, wenn man ſie nach dieſer Regel auf Bogen. die größer ſind als der Quadrant oder auch größer als der ganze Kreisumfang erſtreckt, bewieſen wird, ergibt ſich alſo in der That aus dem Geſetze der Erzeugung dieſer Functionen, abgeſehen von jeder geometriſchen Bedeutung der Veränderlichen x und der davon abhängigen Functionen.

§. 75. Wir wollen nun die Function:

$$\psi x = \cos. x + \sin. x \cdot \sqrt{-1}$$

betrachten, ſo gibt die Differenzirung derſelben:

$$\psi' x = -\sin. x + \cos. x \sqrt{-1} = \psi x \cdot \sqrt{-1},$$

oder:

$$\frac{\psi' x}{\psi x} = \sqrt{-1}.$$

Außerdem reducirt ſich die Function ψx für $x = 0$ auf die Einheit; folglich kann dieſe Function durch $e^{x\sqrt{-1}}$ ausgedrückt werden (§. 72) und man hat die Fundamentalformel:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sin. x \cdot \sqrt{-1}. \qquad (A)$$

Die Functionen $\cos. x$, $\sin. x$ haben offenbar die Eigenſchaften, welche die Functionen fx, fx vermöge der Gleichungen (e) und (f) haben müſſen.

Wenn man das Zeichen der Wurzelgröße in der Gleichung (A) in das entgegengeſetzte verwandelt, ſo erhält man:

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos. x - \sin. x \sqrt{-1}$$

und folglich iſt:

$$\left.\begin{aligned} \cos. x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin. x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Dieſe Formeln, welche häufig in der Analyſis angewandt werden, ſind zuerſt von Euler bekannt gemacht, welcher ſie ſeinem Lehrer Johann Bernoulli zuſchreibt.

Ebenſo könnte man auch alle übrigen trigonometriſchen Functionen durch imaginäre Exponentialgrößen ausdrücken und es iſt z. B.:

$$\text{tang.}x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}. \qquad (1)$$

§. 76. Die Gleichung (A) gibt ferner:

$$x\sqrt{-1} = \log. (\cos. x + \sin. x \cdot \sqrt{-1}),$$

und wenn man $x = 2i\pi$ ſetzt, wo i eine beliebige ganze poſitive, oder negative Zahl bezeichnet, ſo erhält man:

$$\log. 1 = 2i\pi\sqrt{-1}.$$

Wenn also die Bedeutung der imaginären Exponentialgrößen und folglich die der imaginären Logarithmen bestimmt ist, so ergibt sich, daß die Einheit unendlich viele imaginäre Logarithmen hat, außer dem reellen Logarithmus Null, welcher $i = 0$ entspricht. Hieraus folgt auch, daß jede beliebige positive Zahl unendlich viele imaginäre Logarithmen hat; denn vermöge der identischen Gleichung:

$$a = a \times 1$$

hat man:

$$\log. a = (\log. a) + \log. 1 = (\log. a) + 2 i \pi \sqrt{-1},$$

wo $(\log. a)$ den reellen Logarithmus von a bezeichnet.

Auf dieselbe Weise fände man:

$$\log. (-1) = (2 i + 1) \pi \sqrt{-1},$$

$$\log. (-a) = (\log. a) + \log. (-1) = (\log. a) + (2 i + 1) \pi \sqrt{-1},$$

und aus dieser letzten Formel geht hervor, daß die Logarithmen aller negativen Zahlen sämmtlich imaginär sind.

Endlich hat man die Werthe:

$$\log. (\sqrt{-1}) = \frac{4 i + 1}{2} \pi \sqrt{-1}$$

$$\log. (-\sqrt{-1}) = \frac{4 i + 3}{2} \pi \sqrt{-1}.$$

Es gibt in der mathematischen Analysis kein merkwürdigeres Factum, als diesen unerwarteten Zusammenhang, welcher sich durch Anwendung des algebraischen Zeichens $\sqrt{-1}$ einerseits zwischen den Exponentialfunctionen und den trigonometrischen Functionen andererseits zwischen den Logarithmen und den Kreisbogen, d. h. zwischen Functionen herausstellt, welche so verschiedener Natur und so verschiedenen Ursprungs zu sein scheinen, wenn man nicht auf das Gesetz zurück geht, welches zwischen ihren Differenzialveränderungen herrscht.*)

---

*) Es wird nicht unzweckmäßig sein, hier auch die geometrische Bedeutung der imaginären Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $a + b\sqrt{-1}$ oder $\cos. \alpha + \sqrt{-1} \sin. \alpha$ näher nachzuweisen.

Wenn man ausdrücken will, daß eine auf einer geraden Linie OX (Fig. 7b) von einem festen Anfangspunkte O aus genommene Länge $OA = r$ in einer entgegengesetzten Richtung OX'' genommen werden soll, so gibt man bekanntlich der Größe r das entgegengesetzte Zeichen $-$ oder multiplicirt sie mit -1. Um aber auszudrücken, daß man von der Richtung OX zu einer im Anfangspunkte O darauf senkrechten Richtung OX' übergehen oder die Länge r auf dieser letzten Richtung nehmen soll oder will, ist bis jetzt kein allgemein gebräuchliches Zeichen angewandt, und um dieses Zeichen, welches zugleich algebraisch brauchbar sein muß, aufzufinden, wollen wir nach der Analogie annehmen, daß dieser Uebergang analytisch dadurch bewerkstelligt werde, daß man die Länge r mit irgend einem unbestimmten Factor λ multiplicirt, wodurch man λr erhält. Bemerken wir alsdann, daß der Uebergang von der Richtung OX zu der Richtung OX' ganz derselbe sein muß, als der Uebergang von der Richtung OX' zu der Richtung OX'', so muß man, um die Länge r von der Richtung OX' auf die Richtung OX'' analytisch zu übertragen, die Größe λr nochmals mit λ multipliciren, wodurch man offenbar $\lambda^2 r = -r = OA''$, folglich $\lambda = \pm \sqrt{-1}$ erhält.

Um also analytisch auszudrücken, daß die auf einer der Lage nach bekannten Linie oder Axe OX genommene Länge r auf einer im Anfangspunkte O darauf senkrechten Richtung genommen werden soll, muß man diese Länge mit $\sqrt{-1}$ multipliciren. — Es ist also damit die geometrische Bedeutung des imaginären Aus-

II. Moivre'ſche Formel und Grundbegriffe über die Theorie der Winkelſchnitte.

§. 77. Wenn n eine ganze poſitive Zahl bezeichnet, ſo ergibt ſich aus der Gleichung (A):

$$e^{nx\sqrt{-1}} = \cos. nx + \sin. nx \cdot \sqrt{-1},$$

und folglich:

$$(\cos. x + \sin. x \cdot \sqrt{-1})^n = \cos. nx + \sin. nx \cdot \sqrt{-1}. \quad (C)$$

---

druckes $\sqrt{-1}$ vollſtändig nachgewieſen. Offenbar bezieht ſich $-\sqrt{-1}$ auf die Richtung OX'''. Man könnte folglich $\pm\sqrt{-1}$ das Zeichen der Perpendikularität nennen.

Es läßt ſich nun auch leicht der Coefficient μ finden, durch welchen man eine auf der bekannten Richtung OX genommene Länge multipliciren muß, um ſie algebraiſch auf eine Richtung OR zu übertragen, welche mit jener einen beliebigen Winkel α bildet (Fig. 7c). Denn wenn man von irgend einem Punkte M der Richtung OR ein Perpendikel MP fällt, ſo wird der Weg OPM, wenn man nach dem vorhin Geſagten die Richtung von MP in Betracht zieht, ausgedrückt durch:

$$OP + MP\sqrt{-1},$$

und die gerade Linie OM wird ihrer Länge und Richtung nach ausgedrückt durch:

$$\mu \cdot OM.$$

Da aber beide Wege von dem Punkte O nach demſelben Punkte M führen, ſo müſſen ſie, ſobald man nicht blos die Längen, ſondern auch die Richtungen der geraden Linien in Betracht zieht, als gleich betrachtet werden. Man hat daher:

$$\mu \cdot OM = OP + PM\sqrt{-1},$$

folglich:

$$\mu = \frac{OP}{OM} + \frac{PM}{OM}\sqrt{-1} = \cos. \alpha + \sin. \alpha \cdot \sqrt{-1} = e^{\alpha\sqrt{-1}}.$$

Wenn man alſo mit dieſem Coefficienten μ die urſprüngliche auf OX genommene Länge r multiplicirt, ſo wird ſie analytiſch auf die Richtung OR übertragen, welche mit OX einen beliebigen Winkel α bildet. Man kann den Coefficienten μ daher ſehr ſchicklich den Richtungscoefficienten nennen. Hieraus ſieht man, daß eine gerade Linie von der Länge r in Beziehung auf eine der Lage nach als bekannt angeſehene Linie, ſowohl ihrer Länge, als ihrer Lage nach vollſtändig ausgedrückt wird durch:

$$r \cdot (\cos. \alpha + \sin. \alpha \cdot \sqrt{-1}) = r \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}},$$

und wenn ſie nicht durch den Anfangspunkt O, ſondern durch einen beliebigen andern Punkt O' oder O'' von OX (Fig. 7d) geht, durch:

$$\pm a + r(\cos. \alpha + \sin. \alpha \cdot \sqrt{-1}) = \pm a + re^{\alpha\sqrt{-1}},$$

wo $OO' = OO'' = a$ geſetzt iſt und r immer als poſitiv angeſehen wird.

Von dieſen Principien laſſen ſich in der Geometrie, Trigonometrie ꝛc. die ausgedehnteſten Anwendungen machen. Betrachten wir z. B. das ebene Dreieck ABe (Fig. 7e), ſo haben wir, wenn AB als feſte Axe betrachtet wird:

$$AB = c,\ Ae = b\ (\cos. A + \sin. A \cdot \sqrt{-1}),\ Be = a(\cos.(\pi - B) + \sin.(\pi - B) \cdot \sqrt{-1})$$
$$= a(-\cos. B + \sin. B \cdot \sqrt{-1})$$

Da nun aber der Weg ABe als dem Wege Ae gleich betrachtet werden muß, ſo hat man:

$$b(\cos. A + \sin. A \cdot \sqrt{-1}) = c + a(-\cos. B + \sin. B \cdot \sqrt{-1},$$

folglich:

$$b \cdot \cos. A = c - \cos. B,\ b \cdot \sin. A = a \sin. B,$$

welches bekanntlich zwei Grundformeln der ebenen Trigonometrie ſind.

Ebenſo kann man durch Anwendung derſelben Principien leicht die Gleichungen der Ellipſe, Hyperbel und Parabel ꝛc. finden. Z. d. Ueberſ.

Dieſe Gleichung zerfällt in zwei andere, wie alle Gleichungen, worin zugleich reelle und imaginäre Glieder vorkommen. So findet man z. B. für $n = 2$:

$$\cos.^2 x - \sin.^2 x + 2\sin.x \cos.x \cdot \sqrt{-1} = \cos. 2x + \sin. 2x \cdot \sqrt{-1},$$

und dieſe Gleichung vertritt die Stelle der beiden bekannten Gleichungen:

$$\sin. 2x = 2 \sin. x \cos. x,$$
$$\cos. 2x = \cos.^2 x - \sin.^2 x.$$

Durch dieſelbe Rechnung fände man für $n = 3$:

$$\sin. 3x = 3 \cos.^2 x - \sin.^3 x,$$
$$\cos. 3x = \cos.^3 x - 3 \cos. x \sin.^2 x.$$

Zur Verallgemeinerung dieſer Reſultate wollen wir bemerken, daß ſich aus der Gleichung (C) durch die Veränderung des Zeichens der Wurzelgröße folgende Gleichung ergibt:

$$(\cos. x - \sin. x \cdot \sqrt{-1})^n = \cos. nx - \sin. nx \cdot \sqrt{-1},$$

und aus der Verbindung dieſer letzten Gleichung mit der Gleichung (C) ergeben ſich die Ausdrücke:

$$\cos. nx = \frac{(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})^n + (\cos. x - \sin. x \cdot \sqrt{-1})^n}{2},$$

$$\sin. nx = \frac{(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})^n - (\cos. x - \sin. x \cdot \sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Wenn man die Potenzen durch die Binomialformel entwickelt, ſo verſchwinden die imaginären Ausdrücke, und man erhält:

$$\cos. nx = \cos.^n x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos.^{n-2} x \sin.^2 x$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos.^{n-4} x \sin.^4 x - \text{etc.} \qquad (D)$$

$$\sin. nx = n \cos. n^{n-1} x \sin. x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos.^{n-3} x \sin.^3 x + \text{etc.} \quad (E)$$

Dieſe beiden Formeln enthalten nur eine endliche Anzahl von Gliedern, ſo oft n eine ganze poſitive Zahl iſt, wie wir hier vorausſetzen.

§. 78. Wir wollen der Einfachheit der Rechnung wegen:

$$\cos. x + \sin. x \sqrt{-1} = u, \quad \cos. x - \sin. x \sqrt{-1} = v$$

ſetzen, ſo iſt:

$$uv = 1, \quad u + v = 2 \cos. x, \quad u - v = 2 \sin. x \sqrt{-1},$$

und die Binomialformel gibt wieder in dem Falle, wo n eine ganze poſitive Zahl iſt:

$$(2 \cos. x)^n = (u + v)^n = u^n + \frac{n}{1} u^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-2} v^2 + \ldots\ldots + v^n,$$

oder wegen $uv = 1$:

$$(2 \cos. x)^n = (u^n + \frac{n}{1} u^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-4} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-4} + \frac{n}{1} v^{n-2} + v^n.$$

Außerdem iſt aber:

$$u^n = \cos. nx + \sin. nx \sqrt{-1}, \quad v^n = \cos. nx - \sin. nx \sqrt{-1},$$

folglich:

$$(2\cos. x)^n = \cos.nx + n\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x + \ldots.$$

$$\ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x + n\cos.(n-2) + \cos. nx$$

$$+ \sqrt{-1}\left[\sin.nx + n\sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin.(n-4)x + \ldots.\right.$$

$$\left.\ldots\ldots - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin. n(n-4)x - n\sin.(n-2)x - \sin. nx\right]. \quad (m)$$

Der reelle Theil auf der zweiten Seite beſteht aus Gliedern, die paarweiſe einander gleich ſind, mit Ausnahme des mittleren Gliedes, wenn n eine gerade Zahl iſt, und der imaginäre Theil beſteht aus Gliedern, welche ſich paarweiſe gegenſeitig aufheben, indem das mittlere Glied von ſelbſt verſchwindet, wenn n eine gerade Zahl iſt. Man hat alſo für gerade Werthe von n:

$$(2\cos. x)^n = 2\left[\cos. nx + n\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x \ldots.\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)\ldots.\frac{n}{2}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots.\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos. 2x\right] + \frac{n(n-1)\ldots.\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\cdot 3\ldots\ldots.\frac{n}{2}}, \quad (F_1)$$

und für ungerade Werthe dieſes Exponenten:

$$(2\cos. x)^n = 2\left[\cos. nx + n\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x \ldots.\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)\ldots.\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots.\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cos. x\right]. \quad (F_2)$$

Ebenſo findet man, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl iſt:

$$(2\sqrt{-1}\cdot \sin. x)^n = (u-v)^n = u^n - nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{n-2}v^2 \ldots. \mp v^n$$

$$= u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{n-4} - \ldots\ldots \mp nv^{n-2} \pm v^n$$

$$= \cos. nx - n\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \mp n\cos.(n-2)x \pm \cos. nx$$

$$+ \sqrt{-1}\left[\sin. nx - n\sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin.(n-4)x - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots \pm n\sin.(n-2)x \mp \sin. nx\right]. \quad (m')$$

Wenn n eine gerade Zahl iſt, ſo verſchwindet die Reihe, womit $\sqrt{-1}$ im zweiten Theile der vorhergehenden Gleichung multiplicirt iſt, wie vorhin, und die Glieder des reellen Theiles vereinigen ſich paarweiſe, mit Ausnahme des mittleren Gliedes, ſo daß man folgende Formel erhält:

$$(-1)^{\frac{n}{2}}(2\sin.x)^n = 2\left[\cos.nx - n\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x - \ldots\ldots \mp \frac{n(n-1)\ldots\ldots\frac{n}{2}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos.2x\right] \mp \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\frac{n}{2}}, \quad (G_1)$$

worin man die oberen, oder unteren Zeichen nehmen muß, je nachdem $\frac{n}{2}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so ist es der reelle Theil des letzten Theiles der Gleichung (m'), dessen Glieder sich paarweise gegenseitig aufheben, während sich die des imaginären Theiles paarweise vereinigen. Wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens durch $\sqrt{-1}$ dividirt, so erhält man:

$$\left(-1\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(2\sin.x\right)^n = 2\left[\sin.nx - n\sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin.(n-4)x - \ldots\ldots \mp \frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin.x\right]. \quad (G_2)$$

§. 79. Die von Moivre herrührende und seinen Namen führende Formel (C) gibt unmittelbar den Ausdruck der Wurzeln der Gleichungen von der Form:

$$x^n \mp 1 = 0,$$

auf welche bekanntlich alle binomischen Gleichungen zurückgeführt werden können.

Wir wollen zunächst die Gleichung:

$$x^n - 1 = 0, \qquad (n)$$

nehmen, und

$$x = \cos.\varphi + \sin.\varphi \cdot \sqrt{-1}$$

setzen; so muß dieser Winkel φ so bestimmt werden, daß der Gleichung:

$$\cos.n\varphi + \sin.n\varphi \cdot \sqrt{-1} = 1$$

Genüge geschieht, welche in die beiden anderen Gleichungen:

$$\cos.n\varphi = 1, \quad \sin.n\varphi = 0$$

zerfällt, denen unmittelbar genügt wird, wenn man $\varphi = \frac{2i\pi}{n}$ und folglich:

$$x = \cos.\frac{2i\pi}{n} + \sin.\frac{2i\pi}{n} \cdot \sqrt{-1}, \qquad (p)$$

setzt, wo i eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Wenn man für i successive die n ganzen Zahlen:

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots n-1$$

setzt, so erhält man offenbar eben so viele verschiedene Werthe für x, während man, wenn man für i ganze, positive oder negative Zahlen, aber größer als $n-1$ setzt, wieder auf die schon erhaltenen Werthe von x kommt, wie dieses aus der Formel:

$$\begin{matrix}\cos.\\ \sin.\end{matrix}\left\{\frac{2(kn+r)\pi}{n}\right. = \begin{matrix}\cos.\\ \sin.\end{matrix}\left(2k\pi + \frac{2r\pi}{n}\right) = \begin{matrix}\cos.\\ \sin.\end{matrix}\left\{\frac{2r\pi}{n}\right.,$$

wo r eine ganze positive größere Zahl als n und k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, erhellet.

Die Gleichung (p) gibt also eben so viele verschiedene Wurzeln nach der Theorie der Gleichungen, als der Grad der Gleichung (n) Einheiten hat. Der Werth $i = 0$ gibt die reelle Wurzel $x = 1$ und wenn n eine gerade Zahl ist, so ist -1 eine zweite reelle Wurzel der Gleichung, welche dem Werthe $i = \frac{n}{2}$ entspricht, und alle übrigen Werthe von i geben imaginäre Wurzeln.

Bekanntlich kommen in jeder algebraischen Gleichung mit reellen Coefficienten die imaginären Wurzeln immer paarweise vor und jedes Paar solcher Wurzeln sind conjugirte oder zusammengehörige imaginäre Wurzeln von der Form:

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

deren Product eine reelle positive Größe $\alpha^2 + \beta^2$ ist. Die Formel (p) genügt dieser Bedingung; denn man hat:

$$\cos.\frac{2(n-r)\pi}{n} = \cos.\frac{2r\pi}{n}, \quad \sin.\frac{2(n-r)\pi}{n} = -\sin.\frac{2r\pi}{n},$$

so daß die durch den Werth $i = r$ gegebene imaginäre Wurzel die conjugirte der $i = n - r$ entsprechenden Wurzel ist. Man kann daher alle Wurzeln der Gleichung (n) oder alle Wurzeln der Einheit durch die Formel:

$$x = \cos.\frac{2i\pi}{n} \pm \sin.\frac{2i\pi}{n} \cdot \sqrt{-1}$$

ausdrücken, worin man der Zahl i nur die ganzen Werthe von Null bis $\frac{n}{2}$ beizulegen braucht, wenn n eine gerade Zahl ist, und die ganzen Werthe von Null bis $\frac{n-1}{2}$, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Die reellen Factoren des zweiten Grades, welche das Product zweier conjugirter imaginärer Factoren sind, werden durch folgende Formel ausgedrückt:

$$x^2 - 2x\cos.\frac{2i\pi}{n} + 1.$$

Dieser Satz, welcher sich leicht geometrisch ausdrücken läßt, ist unter dem Namen des Lehrsatzes von Cotes bekannt.

Die Gleichung:

$$x^n + 1 = 0$$

führt auf ähnliche Formeln, welche man erhält, wenn man in der vorhergehenden $2i + 1$ statt $2i$ setzt.

Umgekehrt hat man, so oft man eine binomische Gleichung:

$$x^n \mp 1 = 0$$

algebraisch aufzulösen, d. h., ihre Wurzeln durch ein System algebraischer Wurzelgrößen auszudrücken weiß, einen algebraischen Ausdruck der trigonometrischen Linien:

$$\left.\begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\right\}\frac{2i\pi}{n}, \quad \left.\begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\right\}\frac{(2i+1)\pi}{n},$$

und insbesondere der Linien:

$$\sin.\frac{2\pi}{n}, \quad \cos.\frac{2\pi}{n}.$$

Wenn man also diese imaginären Wurzeln durch ein System von Wurzelgrößen des zweiten Grades ausdrücken kann, welche sich mit dem Lineale und dem Zirkel construiren lassen, wie die Elemente der analytischen Geome-

trie lehren, so kann man auch mit dem Lineale und dem Zirkel den Sinus oder Cosinus des Bogens construiren, welcher der n^{te} Theil des Kreisumfanges ist, und folglich diesen Kreisumfang in dem Sinne der Alten in n gleiche Theile theilen. Hieraus sieht man, wie sich dieses bei den griechischen Geometern so berühmte Problem an die Theorie der algebraischen Auflösung der Gleichungen anschließt, welche selbst mit der Theorie der Combinationen und der der Zahlen in enger Verbindung steht. Allein es ist hier der Ort nicht, über diese sehr merkwürdigen Beziehungen ein Mehreres zu sagen, weil sie nicht sowohl für die Anwendungen der Mathematik auf andere positive Wissenschaften, als für ihre Philosophie von Interesse sind.

§. 80. Vermittelst der trigonometrischen Tafeln kann man nicht blos, wie wir eben gesehen haben, die binomischen Gleichungen, sondern auch die trinomischen Gleichungen von der Form:

$$z^{2n} - 2az^n + b = 0, \qquad (q)$$

auflösen; denn wenn man daraus für z^2 einen reellen Werth ableitet, so lassen sie sich unmittelbar auf binomische Gleichungen vom n^{ten} Grade zurückführen, und im entgegengesetzten Falle, wo $a^2 < b$ ist, kann man setzen:

$$z = \sqrt[2n]{b} \cdot x, \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \pm \cos. \lambda,$$

wo λ einen kleinern Bogen als der Quadrant bezeichnet, und alsdann nimmt die Gleichung (q) eine der beiden folgenden Formen an:

$$x^{2n} - 2x^n \cos. \lambda + 1 = 0, \qquad (q_1)$$
$$x^{2n} + 2x^n \cos. \lambda + 1 = 0. \qquad (q_2)$$

Wir wollen annehmen, daß die Gleichung (q) die erste Form (q_1) habe, und setzen:

$$x = \cos. \varphi + \sin. \varphi \cdot \sqrt{-1},$$

so muß der Werth des Winkels φ den Bedingungen:

$$\cos. 2n\varphi - 2 \cos. n\varphi \cdot \cos. \lambda + 1 = 0,$$
$$\sin. 2n\varphi - 2 \sin. n\varphi \cdot \cos. \lambda = 0$$

genügen, was in der That geschieht, wenn man:

$$\cos. n\varphi = \cos. \lambda, \text{ folglich } \varphi = \frac{2i\pi \pm \lambda}{n}$$

nimmt, wo i irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Die $2n$ Wurzeln der gegebenen Gleichung werden also durch die Formel:

$$x = \cos. \frac{2i\pi \pm \lambda}{n} + \sin. \frac{2i\pi \pm \lambda}{n} \cdot \sqrt{-1},$$

ausgedrückt, worin man für i successive alle ganzen Werthe von 0 bis $n-1$ incl. setzen muß. Die reellen Factoren der Gleichung (q_1) werden durch die Formel:

$$x^2 - 2x \cos. \frac{2i\pi \pm \lambda}{n} + 1$$

ausgedrückt, und wenn die Gleichung (q) die Form (q_2) hätte, so müßte man in den vorhergehenden Formeln $2i + 1$ für $2i$ setzen, um sie aufzulösen.

§. 81. Wenn man in der Moivre'schen Formel:

$$(\cos. x + \sin. x \cdot \sqrt{-1})^n = \cos. nx + \sin. nx \cdot \sqrt{-1} \qquad (C)$$

für die Zahl n ganze Werthe setzt, so hat jeder Theil der vorhergehenden Gleichung nur einen einzigen Werth und die Anwendung der Formel erfordert weiter keine besondere Bemerkung; aber wenn der Exponent n ein rationaler Bruch $\frac{p}{q}$ ist, welcher immer, als auf seinen einfachsten Ausdruck reducirt an-

genommen werden muß, ſo hat der erſte Theil der vorhergehenden Gleichung nach der Theorie der Wurzeln der Einheit q verſchiedene Werthe, welche man erhält, wenn man den zweiten Theil dieſer Gleichung durch die Wurzeln des q^{ten} Grades aus der Einheit multiplicirt. Nun werden aber nach dem Vorhergehenden dieſe Wurzeln durch die Formel:

$$\cos.\frac{2i\pi}{q} + \sin.\frac{2i\pi}{q} \cdot \sqrt{-1}$$

ausgedrückt, und man muß folglich, damit in dieſem Falle die Moivre'ſche Formel die erforderliche Allgemeinheit bekommt, ſetzen:

$$\left(\cos x + \sin.x \cdot \sqrt{-1}\right)^{\frac{p}{q}} =$$

$$\left(\cos.\frac{p}{q}x + \sin.\frac{p}{q}x\sqrt{-1}\right)\left(\cos.\frac{2i\pi}{q} + \sin.\frac{2i\pi}{q}\cdot\sqrt{-1}\right)$$

$$= \cos.\frac{px+2i\pi}{q} + \sin.\frac{px+2i\pi}{q}\cdot\sqrt{-1}.$$

Da ferner p eine ganze Zahl und mit q prim iſt, ſo kann man pi für i ſetzen, wodurch man die elegantere Formel:

$$\left(\cos.x + \sin.x \cdot \sqrt{-1}\right)^{\frac{p}{q}} = \cos.\frac{p}{q}\left(x + 2i\pi\right) + \sin.\frac{p}{q}\left(x+2i\pi\right)\cdot\sqrt{-1}$$

erhält, worin man für i alle ganzen Werthe von 0 bis q—1 incl. ſetzen muß.

§. 82. Die Formeln (D), (E), (F_1), (F_2), (G_1), (G_2), welche zur Transformation der Sinus und Coſinus der Vielfachen eines Bogens in Potenzen des Sinus und Coſinus des einfachen Bogens, und umgekehrt, dienen, müſſen auf ähnliche Weiſe modificirt werden, wenn die Exponenten der Potenzen gebrochene Zahlen ſind, und dieſer feine Punct der Theorie der Winkelſchnitte iſt durch die intereſſante Abhandlung, welche Poinſot im Jahre 1825 unter dem Titel: **Recherches sur l'analyse des sections angulaires** herausgegeben hat, in ein helles Licht geſetzt. Wir wollen über dieſen Gegenſtand nun noch das Folgende mittheilen, welches als weniger wichtig wie das Vorhergehende bei einem erſten Studium übergangen werden kann.

Es ſei:

$$\left.\begin{aligned}\Phi x &= \cos.nx + n\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x + \text{etc.}\\ \Psi x &= \sin.nx + n\sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin.(n-4)x + \text{etc.}\end{aligned}\right\}, \quad (H)$$

ſo verwandelt ſich die Formel (m) in folgende:

$$(2\cos.x)^n = \Phi x + \Psi x\sqrt{-1},$$

welche nach den Rechnungen in §. 78 als für beliebige Werthe des Exponenten n gültig angeſehen werden kann, wenn man annimmt, daß die Binomialformel für beliebige Werthe des Exponenten gültig iſt, wie dieſes in den meiſten Lehrbüchern der Algebra unabhängig von der Differenzialrechnung bewieſen wird.

Wenn n eine ganze poſitive Zahl iſt, ſo iſt die Function $\Psi x = 0$ und die Function Φx beſteht aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, welche ſich paarweiſe vereinigen, wie vorhin gezeigt iſt; aber im Allgemeinen ſind die zweiten Theile der Gleichungen (H) Reihen von unendlich vielen Gliedern.

Wir wollen der Zahl n den gebrochenen Werth $\frac{p}{q}$ beilegen, wo p, q

ganze positive Zahlen bezeichnen, welche prim unter sich sind; so hat die Wurzelgröße:

$$(2\cos. x)^{\frac{p}{q}} \qquad (r)$$

q verschiedene Werthe, welche in dem Ausdrucke:

$$\left(\Phi x + \Psi x \sqrt{-1}\right)\left(\cos. \frac{p}{q} 2i\pi + \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi \sqrt{-1}\right)$$

enthalten sind, der nach dem weiter oben Gesagten gleichbedeutend ist mit:

$$\Phi(x + 2i\pi) + \Psi(x + 2i\pi) \cdot \sqrt{-1},$$

wo i alle ganzen Werthe von 0 bis q—1 incl. erhalten muß.

Wir wollen annehmen, daß cos. x positiv ist und mit X den reellen und positiven Werth der Wurzelgröße (r) bezeichnen, so erhält man die übrigen Werthe der Wurzelgröße, wenn man X durch die von 1 verschiedenen Wurzeln der Einheit multiplicirt, d. h. die q Werthe der Wurzelgröße sind in dem Ausdrucke:

$$X\left(\cos. \frac{p}{q} \cdot 2i'\pi + \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi \cdot \sqrt{-1}\right)$$

enthalten, wenn man der Zahl i' alle ganzen Werthe von 0 bis q — 1 incl. beilegt.

Es ist also immer möglich den Zahlen i, i' zwischen diesen Grenzen solche Werthe beizulegen, daß man hat:

$$X\left(\cos. \frac{p}{q} \cdot 2i'\pi + \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i'\pi \cdot \sqrt{-1}\right)$$

$$= \Phi(x + 2i\pi) + \Psi(x + 2i\pi)\sqrt{-1}, \qquad (s)$$

oder was auf dasselbe hinausläuft:

$$X\left(\cos. \frac{p}{q} \cdot 2i'\pi + \sin. \frac{p}{q} 2i'\pi \cdot \sqrt{-1}\right) =$$

$$\left(\Phi x + \Psi x \cdot \sqrt{-1}\right)\left(\cos. \frac{p}{q} 2i\pi + \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi \cdot \sqrt{-1}\right) \qquad (t)$$

und die Aufgabe ist auf die Bestimmung der correspondirenden Werthe der Zahlen i, i' zurückgeführt.

Wenn man in der vorhergehenden Gleichung $x = 0$ setzt, so hat man:

$$\Psi(0) = 0, \quad \Phi(0) = (1 + 1)^{\frac{p}{q}}, \quad X_0 = 2^{\frac{p}{q}},$$

also $i = i'$ und die Formel (s) verwandelt sich folglich in folgende:

$$X\left(\cos. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi + \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i'\pi \cdot \sqrt{-1}\right)$$

$$= \Phi(x + 2i\pi) + \Psi(x + 2i\pi) \cdot \sqrt{-1}.$$

Da man nun $i = 0$ nehmen kann, so folgt, daß man für alle zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ liegenden Werthe von x, welche cos. x zu einem positiven Bruche machen, hat:

$$\Phi x = X, \quad \Psi x = 0 \qquad (u)$$

und allgemein hat man zwischen diesen Grenzen wegen der Unabhängigkeit der beiden reellen und imaginären Theile von einander:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x+2i\pi) &= X \cos. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi, \\ \Psi(x+2i\pi) &= X \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (v)$$

§. 83. Wir wollen nun annehmen, daß cos. x negativ ſei, indem x zwiſchen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegt, und mit X den reellen und poſitiven Werth der Wurzelgröße $(-2\cos. x)^{\frac{p}{q}}$ bezeichnen, ſo haben wir:

$$(2\cos. x)^{\frac{p}{q}} = X(-1)^{\frac{p}{q}} = X\left[\cos. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi + \sin. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi \cdot \sqrt{-1}\right]$$

und man erhält folglich ſtatt der Gleichungen (s) und (t) die folgenden:

$$X\left[\cos. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi + \sin. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi \cdot \sqrt{-1}\right] = \Phi(x + 2i\pi) + \Psi(x + 2i\pi) \cdot \sqrt{-1}, \qquad (s')$$

$$X\left[\cos. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi + \sin. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi \cdot \sqrt{-1}\right] = (\Phi x + \Psi x \cdot \sqrt{-1})\left(\cos. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi + \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi \cdot \sqrt{-1}\right). \qquad (t')$$

Die Zahlen i, i' müſſen wieder alle ganzen Werthe von 0 bis q—1 incl. annehmen können und unter dieſen Werthen muß man die einander entſprechenden kennen.

Wenn man nun $x = \pi$ ſetzt, ſo werden alle Coſinus und Sinus, welche in den zweiten Theilen der Gleichungen (H) vorkommen, reſp. gleich $\cos. \frac{p}{q}\pi$, $\sin. \frac{p}{q}\pi$, ſo daß man erhält:

$$\Phi(\pi) = (1+1)^{\frac{p}{q}} \cos. \frac{p}{q}\pi,$$

$$\Psi(\pi) = (1+1)^{\frac{p}{q}} \sin. \frac{p}{q}\pi,$$

und X_π iſt $= 2^{\frac{p}{q}}$. Aus der Gleichung (t') ergibt ſich alſo nach der Hinweglaſſung des gemeinſchaftlichen Factors $2^{\frac{p}{q}}$:

$$\cos. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi + \sin. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi \cdot \sqrt{-1}$$

$$= \left(\cos. \frac{p}{q}\pi + \sin. \frac{p}{q}\pi \cdot \sqrt{-1}\right)\left(\cos. \frac{p}{q}2i\pi + \sin. \frac{p}{q}2i\pi\sqrt{-1}\right),$$

$$= \cos. \frac{p}{q}(2i+1)\pi + \sin. \frac{p}{q}(2i+1)\pi \cdot \sqrt{-1},$$

woraus ſich $i' = i$ und folglich:

$$X\left[\cos. \frac{p}{q}(2i+1)\pi + \sin. \frac{p}{q}(2i+1)\pi\sqrt{-1}\right] = \Phi(x + 2i\pi) + \Psi(x + 2i\pi) \cdot \sqrt{-1}$$

ergibt. Dieſe letzte Gleichung zerfällt in die beiden folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x + 2i\pi) &= X \cos. \frac{p}{q}(2i+1)\pi, \\ \Psi(x + 2i\pi) &= X \sin. \frac{p}{q}(2i+1)\pi, \end{aligned}\right\} \qquad (v')$$

und wenn man $i = 0$ ſetzt:

$$\left.\begin{aligned} \Phi x &= X \cos. \frac{p}{q}\pi, \\ \Psi x &= X \sin. \frac{p}{q}\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (u')$$

§. 84. Wir haben in dem Vorhergehenden vorausgesetzt, daß die Functionen Φ, Ψ für alle Werthe von x vermöge der Gleichungen (H) einen bestimmten Werth haben, oder daß man vermittelst dieser Gleichungen allein mit einer unbegrenzten Annäherung die Curven construiren kann, deren Abscisse x und deren Ordinaten Φx, Ψx sind. Wenn aber diese wesentliche Bedingung nicht erfüllt würde, d. h. wenn die zweiten Theile der Gleichungen (H) keine convergenten Reihen bildeten, so würden die erhaltenen Formeln illusorisch und hätten keinen bestimmten Sinn mehr. Nun wird aber die geforderte Bedingung, wie Cauchy gezeigt hat, nur dann erfüllt, wenn man dem Exponenten n positive Werthe beilegt.

Denn nach der Binomialformel hat man:

$$(1-\varepsilon)^n = 1 - \frac{n}{1}\cdot\varepsilon - \frac{n(1-n)}{1\cdot 2}\cdot\varepsilon^2 - \frac{n(1-n)(2-n)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\varepsilon^3 - \text{etc.}, \qquad (\varepsilon)$$

welche Entwickelung sich nur für ganze positive Werthe des Exponenten n schließt und für jeden andern Werth von n in's Unendliche fortläuft. Wenn y_i das Glied dieser Reihe bezeichnet, welches i Glieder vor sich hat, so hat man:

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = \frac{i-n}{i+1}\cdot\varepsilon = \frac{1-\frac{n}{i}}{1+\frac{1}{i}}\cdot\varepsilon. \qquad (\varrho)$$

Je größer also i wird, desto mehr convergirt der Werth des Verhältnisses (ϱ) gegen eine Zahlengrenze, welche größer, oder kleiner als die Einheit ist, je nachdem der Zahlenwerth ε selbst größer, oder kleiner als die Einheit ist. Die Reihe (ε) convergirt also für alle Werthe von ε, welche kleiner sind als die Einheit (§. 26). Außerdem haben alle Glieder dieser Reihe, für welche der Index i größer ist als der Zahlenwerth von $n+1$ offenbar dasselbe Zeichen, nämlich das Zeichen des Gliedes:

$$\frac{n(1-n)(2-n)\ldots\ldots(\nu-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu+1)}\cdot\varepsilon^{\nu+1},$$

wo ν die zunächst kleinere ganze Zahl als n bezeichnet. Die Reihe (ε) ist also an der Grenze $\varepsilon = 1$ convergent, oder divergent, je nachdem die Größe $(1-\varepsilon)^n$ gegen eine endliche Grenze, gegen Null, oder gegen eine unendliche Grenze convergirt, während ε gegen die Einheit convergirt. Wenn aber der Exponent n positiv ist, so hat man:

$$\lim.\ (1-\varepsilon)^n = (1-1)^n = 0,$$

und folglich für positive Werthe von n:

$$0 = 1 - \frac{n}{1} - \frac{n(1-n)}{1\cdot 2} - \frac{n(1-n)(2-n}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{etc.} \qquad (h)$$

Da aber die Reihe (h), deren Glieder von einem gewissen Range an, alle dasselbe Zeichen haben, convergent ist, so sind die Reihen (H), welche man erhält, wenn man jedes Glied der Reihe (h) durch einen Factor multiplicirt, welcher bald positiv und bald negativ, aber seinem Zahlenwerthe nach immer kleiner als die Einheit ist, um so mehr convergent, und zwar für jeden Werth von x, so lange der Exponent n einen positiven Werth erhält.

Die Formeln in den beiden vorhergehenden §§. gewähren den Vortheil, daß ſie die Werthe der Functionen Φx, Ψx geben, ohne daß man zu den auf der Anwendung der Reihen beruhenden Näherungsrechnungen ſeine Zuflucht zu nehmen braucht. Wenn alſo die Functionen Φx, Ψx für Werthe von x zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ durch die Gleichungen (u) und für Werthe von x zwiſchen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ durch die Gleichungen (u') gegeben werden, ſo werden ſie für alle poſitive Werthe von $x < (2q - \frac{1}{2})\pi$ durch die Formel (v) und (v') beſtimmt, und da man außerdem nach der Form der Gleichungen (H) hat:

$$\Phi x = \Phi(x \pm 2kq\pi),$$
$$\Psi x = \Psi(x \pm 2kq\pi),$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, ſo folgt, daß die Werthe der Functionen Φx, Ψx für alle Werthe von x bekannt ſind, oder daß man für alle Werthe von x die Grenzen hat, gegen welche die Summen der Reihen:

$$\cos.\frac{p}{q}x + \frac{p}{q}\varepsilon \cdot \cos.\left(\frac{p}{q}-2\right)x + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\cdot 2}\varepsilon^2 \cdot \cos.\left(\frac{p}{q}-4\right)x + \text{etc.},$$

$$\sin.\frac{p}{q}x + \frac{p}{q}\varepsilon \cdot \sin.\left(\frac{p}{q}-2\right)x + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\cdot 2}\varepsilon^2 \cdot \sin.\left(\frac{p}{q}-4\right)x + \text{etc.},$$

convergiren, wenn die Zahl ε, indem ſie immer kleiner als 1 bleibt, ohne Ende gegen die Einheit convergirt.

Es ſei z. B. $n = \frac{p}{q} = \frac{1}{3}$, ſo hat man für die Werthe von x

zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$, $\Phi x = \sqrt[3]{2\cos.x}$,

zwiſchen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$, $\Phi x = \sqrt[3]{-2\cos.x} \cdot \cos.\frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\cos.x}$,

zwiſchen $\frac{3}{2}\pi$ und $\frac{5}{2}\pi$, $\Phi x = \sqrt[3]{2\cos.x} \cdot \cos.\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\cos.x}$,

zwiſchen $\frac{5}{2}\pi$ und $\frac{7}{2}\pi$, $\Phi x = \sqrt[3]{-2\cos.x} \cdot \cos.\ \pi = \sqrt[3]{2\cos.x}$,

zwiſchen $\frac{7}{2}\pi$ und $\frac{9}{2}\pi$, $\Phi x = \sqrt[3]{2\cos.x} \cdot \cos.\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\cos.x}$,

zwiſchen $\frac{9}{2}\pi$ und $\frac{11}{2}\pi$, $\Phi x = \sqrt[3]{-2\cos.x} \cdot \cos.\frac{5}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\cos.x}$,

worauf die Werthe von Φx periodiſch wieder die halben Werthe durchlaufen. Folglich hat die Curve, deren Ordinate Φx iſt, die in Fig. 29 angegebene Form.

Drittes Kapitel.

Beſtimmung des Werthes der entwickelten Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe, wenn ſie für einen beſonderen Werth dieſer letztern unter einer unbeſtimmten Form erſcheinen. — Beſtimmung der Maxima und Minima ſolcher Functionen.

I. Beſtimmung des Werthes der entwickelten Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe, wenn ſie für einen beſonderen Werth dieſer letztern unter einer unbeſtimmten Form erſcheinen.

§. 85. Wir wollen uns in dieſem Kapitel mit zwei wichtigen Anwendungen der Differenzialrechnung beſchäftigen, und zwar zunächſt mit der Beſtimmung des Werthes einer Function von x, welche für einen beſonderen Werth x_0 von x unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$ erſcheint.

Die Aufgabe läuft alſo darauf hinaus, die Grenze zu beſtimmen, gegen welche die Function:

$$\varphi x = \frac{fx}{Fx}$$

convergirt, wenn x gegen den Werth x_0 convergirt und die beiden Functionen fx, Fx zu gleicher Zeit für dieſen Werth von x verſchwinden (§. 28).

Nun hat man aber:

$$\varphi(x+\Delta x) = \frac{fx + \Delta \cdot fx}{Fx + \Delta \cdot Fx},$$

und für den Werth x_0, welcher fx und Fx verſchwinden macht:

$$\varphi(x_0+\Delta x) = \frac{\Delta \cdot fx}{\Delta \cdot Fx} = \frac{\frac{\Delta \cdot fx}{\Delta x}}{\frac{\Delta \cdot Fx}{\Delta x}};$$

folglich wenn man zu der Grenze übergeht:

$$\varphi x_0 = \frac{f'x_0}{F'x_0}.$$

Wenn die Functionen: $f'x$, $F'x$ ebenfalls für $x = x_0$ beide verſchwänden, wie die Functionen fx, Fx, ſo ergäbe ſich ganz auf dieſelbe Weiſe, daß

$$\varphi x_0 = \frac{f''x_0}{F''x_0}$$

wäre, u. ſ. f. Der auf dieſe Weiſe beſtimmte Werth von φx_0 kann übrigens Null, oder unendlich ſein.

Wenn der Werth x_0 die beiden Functionen fx und Fx unendlich machte, ſo würde er die Functionen:

$$\frac{1}{fx}, \quad \frac{1}{Fx},$$

deren reſp. Ableitungen der erſten Ordnung

$$-\frac{f'x}{(fx)^2}, \quad -\frac{F'x}{(Fx)^2}$$

ſind, verſchwinden machen. Man hätte folglich:

$$\frac{1}{fx_0} : \frac{1}{Fx_0} = \frac{f'x_0}{(fx_0)^2} : \frac{F'x_0}{(Fx_0)^2},$$

woraus folgt:

$$\frac{fx_0}{Fx_0} = \frac{f_1x_0}{F'x_0},$$

Hieraus ſchließen wir alſo mit Cauchy, daß die Regel zur Beſtimmung des Werthes von φx_0 dieſelbe bleibt, die Function $\frac{fx_0}{Fx_0}$ mag unter der einen oder unter der andern der unbeſtimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ erſcheinen.

§. 86. Durch Anwendung dieſer Regel findet man in Verbindung mit den im vorletzten Kapitel gegebenen Regeln des Differenzirens:

1) für $x = 0$:

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \log.a - \log.b = \log.\left(\frac{a}{b}\right),$$

$$\frac{\log.\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot.x} = \frac{\sin.^2x}{x} = 2\sin.x\cos.x = 0,$$

$$\frac{x - \sin.x}{x^3} = \frac{1 - \cos.x}{3x^2} = \frac{\sin.x}{6x} = \frac{\cos.x}{6} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{\sin.^3x}{x - \frac{1}{2}\sin.2x} = \frac{3\sin.^2x\cos.x}{1 - \cos.2x} = \frac{3\sin.x(2\cos.^2x - \sin.^2x)}{2\sin.2x}$$

$$= \frac{3\cos.x(2\cos.^2x - 7\sin.^2x}{4\cos.2x} = \frac{3}{2};$$

2) für $x = 1$:

$$\frac{\log.x}{x-1} = \frac{1}{x} = 1,$$

$$\frac{x-1}{x^n-1} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}} - x + 1} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2-1}}{3x\sqrt{x-1} - 1} = -\frac{3}{2},$$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x-1}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\infty} = 0.$$

§. 87. Wir wollen annehmen, daß ſich die Function Fx auf x reducirt, und daß die andere Function fx die Eigenſchaft beſitzt, mit x zugleich Null oder unendlich zu werden und unterſuchen, was für ein Verhältniß zwiſchen dieſer Function und der Veränderlichen x ſtatt findet, wenn beide zu gleicher Zeit Null oder unendlich werden. Dieſe Unterſuchung kommt auf die eben angeſtellte zurück und man findet z. B. für $x = 0$:

$$\frac{1 - \cos.x}{x} = 0,$$

und für $x = \infty$:

$$\frac{\log.x}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Hieraus sieht man, daß der Sinusversus eines unendlich kleinen Bogens gegen diesen Bogen unendlich klein, und daß der Logarithmus einer unendlich großen Zahl gegen diese Zahl ebenfalls unendlich klein ist.

Es sei nun die Curve zu untersuchen, deren Gleichung

$$y = x \log. x$$

ist.

Für negative Werthe von x wird y imaginär und die Ordinate y ist positiv oder negativ, je nachdem die Werthe von x größer oder kleiner als 1 sind. Um den $x = 0$ entsprechenden Werth von y zu erhalten, setze man:

$$x = \frac{1}{z},$$

so erhält man:

$$y = -\frac{\log. z}{z}.$$

Nun ist aber nach dem Vorhergehenden $y = 0$ für $z = \infty$ oder für $x = 0$, und außerdem hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \log. x + 1,$$

welche Größe für $x = 0$ unendlich wird, so daß die Curve die Axe der y im Anfangspunkte der Coordinaten berührt. Dieses Beispiel kann zu dem bereits in §. 16 angeführten Beispiele transcendenter Curven gezählt werden, welche plötzlich in ihrem Laufe unterbrochen werden, ohne daß eine Wiedervereinigung zwischen zwei Zweigen derselben Curve stattfindet, wie dieses immer bei algebraischen Curven der Fall ist.

§. 88. Wenn alle Ableitungen von fx und Fx zu gleicher Zeit mit diesen Functionen selbst Null oder unendlich würden und wenn durch die Anwendung der Regel in §. 85 der Factor, welchen sie gleichzeitig Null oder unendlich macht, nicht herausgehoben würde; so würde das Verfahren unbrauchbar und man müßte den Werth von φx_0 durch besondere Methoden bestimmen. Wenn z. B.:

$$fx = \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x-1},$$
$$Fx = \sqrt{x^2-1}$$

ist, und man setzt $x = 1$, so verschwinden diese beiden Functionen und ihre Ableitungen aller Ordnungen werden zu gleicher Zeit unendlich. Aber wenn man $x - 1 = z$ setzt, so kommt:

$$\varphi x = \frac{\sqrt{1+z} - 1 + \sqrt{z}}{\sqrt{z(z+2)}},$$

und wenn man Zähler und Nenner dieses Bruches durch

$$\sqrt{1+z} + 1 - \sqrt{z}$$

multiplicirt und den gemeinschaftlichen Factor $\sqrt{z}$ des Zählers und Nenners hinwegläßt, so erhält man den Ausdruck:

$$\varphi x = \frac{2}{\sqrt{z+2} \cdot \{\sqrt{1+z} + 1 - \sqrt{z}\}},$$

welcher für $z = 0$ oder $x = 1$ gibt:

$$\varphi x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

§. 89. Bekanntlich kann eine Function nicht für einen besonderen Werth der Veränderlichen unendlich werden, ohne daß alle ihre Ableitungen zu gleicher

Zeit unendlich werden (§. 35) und folglich muß die vorhergehende allgemeine Methode jedesmal unbrauchbar werden, wenn der Werth von x, für welchen fx und Fx verſchwinden, f'x und F'x unendlich macht. Dagegen kann man den Fall, wo die Ableitungen aller Ordnungen der Functionen fx und Fx zu gleicher Zeit verſchwinden, nur als einen Ausnahmefall betrachten, wenigſtens bei Functionen, welche ſich mathematiſch ausdrücken laſſen, und man hat daher Functionen angeführt, bei welchen dieſe Ausnahme ſtattfindet. Wenn man z. B.

$$fx = a^{-\frac{1}{x^n}}$$

ſetzt, wo a und n poſitive Zahlen bezeichnen, wovon die erſte größer iſt als die Einheit, ſo hat man:

$$f'x = \frac{n \log.a \cdot a^{-\frac{1}{x^n}}}{x^{n+1}},\quad f''x = n\log.a \cdot a^{-\frac{1}{x^n}}\left(\frac{n\log.a}{x^{(n+1)2}} - \frac{n+1}{x^{n+2}}\right),\ \text{etc.}$$

Wenn man $x = 0$ ſetzt, ſo wird die Größe:

$$fx = a^{-\frac{1}{x^n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{x^n}}}$$

unendlich klein oder Null, ſo daß alle Ableitungen f'x, f''x, ... unter der Form $\frac{0}{0}$ erſcheinen. Wir wollen daher

$$\frac{1}{x} = z$$

ſetzen, ſo kommt:

$$f'x = \frac{n \log.a \cdot z^{n+1}}{az^n},\quad f''x = \frac{n\log.a\cdot(n\log.a\cdot z^{(n+1)2} - (n+1)(z^{n+2})}{az^n},\ \text{etc.}$$

und der Werth $x = 0$ entſpricht $z = \infty$. Nun iſt aber leicht einzuſehen, daß jeder Ausdruck von der Form:

$$\frac{z^m}{az^n},$$

worin a, m und n poſitive Zahlen bezeichnen und $a > 1$ iſt, für $z = \infty$ verſchwindet; denn wenn man auf dieſen Ausdruck die Regel für die Beſtimmung des Werthes der Functionen, welche unter der unbeſtimmten Form:

$$\frac{\infty}{\infty}$$

erſcheinen, anwendet, indem man den Zähler und Nenner dieſes Bruches i mal hinter einander differenzirt, wo i die unmittelbar größere ganze Zahl als m bezeichnet, ſo erhält man für $z = \infty$:

$$\frac{z^m}{az^n} = \frac{k}{\psi z},$$

wo k eine conſtante Zahl und ψz eine Function iſt, welche unendlich bleibt, wenn z unendlich iſt. Es verſchwinden alſo für $x = 0$ alle Ableitungen der Function fx.

Wenn folglich:

$$fx = a^{-\frac{1}{x^n}},\ Fx = b^{-\frac{1}{x^n}},$$

ſetzt, wo b ſowohl als a eine größere poſitive Zahl als die Einheit und n' eben ſo wohl als n eine poſitive Zahl iſt; ſo verſchwinden die Ableitungen aller Ordnungen des Zählers und Nenners des Bruches

$$\varphi x = \frac{a^{-\frac{1}{x^{n'}}}}{b^{-\frac{1}{x^{n}}}},$$

für $x = 0$ und man kann folglich in dieſem Falle die allgemeine Regel nicht anwenden. Wenn $n' = n$ iſt, ſo kommt:

$$\varphi x = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{x^n}}$$

und der Werth $x = 0$ macht φx zu Null oder unendlich, je nachdem $a >$ oder $< b$ iſt.

§. 90. Eben ſo findet man, daß der Werth des Bruches:

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

gegen Null, und der Function:

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

gegen das Unendliche convergirt, wenn man für x eine immer kleiner werdende poſitive Größe nimmt. Folglich iſt der Werth der Function:

$$y = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x},$$

welche für $x = 0$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erſcheint, Null, oder unendlich, je nachdem man Null als die Grenze der poſitiven oder als die Grenze der negativen Werthe von x betrachtet. Dieſes rührt von einer Unterbrechung der Stetigkeit der Function y von der Art her, welche für die analogen Functionen in §. 16 und 87 angegeben ſind. *)

*) Außer den beiden vorhin betrachteten unbeſtimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ können auch noch andere, z. B. $0 . \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, ... vorkommen; allein dieſe laſſen ſich immer auf die beiden erſten zurückführen. Hat man z. B. $y = f(x) . F(x)$ und iſt $f(x_0) = 0$, $F(x_0) = \infty$, ſo daß y für $x = x_0$ unter der unbeſtimmten Form $0 . \infty$ erſcheint, ſo braucht man nur

$$y = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}} \text{ oder } y = \frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

zu ſetzen, um y für $x = x_0$ auf die unbeſtimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ zurückzuführen, deren Werth ſich nach dem Vorhergehenden finden läßt.

Wenn ferner $y = [F(x)]^{f(x)}$ iſt und man hat für $x = x_0$ ſucceſſive: 1) $F(x_0) = 0$, $f(x_0) = 0$, 2) $F(x_0) = \infty$, $f(x_0) = 0$, 3) $F(x_0) = 1$, $f(x_0) = \infty$, ſo erſcheint y reſp. unter den folgenden drei unbeſtimmten Formen:

II. Maxima und Minima der entwickelten Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe.

§. 91. Denken wir uns die Reihe von Werthen, welche die Function $y = fx$ annimmt, wenn man x alle möglichen Werthe beilegt, ohne daß y aufhört einen reellen und endlichen Werth anzunehmen.

Wenn die Werthe von y, nachdem sie zugenommen haben, abnehmen, so hat y in dem Intervalle einen Werth durchlaufen, welcher größer ist, als die unmittelbar vorhergehenden und die unmittelbar nachfolgenden Werthe und ein Maximum genannt wird. Wenn dagegen die Werthe von y, nachdem sie allmählig abgenommen haben, wieder zunehmen, so hat y in diesem Intervalle einen Werth durchlaufen, welcher kleiner ist, als die unmittelbar vorhergehenden und die unmittelbar nachfolgenden Werthe und ein Minimum genannt wird. Hieraus sieht man, daß es möglich ist, daß eine Function, weder ein Maximum noch ein Minimum, oder daß sie mehrere Maxima und Minima habe, so daß ein Minimum immer zwischen zwei Maxima und ein Maximum zwischen zwei Minima fällt. Die in Rede stehende Aufgabe besteht nun darin, die Werthe der unabhängigen Veränderlichen zu bestimmen, welchen Maxima und Minima der Function entsprechen, wenn es solche gibt.

Der Deutlichkeit wegen wollen wir zunächst annehmen, daß weder die Function fx, noch ihre Ableitungen eine Unterbrechung der Stetigkeit erfahren, wenn eine dieser Functionen ein Maximum oder Minimum erreicht.

In dieser Voraussetzung ist einleuchtend, daß das Differenzial:

$$dy = f'x \cdot dx$$

das Zeichen verändert, indem es für ein Maximum oder Minimum von fx Null wird, in dem Falle des Maximums von Positiven zum Negativen, und in dem Falle des Minimums vom Negativen zum Positiven übergeht. Die gemeinschaftliche Bedingung für das Maximum und Minimum von fx wird also ausgedrückt durch die Gleichung:

$$f'x = 0 \qquad (1)$$

und außerdem ist für das Maximum erforderlich, daß $f'x$ vom Positiven zum Negativen übergeht, d. h. abnimmt, wenn x zunimmt und daß folglich

$$f''x < 0.$$

Aus einem ähnlichen Grunde ist in dem Falle des Minimums erforderlich, daß der aus der Gleichung (1) abgeleitete Werth der Ungleichheit

$$f''x > 0$$

genügt.

Aber wenn $f''x$ für denselben Werth von x verschwindet, für welchen $f'x$ verschwindet, so entspricht der Werth von $f'x = 0$ einem Maximum oder Minimum dieser letzten Function. Im ersten Falle ist $f'x$ diesseits und jenseits des Werthes x negativ und fx nimmt für zunehmende Werthe von x beständig ab, während im zweiten Falle $f'x$ diesseits und jenseits des Werthes x negativ ist und fx mit x beständig zunimmt. Die Gleichung $f'x = 0$ führt also, wenn zugleich die Gleichung $f''x = 0$ stattfindet, weder zu einem Maximum noch zu einem Minimum von fx.

Aus demselben Grunde führt die Gleichung $f''x = 0$ weder auf ein Maximum, noch auf ein Minimum von $f'x$, wenn $f'''x = 0$ ist und wenn

---

1) 0^0, 2) ∞^0, 3) 1^∞.

Aus $y = [F(x)]^{f(x)}$ folgt aber $\log_e y = f(x) \log_e F(x)$ und:

$$y = e^{f(x) \cdot \log_e F(x)}.$$

Man braucht also bloß den Werth des Exponenten $f(x) \cdot \log_e F(x)$, welcher für $x = x_0$ unter der unbestimmten Form $0 \cdot \infty$ erscheint, deren Werth sich leicht nach dem Vorhergehenden finden läßt. Z. d. Ueberſ.

$f''x$ ſelbſt durch ein Maximum oder Minimum geht. Wenn $f''x$ durch ein Maximum geht, ſo nimmt $f'x$ für zunehmende Werthe von x ab, und geht folglich durch Null vom Poſitiven zum Negativen über und fx geht durch ein Maximum. Ebenſo ergibt ſich, daß in dieſem Falle das Minimum von $f''x$ das Minimum von fx zur Folge hat.

Wenn man alſo zu gleicher Zeit

$$f'x = 0, \quad f''x = 0$$

hat, ſo geht fx nur in ſo fern durch ein Maximum oder Minimum, als $f''x$ ſelbſt durch ein Maximum oder Minimum geht, d. h. in ſo fern

$$f'''x = 0, \quad f^{r}x < 0,$$

oder

$$f'''x = 0, \quad f^{r}x > 0$$

iſt. In dieſem Falle ſagt man nach der Analogie, daß fx durch ein Maximum oder Minimum der zweiten Ordnung geht.

Wenn man das Vorhergehende verallgemeinert, ſo ergibt ſich, daß die Function fx für einen gegebenen Werth von x nur dann ein Maximum oder Minimum haben kann, wenn der erſte nicht für dieſen Werth verſchwindende Differenzialcoeffizient von gerader Ordnung iſt, und zwar findet ein Maximum, oder Minimum ſtatt, je nachdem dieſer Coefficient einen negativen oder poſitiven Werth annimmt.

Alle dieſe Reſultate laſſen ſich verſinnlichen, wenn man die Function graphiſch durch die Ordinate einer Curve darſtellt. Denn die Gleichung $f'x = 0$ drückt aus, daß die Tangente zu der Axe der Abſciſſen parallel iſt und die Ungleichheiten $f''x < 0$, $f''x > 0$ drücken aus, daß die Curve in dem Falle einer poſitiven Ordinate ihre Concavität oder Converität und in dem Falle einer negativen Ordinate ihre Converität oder Concavität der Axe der x zukehrt. Wenn endlich $f''x = 0$ iſt, ohne daß $f'''x$ verſchwindet, ſo erfährt die Curve eine Inflexion (§. 30), ſo daß der Parallelismus der Tangente zu der Axe der x nicht verhindert, daß die Ordinate zu beiden Seiten des Berührungspunktes zu- oder abnimmmt.

§. 92. So oft alſo die Function fx einen algebraiſch ausgedrückten Differenzialcoeffizienten $f'x$ hat, erhält man nach dem Vorhergehenden die Werthe von x, welche größten oder kleinſten Werthen der Function fx entſprechen, wenn man die Gleichung $f'x = 0$ für x auflöſt, und man unterſcheidet alsdann das Maximum von dem Minimum, wenn man die Wurzeln dieſer Gleichung in die Function $f''x$, und wenn dieſe verſchwände, in $f'''x$ für x ſubſtituirt u. ſ. f.

Es iſt aber zu bemerken, daß man oft nach der Natur der Aufgabe a priori weiß, daß eine Function kein Maximum oder Minimum geſtattet, ſo daß man alsdann das Zeichen nicht zu unterſuchen, ſondern blos die Gleichung $f'x = 0$ aufzulöſen braucht, wobei jedoch vorausgeſetzt wird, daß man zugleich weiß, daß die Wurzeln dieſer Gleichung die folgenden Ableitungen nicht verſchwinden machen.

Wir wollen die allgemeine Regel auf die in §. 5 als Beiſpiel genommene Function:

$$fx = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$$

anwenden, ſo haben wir

$$f'x = \frac{x^2 - 20x + 64}{(x - 10)^2}.$$

Die aufzulöſende Gleichung iſt:

$$x^2 - 20x + 64 = 0,$$

deren Wurzeln $x = 16$ und $x = 4$ sind. Ferner findet man:

$$f''x = \frac{72}{(x-10)^3},$$

welcher Werth für $x = 16$ positiv und für $x = 4$ negativ wird. Der Wurzel 16 entspricht also ein Minimum und der Wurzel 4 ein Maximum.

Wenn

$$fx = e^x + 2\cos.x + e^{-x},$$

so findet man:

$$f'x = e^x - 2\sin.x - e^{-x},$$
$$f''x = e^x - 2\cos.x + e^{-x},$$
$$f'''x = e^x + 2\sin.x - e^{-x},$$
$$f^{IV}x = e^x + 2\cos.x + e^{-x} = fx.$$

Der Werth $x = 0$, welcher $f'x$, $f''x$, $f'''x$ verschwinden macht, gibt für $f^{IV}x$ den positiven Werth 4 und der entsprechende Werth von fx, welcher ebenfalls $= 4$ ist, bildet folglich ein Minimum dieser Function.

§. 93. Nun kann es aber geschehen, daß die Function $f'x$ das Zeichen verändert, indem sie durch das Unendliche geht, und daß fx nichtsdestoweniger nur eine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung erfährt, so daß das Differenzial:

$$dy = f'x\,dx$$

unendlich klein bleibt (§. 35 und §. 54). Unter diesen Umständen geht y durch ein Maximum oder durch ein Minimum, je nachdem dy vom Positiven zum Negativen, oder vom Negativen zum Positiven übergeht; allein man muß sich hiervon direct durch die Untersuchung der Function fx überzeugen, weil alle Ableitungen $f''x$, $f'''x$, etc. mit $f'x$ zugleich unendlich werden.

Wenn man z. B.:

$$fx = (x-1)^{\frac{2}{3}}$$

folglich:

$$f'x = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

hätte, so machte der Werth $x = 1$ die Function $f'x$ unendlich und fx verschwinden. Ueberdies ist, daß $f'x$ negativ oder positiv ist, je nachdem die Werthe von x kleiner oder größer als die Einheit sind, während fx beständig positiv bleibt, und folglich entspricht der Werth $x = 1$ einem Minimum von fx. Dieses ist der Fall, wo die Curve, deren Ordinate fx ist, einen der kleinsten Ordinate entsprechenden Rückkehrpunkt hat (Fig. 31).

Wenn man dagegen:

$$fx = (x-1)^{\frac{1}{3}},$$

folglich:

$$f'x = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$$

setzte, so machte der Werth $x = 1$ die Function $f'x$ wieder unendlich und fx zu Null; allein die Function $f'x$ veränderte bei ihrem Durchgange durch das Unendliche das Zeichen nicht mehr, während fx vom Negativen zum Positiven überginge und folglich weder ein Maximum, noch ein Minimum erreichte.

Unter diesen Umständen erfährt die Curve eine Inflexion und die Tangente im Inflexionspunkte ist auf der Abscissenare senkrecht (Fig. 32).

Wenn die Wurzel der Gleichung $f'x = 0$ die Ableitung $f''x$ unendlich macht, so daß eine Stetigkeitsunterbrechung der dritten Ordnung für die Func-

tion fx ſtattfindet, ſo muß man wieder direct unterſuchen, ob die Function f'x vom Poſitiven zum Negativen, oder vom Negativen zum Poſitiven übergeht, oder vielmehr, ob ſie verſchwindet, ohne das Zeichen zu verändern; denn im erſten Falle findet ein Maximum, im zweiten ein Minimum und im dritten weder ein Maximum noch ein Minimum ſtatt. Dieſe drei Fälle finden reſp. für die folgenden drei Functionen ſtatt:

$$fx = -(x-1)^{\frac{4}{3}},\quad fx = (x-1)^{\frac{4}{3}},\quad fx = (x-1)^{\frac{5}{3}}.$$

Endlich iſt der Fall, wo alle Ableitungen einer Function zu gleicher Zeit verſchwinden (§. 89) offenbar einer von den Fällen, auf welche die allgemeine Regel zur Beſtimmung der Maxima und Minima nicht anwendbar iſt.

Die beſonderen Maxima und Minima, wovon in dem gegenwärtigen §. die Rede geweſen iſt, verificiren das Kepler'ſche Princip (§. 6) nicht, und ihre Theorie iſt bei der Anwendung auf phyſikaliſche Aufgaben von geringer Erheblichkeit, weßwegen wir uns auch dabei nicht länger aufhalten wollen. Dagegen veranlaßt uns die Wichtigkeit der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima, dieſelbe noch durch die Unterſuchung der drei folgenden Aufgaben zu erläutern, welche in die Phyſik oder in die angewandte Geometrie gehören.

§. 94. Aufgabe 1. — Eine auf eine horizontale Tafel AB (Fig. 33) geſtellte Scheibe m wird durch ein Licht F erleuchtet, deſſen Fuß B ſich in einer unveränderlichen Entfernung von der Scheibe m befindet; aber welches man nach der Verticale BF auf- oder abwärts bewegen kann, und man ſoll nun beſtimmen, in welcher Höhe das Licht befeſtigt werden muß, damit die Scheibe am ſtärkſten erleuchtet wird.

Die Dimenſionen der Scheibe und des leuchtenden Brennpunktes werden gegen die gegenſeitige Entfernung derſelben als Größen betrachtet, welche ihrer Kleinheit wegen vernachläſſigt werden können, und außerdem iſt aus der Theorie und Erfahrung bekannt, daß die Intenſität des von einem leuchtenden Punkte auf ein Flächenelement geworfenen Lichtes im directen Verhältniſſe des Sinus des Winkels ſteht, welchen die Lichtſtrahlen mit dieſer Fläche bilden und im umgekehrten Verhältniſſe des Quadrates der Entfernung des erleuchteten Flächenelementes von dem leuchtenden Punkte.

Es ſei a die unveränderliche Entfernung mB des Mittelpunktes der Scheibe vom Fußpunkte der durch den leuchtenden Punkt F gezogenen Verticale, x der veränderliche Winkel BmF, $\delta = \frac{a}{\cos. x}$ die Entfernung mF, fx die Intenſität des auf die Scheibe fallenden Lichtes und A die Intenſität des Lichtes, welches ſie bei ſenkrecht einfallenden Strahlen und in einer der Längeneinheit gleichen Entfernung vom leuchtenden Punkte erhält; ſo hat man:

$$fx = \frac{A \sin. x}{\delta^2} = \frac{A}{a^2} \cdot \sin. x \cos.^2 x.$$

Die Gleichung $f'x = 0$ iſt in dieſem Falle:

$$\cos.^3 x - 2 \cos. x \sin.^2 x = 0$$

und zerfällt in:

$$\cos. x = 0,\quad \text{tang.} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ferner hat man:

$$f''x = \frac{A}{a^2} \cdot (9 \sin.^2 x - 7) \sin. x,$$

und die Auflösung $\cos x = 0$ gibt:

$$fx = 0, \quad \text{sin. } x = \pm 1, \quad f''x = \pm \frac{2A}{a^2}.$$

Die negativen Werthe von x oder von sin. x würden für fx negative Werthe geben, und entsprechen daher der Aufgabe nicht in dem Sinne, wie sie aufgestellt ist, obgleich man annehmen kann, daß die Werthe von fx als positiv oder als negativ betrachtet werden, je nachdem die obere oder die untere Fläche der Scheibe erleuchtet wird. In der That ist einleuchtend, daß die Intensität des auf die Scheibe fallenden Lichtes ohne Ende abnimmt, wenn der leuchtende Punkt ohne Ende aufwärts bewegt wird, und folglich kann hier nur von einem mathematischen Minimum die Rede sein, welches sich physisch nicht realisiren läßt.

Die Auflösung:

$$\text{tang. } x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

welche uns allein interessirt, gibt:

$$fx = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{A}{a^2}, \quad f''x = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{A}{a^2}$$

und entspricht dem gesuchten Maximum.

§. 95. Aufgabe 2. — Auf der geraden Linie, welche zwei Wärme ausstrahlende Punkte verbindet, den Punkt zu finden, welcher am wenigsten erwärmt, wenn sich die Intensität der strahlenden Wärme im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung von dem strahlenden Brennpunkte ändert.

Wir wollen annehmen, daß sich die Intensitäten der strahlenden Punkte A, B in der Einheit der Entfernung wie die Zahlen α^3 und β^3 verhalten. Durch a wollen wir die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte A, B und durch x die Entfernung des erhitzten Punktes von dem strahlenden Punkte A bezeichnen; so wird die Intensität der strahlenden Wärme, welche dieser Punkt erhält, ausgedrückt durch:

$$fx = \frac{\alpha^3}{x^2} + \frac{\beta^3}{(a-x)^2}.$$

und dieser Ausdruck wird zu einem Minimum gemacht, wenn man

$$f'x = -\frac{2\alpha^3}{x^3} + \frac{2\beta^3}{(a-x)^3} = 0$$

setzt. Die Werthe $x = \pm \infty$ genügen dieser Gleichung und machen fx verschwinden; aber die gesuchte Auflösung wird erhalten, wenn man

$$\beta^3 x^3 = \alpha^3 (a-x)^3, \quad \text{oder} \quad x = \frac{a\alpha}{\alpha + \beta}$$

setzt, und da die Ableitung:

$$f''x = 6\left[\frac{\alpha^3}{x^4} + \frac{\beta^3}{(a-x)^4}\right]$$

stets positiv bleibt, so folgt, daß die Auflösung einem Minimum entspricht. Endlich entsprechen die Werthe $x = 0$ und $x = a$, welche $f'x$ unendlich machen und für welche fx dieselbe Stetigkeitsunterbrechung erfährt, keinem Maximum in dem gewöhnlichen Sinne des Wortes. Diese unendlichen Werthe von fx sind auch aus ähnlichen Gründen, wie die bereits in §. 4 angeführten physisch unzulässig.

§. 96. Aufgabe 3. — Wenn man die Höhe h einer verticalen Linie AB (Fig. 34) messen will, so mißt man von ihrem Fuß-

punkte B aus eine horizontale Länge BC = b und beobachtet den Winkel BCA = x, und alsdann hat man:

$$h = b \text{ tang. } x. \qquad (2)$$

Man soll nun die willkührliche Basis b so wählen, daß man das vortheilhafteste Dreieck bekommt, d. h. das Dreieck, welches die Eigenschaft hat, daß demselben Fehler bei der Messung des Winkels x der kleinste Fehler der gesuchten Höhe h entspricht.

Wenn man statt des genauen Winkels x einen etwas davon verschiedenen Winkel $x + \Delta x$ beobachtet, so kann der sich daraus ergebende Werth der gesuchten Höhe durch $h + \Delta h$ ausgedrückt werden, und man hat nahezu:

$$\Delta h = \frac{d \cdot (b \text{ tang. } x)}{dx} \Delta x = \frac{b}{\cos.^2 x} \cdot \Delta x.$$

Soll also das Verhältniß des Fehlers Δh an dem berechneten Werthe zu dem Beobachtungsfehler Δx ein Minimum werden, so muß der wahre Werth des Winkels x und der davon abhängige Werth der Basis b den Factor:

$$\frac{b}{\cos.^2 x}$$

zu einem Minimum machen, d. h. wenn man für b seinen durch die Gleichung (2) als Function von x und h gegebenen Werth substituirt, den Factor:

$$\frac{h}{\text{tg } x \cos.^2 x}.$$

Die Aufgabe läuft also darauf hinaus, die Function:

$$fx = \text{tang. } x \cos.^2 x = \text{sin. } x \cos. x$$

zu einem Maximum zu machen.

Nun hat man aber:

$$f'x = \cos.^2 x - \text{sin.}^2 x, \quad f''x = -4 \text{ sin. } x \cos. x,$$

und das gesuchte Maximum entspricht folglich:

$$\text{sin. } x = \cos. x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = h.$$

Dieses ist die bekannte praktische Regel, welche man so zu sagen instinctmäßig findet, wovon aber nur die Rechnung einen strengen Beweis geben kann.

Die Auflösung:

$$\text{sin. } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

löst die Aufgabe analytisch auf; allein sie hat nach den geometrischen Bedingungen der Aufgabe keinen Sinn mehr.

§. 97. Es sei $y = fx$, $x = \varphi t$, so hat man:

$$\frac{dy}{dt} = f'x \cdot \varphi' t,$$

und folglich zerfällt die Gleichung:

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

von selbst in die beiden anderen:

$$f'x = 0, \quad \varphi' t = 0,$$

wovon jede Maxima oder Minima von y, als mittelbare Function von t betrachtet, bestimmen kann. Aber wenn die aus der Gleichung $f'x = 0$ abge-

leiteten Zahlenwerthe von x größer ſind, als der größte Werth der Function φt, oder kleiner als ihr kleinſter Werth, ſo müſſen dieſe Auflöſungen als der Aufgabe, welche in der Beſtimmung der Maxima und Minima von y, wenn t die unabhängige Veränderliche iſt, beſteht, nicht entſprechend verworfen werden.

Wenn man alſo die Werthe von x, welche den aus der Gleichung $\varphi' t = 0$ abgeleiteten Werthen von t entſprechen, nach der Folge ihrer Größe ordnet, ſo müſſen die Wurzeln der Gleichung $f'x$ zwiſchen die beiden äußerſten Glieder dieſer Reihe fallen.

Viertes Kapitel.

Taylor'ſche und Maclaurin'ſche Formel.

1) Taylor'ſche Formel.

§. 98. Die Erzeugung der Ableitungen der verſchiedenen Ordnungen führt auf die Entwickelung der Functionen in Reihen, welche nach den ganzen und ſteigenden Potenzen der unabhängigen veränderlichen Größe fortſchreiten. Dieſe wichtige Theorie, welche man aus mehreren Geſichtspunkten betrachten kann, ſoll der Gegenſtand des gegenwärtigen Kapitels ſein.

Wenn wir, wie im 4ten Kapitel des erſten Buches durch:

$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n,$$

die Werthe einer Function fx bezeichnen, welche den Werthen:

$$x,\ x + \Delta x,\ x + 2\Delta x,\ x + 3\Delta x,\ \ldots\ x + n\Delta x$$

der unabhangigen Veränderlichen entſprechen, ſo haben wir nach §. 43:

$$y_n = f(x + n\Delta x) = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y + \ldots + \Delta^n y.$$

Dieſe Gleichung kann man auch auf folgende Form bringen:

$$f(x + n\Delta x) = fx + \frac{n\Delta x}{1} \cdot \frac{\Delta fx}{\Delta x} + \frac{n^2 \Delta x^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\Delta^2 fx}{\Delta x^2} + \frac{n^3 \Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{\Delta^3 fx}{\Delta x^3} + \ldots + \frac{n^n \Delta x^n}{1.2.3 \ldots n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{\Delta^n fx}{\Delta x^n},$$

und wenn man $n\Delta x = h$ ſetzt, ſo verwandelt ſie ſich in:

$$f(x + h) = fx + \frac{h}{1} \cdot \frac{\Delta fx}{\Delta x} + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\Delta^2 fx}{\Delta x^2} + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{\Delta^3 fx}{\Delta x^3} + \ldots\ldots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{\Delta^n fx}{\Delta x^n}. \quad (G)$$

Wir wollen uns nun vorſtellen, daß das Intervall Δx ohne Ende abnimmt, indem die Zahl n ohne Ende vergrößert wird, und zwar ſo, daß das Product

$n\Delta x$ immer der constanten Größe h gleich bleibt; so nimmt die Anzahl der Glieder, woraus der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung besteht, fortwährend zu, und die Verhältnisse:

$$\frac{\Delta fx}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta^2 fx}{\Delta x^2}, \quad \frac{\Delta^3 fx}{\Delta x^3}, \quad \ldots\ldots$$

convergiren gegen die Grenzen:

$$\frac{dfx}{dx}, \quad \frac{d^2fx}{dx^2}, \quad \frac{d^3fx}{dx^3}, \quad \ldots\ldots$$

oder:

$$f'x, \quad f''x, \quad f'''x, \quad \ldots\ldots$$

Ferner convergiren die Brüche:

$$1-\frac{1}{n},$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right),$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{i-1}{n}\right),$$

alle gegen die Einheit, indem i eine beliebige positive Zahl $< n$ bezeichnet, welche während des Zunehmens von n constant bleibt. Man kann also, wie groß die Zahl i auch sein und welchen Werth man dem Zuwachse h auch beilegen mag, die Zahl n doch immer so groß annehmen, daß die Summe der $i+1$ ersten Glieder des zweiten Theiles der Gleichung (a) beliebig wenig von der Summe:

$$fx + \frac{h}{1}f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''x + \ldots\ldots\ldots + \frac{h^i}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots i}f^{(i)}x, \quad (b)$$

verschieden ist, wobei wir annehmen, daß die Functionen $fx, f'x, f''x, \ldots\ldots f^{(i)}x$ sämmtlich endliche Werthe behalten, weil sonst die vorhergehenden Schlüsse nicht stattfinden würden.

Dieses berechtigt uns jedoch noch nicht, die Function $f(x+h)$ als die Summe der ins Unendliche fortlaufenden Reihe (b) zu betrachten (§. 24). Denn wenn man in der Reihe (a), wovon wir ausgegangen sind und welche der genaue Werth von $f(x+h)$ ist, das Glied vom $(\nu+1)^{ten}$ Range betrachtet, wo ν eine zwischen i und n liegende, aber weit größere Zahl als i und mit n vergleichbar ist, bezeichnet; so reducirt sich dieses Glied nicht mehr nahezu auf:

$$\frac{h^\nu}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}f^{(\nu)}x,$$

weil sich der Factor:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)$$

nicht mehr nahezu auf die Einheit, sondern im Gegentheil für Werthe von ν, welche der Zahl n sehr nahe kommen, sich nahezu auf Null reducirt.

Aber wenigstens kann man immer setzen:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x +$$

$$\ldots\ldots + \frac{h^i}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} f^{(i)}x + R_i,$$

wo R_i eine unbekannte Function von x und h bezeichnet, und wenn wir die Bedingungen aufstellen, daß der Werth dieser Function zwischen Grenzen fällt, welche sich für ohne Ende zunehmende Werthe des Index i ohne Ende zusammenziehen lassen; so haben wir eben dadurch die Bedingungen bestimmt, unter welchen die Function $f(x+h)$, als die Summe der ins Unendliche fortlaufenden Reihe (b) betrachtet werden kann.

§. 99. Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst bemerken, daß, wenn eine Function φh für $h = 0$ verschwindet und ihre Ableitung $\varphi' h$ zwischen den Grenzen 0, h dasselbe Zeichen behält, ohne durch das Unendliche zu gehen, die Function φh dasselbe Zeichen hat, als $\varphi' h$; denn man kann sie, als die Summe unendlich kleiner Elemente betrachten, welche alle dasselbe Zeichen haben, wie $\varphi' h$. Wir setzen voraus, daß die Veränderliche h unabhängig und die Grenze h positiv ist, und für eine negative Grenze würden die Resultate die umgekehrten sein.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir nun, wie es gestattet ist, der unbekannten Function R_i die Form:

$$R_i = \frac{h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} \cdot \varphi(x, h)$$

geben, wo φ eine andere unbekannte Function bezeichnet; so bestimmt man offenbar die untere und obere Grenze von R_i, wenn man Zahlen P, Q von solcher Beschaffenheit angibt, daß für alle Werthe von h:

$$\left.\begin{aligned} f(x+h) - \left\{ fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x + \ldots \right. \right. \\ \left. + \frac{h^i}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} f^{(i)}x + \frac{h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} P \right\} > 0, \\ f(x+h) - \left\{ fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x + \ldots \right. \\ \left. + \frac{h_i}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} f^{(i)}x + \frac{h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} Q \right\} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

ist.

Es bezeichnen $\varphi_1 h$, $\varphi_2 h$ die ersten Theile dieser Ungleichheiten, so verschwinden die Functionen φ_1, φ_2, wenn man darin $h = 0$ setzt, und folglich werden diese Ungleichheiten nach der vorhergehenden Bemerkung erfüllt, wenn für alle Werthe von h:

$$\varphi'_1 h = \frac{d\cdot \varphi_1 h}{dh} > 0, \quad \varphi'_2 h = \frac{d\cdot \varphi_2 h}{dh} < 0,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} f'(x+h) - \Big\{ f'x + \frac{h}{1} f''x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f'''x + \ldots. \\ + \frac{h^{(i-1)}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i-1)} f^{(i)}x + \frac{h^i}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} P \Big\} > 0, \\ f'(x+h) - \Big\{ f'x + \frac{h}{1} f''x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f'''x + \ldots. \\ + \frac{h^{i-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i-1} f^{(i)}x + \frac{h^i}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} Q \Big\} < 0. \end{aligned}\right\} (c')$$

ist.

Aber $\varphi'_1 h$, $\varphi'_2 h$ sind auch Functionen von h, welche für $h = 0$ verschwinden; folglich werden die Ungleichheiten (c') und mithin die Ungleichheiten (c) erfüllt, wenn man hat:

$$\varphi''_1 h = \frac{d^2 \cdot \varphi_1 h}{d h^2} > 0, \quad \varphi''_2 h = \frac{d^2 \cdot \varphi_2 h}{d h^2} < 0,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} f''(x+h) - \Big\{ f''x + \frac{h}{1} f'''x + \ldots. + \frac{h^{i-2}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i-2)} f^{(i)}x \\ + \frac{h^{i-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i-1)} P \Big\} > 0, \\ f''(x+h) - \Big\{ f''x + \frac{h}{1} f'''x + \ldots. + \frac{h^{i-2}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i-2)} f^{(i)}x \\ + \frac{h^{i-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i-1)} Q \Big\} < 0. \end{aligned}\right\} (c'')$$

Wenn man diese Schlüsse weiter fortsetzt, so gelangt man nach $i + 1$ successiven Differenzirungen zu den Ungleichheiten:

$$\left.\begin{aligned} f^{(i+1)}(x+h) - P > 0. \\ f^{(i+1)}(x+h) - Q < 0, \end{aligned}\right\} (c^{(i+1)}).$$

Nun werden aber diese letzten und folglich auch die ursprünglichen Ungleichheiten (c) erfüllt, wenn man für P und Q resp. den kleinsten und den größten Werth nimmt, welchen die abgeleitete Function:

$$f^{(i+1)}z$$

für die zwischen x und $x + h$ liegenden Werthe von z annimmt.

Wenn diese Function von x bis $x + h$ beständig zu- oder abnähme, so könnte man setzen:

$$P = f^{(i+1)}(x), \quad Q = f^{(i+1)}(x+h),$$

oder umgekehrt:

$$P = f^{(i+1)}(x+h), \quad Q = f^{(i+1)}(x).$$

Der Rest R_i wird also ausgedrückt durch:

$$\frac{h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} f^{(i+1)}(x + \theta h),$$

wo θ eine zwischen 0 und 1 liegende unbekannte Zahl bezeichnet, so daß $x + \theta h$ zwischen x und $x + h$ fällt.

Wir ſetzen demnach:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x + \ldots.$$

$$+ \frac{h^i}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} f^{(i)}x + \frac{h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} f^{(i+1)}(x + \theta h). \qquad (A)$$

Wenn nun die Zahlenwerthe der Functionen:

$$f^{(i+1}z$$

für alle Werthe von z zwiſchen x und x + h und für alle möglichen Werthe des Index i eine gewiſſe Grenze λ nicht überſchreiten; ſo hat man numeriſch:

$$R_i < \frac{h^{i+1}\lambda}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)},$$

und alsdann kann man, welchen Werth h auch haben mag, den Index i immer ſo groß annehmen, daß R_i kleiner wird, als jede gegebene Größe. In dieſem Falle iſt folglich die Function f(x + h) die Summe der ins Unendliche fortlaufenden Reihe (b), was wir auf folgende Weiſe ausdrücken wollen:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x + \text{etc.} \qquad (B)$$

Dieſe Formel führt den Namen des engliſchen Geometers Taylor, welcher ſie entdeckt hat, und ſie wird in der Analyſis fortwährend angewandt. Man hat eine Menge von Beweiſen für dieſe Formel gegeben. Der vorhergehende, wie wir denſelben dargeſtellt haben, ſcheint uns vollkommen ſtreng zu ſein, und wir haben denſelben nicht blos deßwegen vorgezogen, um uns dem von dem Erfinder eingeſchlagenen Wege möglichſt zu nähern, ſondern auch, weil uns derſelbe ſehr dazu geeignet zu ſein ſcheint, den Sinn und die Ausdehnung der Anwendbarkeit dieſer Fundamentalformel genau zu fixiren.

§. 100. Es wird jedoch nicht unzweckmäßig ſein, hier noch eine andere Beweisart dieſer Formel mitzutheilen. Zu dem Zwecke kann man immer ſetzen:

$$f(x+h) = fx + h\varphi(x, h),$$

wo die unbekannte Function φ ſo beſchaffen ſein muß, daß ſich das Glied $h\varphi(x, h)$ für h = 0 auf Null reducirt. Hieraus ergibt ſich der Ausdruck:

$$\varphi(x, h) = \frac{f(x+h) - fx}{h},$$

welcher unter der Form $\frac{0}{0}$ erſcheint und ſich bekanntlich auf f'x reducirt, wenn man darin h = 0 ſetzt. Wir können demnach ſetzen:

$$\varphi(x, h) = f'x + h\varphi_1(x, h),$$

woraus folgt:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + h^2\varphi_1(x, h),$$

$$\varphi_1(x, h) = \frac{f(x+h) - fx - hf'x}{h^2}.$$

Dieſer Ausdruck von φ_1 reducirt ſich für h = 0 wieder auf $\frac{0}{0}$. Wenn man die allgemeine Regel in §. 85 auf den vorhergehenden Bruch anwendet, indem man von dem Zähler und Nenner deſſelben in Beziehung auf h die Ableitungen nimmt; ſo erhält man:

$$\varphi_1(x, 0) = \frac{f'(x+h) - f'x}{1 \cdot 2 \cdot h},$$

und wenn man von Neuem differenzirt, um die noch stattfindende Unbestimmtheit zu beseitigen, so kommt:

$$\varphi_1(x, 0) = \frac{f''x}{1 \cdot 2},$$

woraus folgt:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\left[f''x + h\,\varphi_2(x, h)\right].$$

Hieraus sieht man schon, daß man dasselbe Entwickelungsgesetz erhält wie vorhin, worauf man die Grenzen des Restes R_i auf dieselbe Weise bestimmen muß.

§. 101. Wenn man endlich die Grundregeln der Integralrechnung anwenden will, welche bereits in §. 55 auseinandergesetzt sind, so findet man nicht blos das Gesetz der Taylor'schen Reihe und die Grenzen des Restes R_i, sondern auch den Werth von R_i durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt auf dem directesten Wege. Denn von welcher Beschaffenheit die Function fx auch sein mag, so hat man, wofern sie nur zwischen den Grenzen x und $x+h$ stetig bleibt, doch immer:

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'x \cdot dx.$$

Zur besseren Unterscheidung der wirklichen veränderlichen Größe x unter dem Integrationszeichen von dem in dem Ausdrucke der Grenzen vorkommenden Werthe von x, kann man setzen:

$$f(x+h) - fx = \int_x^{x+h} f'x' \cdot dx',$$

oder auch, wenn man die veränderliche Größe vertauscht und $x' = x + h - z$, also $dx' = -dz$ setzt:

$$f(x+h) - fx = -\int_h^0 f'(x+h-z)dz = \int_0^h f'(x+h-z)dz.$$

Die Formel (8) in §. 55 verwandelt sich, wenn man darin z für x setzt und für die untere Grenze der Integrale $z_0 = 0$ und für die obere Grenze derselben $z = h$ nimmt, in:

$$\int_0^h \varphi z \cdot \psi' z dz = \varphi h \cdot \psi h - \varphi(0) \cdot \psi(0) - \int_0^h \psi z \cdot \varphi' z dz. \quad (d)$$

Wenn man in dieser Formel

$$\varphi z = f'(x+h-z),\ \psi z = z,$$

folglich:

$$\varphi(0) = f'(x+h),\ \varphi h = f'x,\ \psi(0) = 0,\ \psi h = h,$$
$$\varphi' z = -f''(x+h-z),\ \psi' z = 1$$

setzt, so kommt:

$$\int_0^h f'(x+h-z)dz = hf'x + \int_0^h zf''(x+h-z)dz,$$

und folglich:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \int_0^h zf''(x+h-z)dz.$$

Wenn wir nun in die Formel (d) die Vorausſetzung:

$$\varphi z = f''(x + h - z),\ \psi z = \frac{1}{2} z^2,$$

folglich:

$$\varphi(0) = f''(x + h),\ \varphi h = f''x,\ \psi(0) = 0,\ \psi h = \frac{1}{2} h^2,$$

$$\varphi' z = -f'''(x + h - z),\ \psi' z = z$$

einführen, ſo erhalten wir:

$$\int_0^h z f''(x + h - z)\, dz = \frac{1}{2} h^2 f''x + \frac{1}{2} \int_0^h z^2 f'''(x + h - z) dz,$$

und folglich:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''x + \frac{1}{1 \cdot 2} \int_0^h z^2 f'''(x + h - z)\, dz.$$

Ebenſo würde man finden:

$$f(x + h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''x + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int_0^h z^3 f^{IV}(x + h - z) dz,$$

und durch weitere Fortſetzung dieſer Rechnung würde man finden:

$$f(x + h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''x + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{h^i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i} f^{(i)}x + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i} \int_0^h z^i f^{(i+1)}(x + h - z)\, dz.$$

Wenn man nun, wie weiter oben durch P und R reſp. den kleinſten und größten Werth von:

$$f^{(i+1)}(x + h - z),$$

für die zwiſchen 0 und h liegenden Werthe von z bezeichnet, ſo hat man:

$$\int_0^h z^i f^{(i+1)}(x + h - z)\, dz > P \int_0^h z^i\, dz,$$

oder:

$$\int_0^h z^i f^{(i+1)}(x + h - z)\, dz > \frac{P h^{i+1}}{i + 1};$$

denn die Ableitung der Function $\frac{z^{i+1}}{i + 1}$ iſt $= z^i dz$ (§. 59). Aus demſelben Grunde hat man:

$$\int_0^h z^i f^{(i+1)}(x + h - z)\, dz < \frac{Q h^{i+1}}{i + 1};$$

folglich fällt der Werth von R_i zwiſchen:

$$\frac{P h^{i+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (i + 1)} \text{ und } \frac{Q h^{i+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (i + 1)},$$

und man hat ferner den Ausdruck:

$$R_i = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i} \int_0^h z^i f^{(i+1)}(x + h - z)\, dz, \qquad (e)$$

deſſen Werth man vermittelſt der ſpäter zu erörternden Methoden genau oder näherungsweiſe berechnen kann, wenn die Function f und folglich die Ableitung $f^{(i+1)}$ gegeben iſt.

§. 102. Wenn wir in der Formel (A) für x die Größe z und dann x — z für h ſetzen, ſo verwandelt ſie ſich in folgende:

$$fx = fz + \frac{x-z}{1} f'z + \frac{(x-z)^2}{1\cdot 2} f''z + \ldots\ldots + \frac{(x-z)^i}{1\cdot 2\ 3\ldots i} f^{(i)}z + \varphi z, \quad (\varphi)$$

wo der Kürze wegen

$$\varphi z = \frac{(x-z)^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i+1} f^{(i+1)}[z + \theta(x-z)]$$

geſetzt iſt.

Für $i = 0$ gibt die vorhergehende Formel:

$$fx = fz + (x-z) f'[z + \theta_1 (x-z)],$$

wo θ_1 wie θ eine zwiſchen 0 und 1 liegende, aber im Allgemeinen von θ verſchiedene Zahl bezeichnet, und hieraus ergibt ſich, wenn man φ für f ſetzt:

$$\varphi x = \varphi z + (x-z)\varphi'[z + \theta_1 (x-z)]. \qquad (\varphi')$$

Aber nach der Gleichung (φ) hat man offenbar $\varphi x = 0$, und wenn man dieſe Gleichung (φ) in Beziehung auf z differenzirt, und die ſich gegenſeitig aufhebenden Glieder hinwegläßt, ſo bleibt:

$$\varphi' z = -\frac{(x-z)^i}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i} f^{(i+1)}z,$$

woraus folgt:

$$\varphi'[z+\theta_1(x-z)] = -\frac{(1-\theta_1)^i (x-z)^i}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i} f^{(i+1)}[z + \theta_1(x-z)].$$

Aus der Gleichung (φ') ergibt ſich alſo:

$$\varphi z = \frac{(1-\theta_1)^i (x-z)^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i} f^{(i+1)}[z + \theta_1 (x-z)],$$

und man kann in der Formel (A) für den Ausdruck des Reſtes:

$$R_i = \frac{h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(i+1)} \cdot f^{(i+1)}(x + \theta h),$$

den von Cauchy zuerſt gefundenen gleichbedeutenden Ausdruck:

$$R_i = \frac{(1-\theta_1)^i h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots i} \cdot f^{(i+1)}(x + \theta_1 h)$$

ſetzen.

§. 103. Auf welche Weiſe man auch zu der Taylor'ſchen Reihe gelangen mag, ſo hat ſie doch nur in ſo fern einen Sinn, als man ſich die erhaltene Reihe von Gliedern durch einen Reſt ergänzt denkt, welcher in gewiſſen Fällen kleiner werden kann, als jede gegebene Größe, und alsdann kann man die ins Unendliche fortlaufende Reihe als der gegebenen Function gleichbedeutend betrachten. In dieſer Vorausſetzung muß zwar die Reihe convergent ſein; allein das Umgekehrte findet nicht ſtatt, und die unendliche Reihe könnte convergent ſein, ohne daß der Reſt R_i, welchen man immer direct berechnen muß, ohne Ende abnähme. In dieſem Falle würde die Taylor'ſche Reihe unbrauchbar und die Summe der convergenten Reihe würde nicht mit der gegebenen Function übereinſtimmen.

Um ſich von der Wahrheit dieſes Satzes zu überzeugen, braucht man nur zu bemerken, daß die Function fx bei den vorhergehenden Betrachtungen als

eine beliebige Function vorausgesetzt ist, so daß sie sowohl eine mathematische, als empirische Function sein kann. Zur Anwendung der erhaltenen Formeln genügt es, daß diese Function und ihre Ableitungen aller Ordnungen keine den verschiedenen Werthen der unabhängigen Veränderlichen von x bis $x+h$ incl. entsprechende Stetigkeitsunterbrechung erfahren. Da nun die Form der Curve $y = fz$ zwischen den Werthen $z = x$ und $z = x+h$ willkührlich ist und nicht von der Form der Curve in der Nähe des Anfangspunktes abhängt; so würde es ungereimt sein, wenn man annehmen wollte, daß die Größen:

$$fx,\ f'x,\ f''x,\ f'''x,\ \ldots\ldots,$$

welche sich alle auf den Anfangspunkt beziehen, implicite den Lauf der Curve in dem ganzen betrachteten Intervalle bestimmten. Die Function $f(x+h)$ kann also im Allgemeinen nicht durch die Reihe der Größen $fx,\ f'x,\ \ldots\ldots,$ selbst wenn sie ins Unendliche fortlaufen, bestimmt werden. Aber sobald man den Rest R_i in Betracht zieht, bei dessen Bestimmung alle Werthe der Function in dem Intervalle von x bis $x+h$ in Rechnung gebracht werden müssen, verschwindet diese Schwierigkeit und es kann der Zulässigkeit der Entwickelung nichts mehr entgegen stehen.

Man könnte zwar annehmen, daß, wenn in dem Intervalle von $z = x$ bis $z = x+h$ zwei nicht identische Functionen fz, $f_1 z$ dennoch so beschaffen wären, daß:

$$f_1 x = fx,\ f'_1 x = f'x,\ f''_1 x = f''x,\ \ldots\ldots \qquad (f)$$

wäre, wenigstens eine dieser Functionen für $z = x$ eine Stetigkeitsunterbrechung irgend einer Ordnung erfahren müßte, was schon hinreichend wäre, um die Taylor'sche Reihe nicht ins Unendliche fortlaufen lassen zu können und was auf den bereits erwähnten Ausnahmefall hinausliefe. In der That haben wir bereits in §. 37 angenommen und werden es später beweisen, daß, wenn die Functionen fz, $f_1 z$ explicite oder implicite durch algebraische Gleichungen bestimmt werden, die Reihe der Gleichungen (f) die Identität der beiden Functionen zur Folge hat, so daß, wenn die beiden Functionen in einem Theile ihrer Verlaufes denselben algebraischen Ausdruck und in einem anderen Theile ihres Laufes verschiedene algebraische Ausdrücke hätten, sie nothwendig bei dem Uebergange von dem einen Ausdrucke zu dem andern eine Stetigkeitsunterbrechung irgend einer Ordnung erfahren würden. Aber nichts berechtigt uns, diese Bemerkung auf empirische oder auch nur auf transcendente Functionen auszudehnen, wie Cauchy an einem sehr einfachen Beispiele gezeigt hat.

Wenn man z. B.

$$f_1 z = fz + e^{-\frac{1}{z^2}}$$

setzt, wo fz eine beliebige Function bleibt, so haben wir in §. 89 gesehen, daß für $z = 0$ die Ableitungen aller Ordnungen der transcendenten Function $e^{-\frac{1}{z^2}}$, so wie diese selbst verschwinden, und man hat folglich für $z = 0$:

$$f_1 x = fx,\ f'_1 x = f'x,\ f''_1 x = f''x,\ \ldots\ldots,$$

obgleich die Functionen f und f_1 für jeden andern Werth von z verschieden bleiben.

Demnach ist die Entwickelung von $f_1 h$ durch die Taylor'sche Formel nicht von der Entwickelung von fh verschieden, und wenn die so ins Unendliche fortlaufende Taylor'sche Reihe convergent ist, und fh zur Summe hat; so wird doch dieselbe Reihenentwickelung, obgleich sie convergent ist, falsch sein, wenn man sie auf die Function f_1 anwendet.

Wir wollen im Allgemeinen mit φz eine Function von z von solcher Beschaffenheit bezeichnen, daß man für einen besonderen Werth $z = x$ habe:

$$0 = \varphi x = \varphi' x = \varphi'' x = \ldots\ldots,$$

und es ſeien $R^{(i)}$, $R_1^{(i)}$ die Reſte der Taylor'ſchen Reihe für die Functionen:

$$f(x+h),\ f_1(x+h) = f(x+h) + \varphi(x+h);$$

ſo muß man für jeden Werth des Index i haben:

$$R_1^{(i)} - R^{(i)} = \varphi(x+h),$$

was ſich übrigens auch leicht a posteriori vermittelſt des Ausdruckes des Reſtes in einem beſtimmten Integrale wieder finden ließe.

§. 104. Die Anzahl der Glieder, woraus die Taylor'ſche Reihe beſteht, iſt nur in dem einen Falle eine endliche, wenn die Function fx eine ganze algebraiſche Function iſt; denn wenn alsdann m den höchſten Exponenten von x in dieſer Function bezeichnet, ſo iſt die Ableitung der m^{ten} Ordnung eine conſtante Größe und die Ableitungen der höhern Ordnungen verſchwinden (§. 60).

Wenn man $fx = x^m$ ſetzt, ſo gibt die Taylor'ſche Reihe für einen beliebigen Exponenten m die Entwickelung von $(x+h)^m$ und ſtimmt mit der Newton'ſchen Binomialformel überein, welche dadurch, wie bereits in §. 66 und §. 82 bemerkt iſt, für einen beliebigen Exponenten bewieſen wird, und zu gleicher Zeit hat man:

$$R_i = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-i)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}\int_0^h z^i (x+h-z)^{m-i-1}\,dx.$$

§. 105. Die Taylor'ſche Reihe hatte ihrer Allgemeinheit wegen ſchon lange die Aufmerkſamkeit der Analyſten auf ſich gezogen, als Lagrange dieſelbe zur Grundlage der Theorie der Functionen machte, um dadurch, wie er glaubte, bei dem Uebergange von der Discontinuität zur Continuität die Anwendung jedes Hülfsbegriffes der Grenze, der Fluxion, oder des unendlich Kleinen zu vermeiden. Zu dieſem Zwecke nahm Lagrange an, daß ſich jede beliebige Function oder wenigſtens jede beliebige mathematiſche Function f(x+h) in einer Reihe von folgender Form:

$$fx + \varphi_1 x \cdot h^\alpha + \varphi_2 x \cdot h^\beta + \varphi_3 x \cdot h^\gamma + \text{etc.}$$

entwickeln läßt. Hierauf zeigte Lagrange, indem er ſich auf die algebraiſche Natur der Function ſtützte, daß dieſe Potenzen weder negative noch gebrochene Exponenten haben können, ſo lange x und h unbeſtimmt bleiben. Denn wenn die Reihe Potenzen von h mit negativen Exponenten enthielte, ſo würden, wenn man $h = 0$ ſetzte, die Glieder mit dieſen negativen Exponenten unendlich werden, und folglich hätte fx einen unendlich großen Werth, was nur für particuläre Werthe von x ſtattfinden kann. Wenn ferner die Reihe ein Glied mit einer Potenz von h mit dem gebrochenen Exponenten $\frac{p}{q}$ enthielte, ſo hätte dieſes Glied nach den bekannten Eigenſchaften der Wurzelgrößen ſo viele verſchiedene Werthe, als der Nenner q Einheiten hat, ſo daß f(x+h) für daſſelbe Syſtem von Werthen von x und fx mehrere verſchiedene Werthe haben würde, was nur für gewiſſe beſondere Werthe von x und von fx ſtattfinden kann, und zwar aus demſelben Grunde, aus welchem nicht alle Punkte einer Curve Durchſchnittspunkte mehrerer Zweige der Curve ſein können.

Man kann alſo annehmen, daß die allgemeine Entwickelung von f(x+h) durch die Formel:

$$f(x+h) = fx + h\varphi_1 x + h^2\varphi_2 x + h^3\varphi_3 x + \text{etc.} \qquad (h)$$

ausgedrückt wird, und alsdann nennt Lagrange $\varphi_1 x$ die Ableitung von fx und bezeichnet ſie durch $f'x$ um die zwiſchen fx und $\varphi_1 x$ ſtattfindende ge-

genſeitige Abhängigkeit beſſer anzudeuten. Nachdem die Art der Ableitung ſo definirt iſt, findet er leicht das Geſetz, nach welchem die Functionen $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x$, ... aus $f'x$ abgeleitet werden, und drückt vermittelſt ſeiner Bezeichnung die Taylor'ſche Formel auf folgende Weiſe aus:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x + \text{etc.}$$

Es brauchen nun für die Function fx blos die Elementarfunctionen x^m, log. x, sin. x ſubſtituirt zu werden, um durch bekannte algebraiſche Methoden die erſten Glieder der Entwickelungen der Functionen $(x+h)^m$, log. $(x+h)$, sin. $(x+h)$ nach den Potenzen von h, alſo die erſten Ableitungen dieſer Elementarfunctionen und folglich die Ableitungen der höhern Ordnungen dieſer Elementarfunctionen zu erhalten.

Auf dieſe Weiſe ſoll nun nach Lagrange die Theorie der Functionen auf eine bloße Anwendung der Regeln der gewöhnlichen algebraiſchen Rechnung zurückgeführt ſein, und man kann wegen der weiteren Entwickelung dieſer Grundidee die beiden beſonderen Werke vergleichen, welche dieſer große Geometer unter dem Titel: *Théorie des fonctions analytiques* und *Leçons sur le calcul des fonctions* herausgegeben hat.

Aber wenn gleich dieſe beiden Werke wegen des großen Namens ihres Verfaſſers eine ganze Generation hindurch als die Grundlage des Unterrichtes in dieſem Zweige der Mathematik betrachtet worden ſind, ſo hat doch eine genauere und tiefer Unterſuchung gezeigt, daß man darin auf einen der metaphyſiſchen Paralogismen ſtößt, in welche auch die größten Meiſter verfallen können, wenn ſie durch die Natur ihres Gegenſtandes genöthigt werden, aus der wiſſenſchaftlichen Analyſis und Syntheſis zu der Kritik der Begriffe überzugehen, welche die Materialien der Wiſſenſchaft ſelbſt bilden.

In der That hat die Entwickelung in Reihen nur dann einen Sinn, wenn man auf eine convergente Reihe geführt wird, oder noch beſſer, wenn es erwieſen iſt, daß der Reſt der Reihe ohne Ende gegen Null convergirt, wenn die Anzahl der Glieder der Reihe ohne Ende zunimmt. Jede aus einer nicht convergenten Reihenentwickelung gezogene Induction hat keine Zuverläſſigkeit und kann, wie ſich an Beiſpielen zeigen läßt, zu unrichtigen Reſultaten führen. Die Lagrange'ſche Methode gewährt alſo den Vortheil nicht, den Begriff der Grenzen oder jeden andern gleichbedeutenden Begriff zu eliminiren. Die Natur des Gegenſtandes und die Geſetze des Verſtandes fordern hier die Anwendung eines dieſer Hülfsbegriffe, deren Stelle die bloße algebraiſche Entwickelung des Principes der Identität nicht vertreten kann.

Uebrigens ſind die obigen Schlüſſe, wodurch die Form der Reihe (h) gerechtfertigt wird, abgeſehen davon, daß ſie wegen der Vieldeutigkeit der Wurzelgrößen, je nachdem man ſie als eine bloße Convention, oder als ein nothwendiges Factum betrachtet, ſehr ſubtil und beſtritten ſind, auf jeden Fall nur auf algebraiſche Functionen anwendbar, während die Theorie der Functionen, wie wir gleich im Anfange zu zeigen geſucht haben, ſich nothwendig auf beliebige ſtetige Functionen erſtrecken und eine ſelbſtändige Doctrin bilden muß, welche von den Anwendungen auf die Algebra unabhängig iſt. Die Entwickelung in Reihen iſt nur ein Rechnungskunſtgriff und kann ſchicklicher Weiſe nicht zur Aufſtellung von Geſetzen und Verhältniſſen dienen, deren Exiſtenz von unſeren künſtlichen Verfahrungsarten unabhängig iſt.

§. 106. Man ſagt, die Taylor'ſche Formel werde unbrauchbar, wenn der betrachtete beſondere Werth von x die Function fx oder ihre Ableitungen von irgend einer Ordnung an unendlich macht; denn wenn die Function fx alsdann eine algebraiſche iſt, ſo kann man die Function $f(x+h)$ in eine

Reihe entwickeln, welche Potenzen von h mit negativen oder gebrochenen Exponenten enthält; aber welche nur dann einen Sinn hat, wenn man den Rest der Reihe ohne Ende gegen Null convergiren lassen kann. Es sei z. B.:

$$fx = \frac{\varphi x}{(1-x)^m},$$

wo m eine positive Zahl und φx eine Function ist, welche, so wie alle ihre Ableitungen einen endlichen Werth annimmt, wenn man $x = 1$ setzt. Die Function $f(1+h)$ läßt sich in eine Reihe von Gliedern mit Potenzen von h mit negativen Exponenten entwickeln; denn man hat:

$$f(1+h) = \frac{\varphi(1+h)}{h^m} = h^{-m}\varphi(1) + \frac{h^{-(m-1)}}{1}\varphi'(1) + \cdot\frac{h^{-(m-2)}}{1\cdot 2}\varphi''(1) + \text{etc.}$$

Wenn die algebraische Function fx nicht unendlich wird, aber ihre Ableitungen von irgend einer Ordnung an, so ist einleuchtend, daß ihre Reihenentwickelung nur Potenzen von h mit ganzen und positiven Exponenten enthalten kann; denn alsdann ließen sich ihre Ableitungen auch nach ganzen und positiven Potenzen von h entwickeln und würden folglich nicht für $h = 0$ unendlich, während, wenn die Entwickelung der gegebenen Function Potenzen von h mit gebrochenen und positiven Exponenten enthält, wie $h^{\frac{p}{q}}$ und wenn m die größte in $\frac{p}{q}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet, durch das Differenziren in die Entwickelung der abgeleiteten Functionen von der Ordnung $m+1$ und von den höhern Ordnungen Potenzen von h mit negativen Exponenten eingeführt werden.

Dieser Fall bietet sich jedesmal dar, wenn die Function fx im Nenner eine Wurzelgröße von der Form $(x-a)^{\frac{q}{q}}$ enthält und für x der besondere Werth a gesetzt wird. Es sei z. B.:

$$fx = \varphi x + \psi x \cdot \sqrt{x^2-1},$$

wo φ und ψ ganze algebraische Functionen bezeichnen, welche nicht für $x=1$ verschwinden; so werden alle Ableitungen von fx von der ersten an für denselben Werth von x unendlich und die Taylor'sche Formel wird unbrauchbar. Aber wenn man unmittelbar $1+h$ für x substituirt, so erhält man:

$$f(1+h) = \varphi(1+h) + \psi(1+h)\cdot\sqrt{h}\cdot\sqrt{2+h},$$

und wenn man die Functionen:

$$\varphi(1+h),\ \psi(1+h),\ \sqrt{2+h}$$

durch die Taylor'sche Reihe nach den ganzen Potenzen von h entwickelt, so erhält man $f(1+h)$ durch eine Reihe ausgedrückt, worin h mit gebrochenen Exponenten vorkommt.

Wenn die erste Ableitung von fx, welche für den besondern Werth $x=a$ unendlich wird, von der $i+2^{\text{ten}}$ Ordnung ist, so kann man die Taylor'sche Reihe anwenden, wenn man bei dem Gliede mit h^i stehen bleibt und den Rest R_i durch die Formel (e) bestimmt, welche immer stattfindet, weil $f^{(i+1)}$ noch keine Stetigkeitsunterbrechung der ersten Ordnung erfährt, oder wenn man sich durch die Betrachtung der Grenzen dieses Restes überzeugt, daß derselbe von einer solchen Größenordnung ist, daß er vernachlässigt werden kann.

§. 107. Lagrange wendet eine ähnliche Schlußweise, wie die weiter oben (§. 105) angegebene an, um a priori zu zeigen, daß die Function $f(x+h)$ in ihrer Reihenentwickelung gebrochene Potenzen von h enthalten muß, wenn die in fx vorkommenden Wurzelgrößen für besondere Werthe von

x verſchwinden. Denn die Wurzelgröße $(x-a)^{\frac{p}{q}}$ gibt der Function eben ſo viele verſchiedene reelle oder imaginäre Werthe, als die ganze Zahl q Einheiten enthält. Da dieſelbe Wurzelgröße wieder in den Differenzialcoefficienten von fx vorkommt, ſo lange x unbeſtimmt bleibt; ſo nehmen dieſe Coefficienten, wie es der Fall ſein muß, ebenfalls q verſchiedene Werthe an. Es gibt alſo eigentlich ebenſo viele verſchiedene Functionen $f(x+h)$ und Reihenentwickelungen derſelben, als die fragliche Wurzelgröße Werthe geſtattet. Aber wenn man der Veränderlichen x den beſonderen Werth a beilegt, ſo verſchwindet die Wurzelgröße in allen Coefficienten:

$$fa,\ f'a,\ f''a,\ \text{etc.}$$

der Glieder der Taylor'ſchen Reihe, während ſie in der Function $f(a+h)$ noch exiſtirt und $=h^{\frac{p}{q}}$ wird. Die Taylor'ſche Reihe kann alſo in ihrer gewöhnlichen Form alsdann die Function nicht mehr darſtellen, weil die Function mehrere Werthe hat, während die Reihe nur einen einzigen Werth haben würde, und folglich muß die Reihenentwickelung von $f(a+h)$ Glieder mit der Wurzelgröße $h^{\frac{p}{q}}$ enthalten.

Wir wollen übrigens bemerken, daß eine in der Function fx vorkommende Wurzelgröße auf zwei verſchiedene Arten für beſondere Werthe von x verſchwinden kann; nämlich 1) wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen verſchwindet und 2) wenn ein Factor oder Coefficient der Wurzelgröße Null wird. Dieſer letzte Fall bildet nach denſelben Principien keine Ausnahme von der Taylor'ſchen Formel. Denn es ſei:

$$(x-a_1)^m\,(x-a)^{\frac{p}{q}}$$

ein Glied, wodurch die Wurzelgröße $(x-a)^{\frac{p}{q}}$ in die Function fx eingeführt wird, ſo verſchwindet dieſes Glied für den Werth $x=a_1$, welcher den Factor $(x-a_1)^m$ verſchwinden macht. Da der Exponent des Binomes $x-a_1$ nach der Vorausſetzung eine ganze und poſitive Zahl iſt, ſo nimmt derſelbe bei jeder Differenzirung um eine Einheit ab, und es kommen in den Ableitungen der Function fx von der m^{ten} und von den höhern Ordnungen Glieder vor, worin dieſes Binom nicht mehr als Factor der Wurzelgröße $(x-a)^{\frac{p}{q}}$ erſcheint. Hieraus folgt, daß die Entwickelung der Function $f(a_1+h)$ durch die Taylor'ſche Reihe und wenigſtens bis zu dem Gliede von dem Range $m-1$ incl. fortgeſetzt, ebenſo viele verſchiedene Werthe beibehält, als die Function $f(a_1+h)$ durch die Wurzelgröße $(x-a)^{\frac{p}{q}}$ bekommt.

Aus dem Vorhergehenden darf man aber nicht mit einigen Schriftſtellern ſchließen, daß in einem ſolchen Falle die Taylor'ſche Reihe wenigſtens bis zu dem Gliede incl. fortgeſetzt werden muß, worin die Wurzelgröße $(x-a)^{\frac{p}{q}}$ wieder erſcheint; denn dieſe Wurzelgröße kommt immer mit der Vielheit ihrer Werthe in dem beſtimmten Integrale vor, welches den Werth des Reſtes R_i ausdrückt, was für einen Werth der Index i auch haben mag, und die Strenge der Schlüſſe erfordert immer, daß man dieſen Reſt der Reihe in Rechnung bringt.

Man ſieht z. B., daß die Lagrange'ſche Schlußweiſe nicht mehr anwendbar ſein würde, wenn der Factor der Wurzelgröße eine transcendente Function von der weiter oben (§. 102) angegebenen Art wäre, welche, ſo wie

alle ihre Ableitungen, für gewiſſe Werthe von x verſchwinden, und es würde zwiſchen der Function und ihrer Reihenentwickelung nur dann Identität ſtattfinden können, wenn man bei irgend einem Gliede dieſer Reihe ſtehen bliebe und den Reſt in Rechnung brächte.

§. 108. Wenn die Function fx oder ihre Ableitungen von irgend einer Ordnung an nicht mehr für den anfänglichen Werth $x = x$, ſondern für einen zwiſchen $x = x$ und $x = x + h$ liegenden Werth $x = a$ eine Stetigkeitsunterbrechung der erſten Ordnung erführen, ſo wäre die Taylor'ſche Formel, ſobald man $h =$ oder $> a - x$ ſetzt, nicht mehr anwendbar, ſo wohl, als wenn ſich die Unterbrechung der Stetigkeit auf den anfänglichen Werth bezöge; jedoch iſt die Lagrange'ſche Metaphyſik nicht auf dieſen Fall anwendbar, welchen man nicht als einen Ausnahmefall der Anwendbarkeit der Taylor'ſchen Formel zu betrachten pflegt. Aber ſobald man den Reſt R_i in Rechnung bringt, wie ſolches immer geſchehen muß, zeigt ſich die Unbrauchbarkeit der Taylor'ſchen Formel dadurch, daß es nicht möglich iſt, Grenzen des Reſtes anzugeben, oder denſelben durch ein beſtimmtes Integral zu berechnen, wenn die Function unter dem Integralzeichen $\int$ durch das Unendliche geht, ſei es an der Grenze, oder im Verlaufe der Integration.

2) Maclaurin'ſche Formel und ihre Anwendungen.

§. 109. Wenn man in der Formel (B) $x = 0$ ſetzt, ſo erhält man:

$$fh = f(0) + \frac{h}{1} \cdot f'(0) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(0) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(0) + \text{etc.}$$

und wenn man alsdann x für h ſetzt, ſo kommt:

$$fx = f(0) + \frac{x}{1} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(0) + \text{etc.}, \quad (C)$$

ſo daß man das Problem der Transformation einer beliebigen Function in eine nach den ganzen und ſteigenden Potenzen der unabhängigen veränderlichen Größe fortſchreitende Reihe gelöſt hat. Man könnte das Geſetz dieſer Reihe auch durch die bekannte Methode der unbeſtimmten Coefficienten ohne Anwendung der Taylor'ſchen Formel ſehr einfach finden; denn wir wollen annehmen, daß ſich die Function fx in eine nach den ganzen und ſteigenden Potenzen von x fortſchreitende Reihe entwickeln läßt, und ſetzen:

$$fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

ſo erhalten wir durch Differenzirung:

$$f'x = B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.},$$
$$f''x = 2C + 2 \cdot 3Dx + \text{etc.},$$
$$f'''x = 2 \cdot 3D + \text{etc.},$$
$$\text{etc.}$$

und wenn wir in dieſen Gleichungen $x = 0$ ſetzen, ſo kommt:

$$A = f(0),\ B = f'(0),\ C = \frac{1}{2} f''(0),\ D = \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(0),\ \text{etc.}$$

Durch dieſes Verfahren, deſſen man ſich auch zuweilen zur Ableitung der Taylor'ſchen Reihe bedient, hat Maclaurin die Formel (C) erhalten, welche noch jetzt ſeinen Namen führt, obgleich man ſie in der letzten Zeit dem engliſchen Geometer Stirling als dem erſten Erfinder zugeſchrieben hat. Uebrigens muß man dieſe Formel nicht als weſentlich verſchieden von der Taylor'ſchen Formel betrachten, welche blos eine größere Allgemeinheit hat, weil ſie ſo lange ſtattfindet, als die Größen x und h unbeſtimmt

bleiben und nur auf die eine oder andere Weiſe für beſondere Werthe dieſer Größen unbrauchbar wird, während die Maclaurin'ſche Formel nur ſo lange anwendbar iſt, als die Function fx für $x = 0$ keine Stetigkeitsunterbrechung erfährt. *)

Die Maclaurin'ſche Reihe muß, wie die Taylor'ſche, und zwar aus demſelben Grunde durch einen Reſt ergänzt werden. Es bezeichne r_i den Reſt der bei dem Gliede vom Range $i+1$ geſchloſſenen Maclaurin'ſchen Reihe, ſo daß man hat:

$$fx = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \ldots\ldots + \frac{x^i}{1\cdot 2\ 3\ldots i} f^{(i)}(0) + r_i;$$

ſo iſt der Ausdruck von r_i in einem beſtimmten Integrale nach dem Vorhergehenden offenbar folgender:

$$r_i = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}\int_0^x z^i f^{(i+1)}(x-z)\,dz,$$

und der Werth von r_i fällt zwiſchen:

$$\frac{px^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(i+1)} \text{ und } \frac{qx^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(i+1)},$$

wo p, q reſp. den kleinſten und größten Werth von $f^{(i+1)}(x-z)$ zwiſchen den Grenzen $z = 0$, $z = x$ oder von $f^{(i+1)}z$ zwiſchen denſelben Grenzen bezeichnen:

Wenn man mit θ, θ_1 zwei zwiſchen 0 und 1 liegende Zahlen bezeichnet, ſo hat man für r_i auch die beiden Ausdrücke:

---

*) Wenn es ſich um bloße Reihenentwickelungen handelt, ſo kann man ſolche auch durch eine ſchickliche Verbindung der Methode der unbeſtimmten Coefficienten mit der der Ableitung erhalten.

Setzt man z. B.:

$$f(x) = (1+x)^n = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots,$$

ſo iſt:

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots = \frac{n\cdot f(x)}{1+x}$$

alſo: $$nf'(x) = (1+x)\cdot f(x),$$

d. h.:

$$n(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots) = (1+x)(A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots).$$

Setzt man ebenſo:

$$f(x) = \log.c\,(1+x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots,$$

ſo hat man:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots,$$

folglich:

$$1 = (1+x)(A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots),$$

wodurch die Coefficienten A_1, A_2, A_3, ... offenbar alle beſtimmt werden, und man ſieht leicht ein, daß $A_0 = 0$ ſein muß, weil $f(0) = 0$ iſt.

Zuweilen kann auch die Bildung der zweiten Ableitung erforderlich ſein; denn hat man z. B.:

$$f'(x) = \sin.x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots,$$

ſo iſt:

$$f'(x) = \cos.x = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots,$$
$$f''(x) = -\sin.x = 2A_2 + 2\cdot 3A_3x + \ldots,$$

folglich: $$-f(x) = f''(x),$$

d. h.:

$$-A_0 - A_1x - A_2x^2 - A_3x^3 - \ldots = 2A_2 + 2\cdot 3A_3x + \ldots,$$

wo $A_0 = 0$ und $A_1 = 1$ iſt, wie ſich leicht ergibt. Z. d. Ueberſ.

$$r_i = \frac{x^{i+1}}{1\cdot2\cdot3\ldots(i+1)} \cdot f^{(i+1)}(\theta x),\quad r_i = \frac{(1-\theta_1)^i x^{i+1}}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots i} \cdot f^{(i+1)}(\theta_1 x).$$

Da dieſe Erörterungen hinreichend ſind, ſo wollen wir nun zu der merkwürdigen Anwendung übergehen, welche man von der Maclaurin'ſchen Formel auf die Entwickelung der logarithmiſchen, Exponential- und Kreisfunctionen gemacht hat. *)

§. 110. Wenn wir die Function log. x nach den ganzen und aufſteigenden Potenzen von x entwickeln wollten, ſo würden wir finden, daß dieſe Function und ihre Ableitungen der verſchiedenen Ordnungen für $x = 0$ unendlich werden, ſo daß die Maclaurin'ſche Formel auf dieſe Function nicht anwendbar iſt. Aber wenn wir ſetzen:

$$fx = \log.(1+x)$$

und der Einfachheit wegen wieder annehmen, daß von Neper'ſchen Logarithmen die Rede iſt, ſo finden wir:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\quad f''x = -\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'''x = \frac{1\cdot2}{(1+x)^3},\quad \ldots\ldots$$

$$f^{(i)}x = \mp\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(i+1)}{(1+x)^i},$$

*) Vermittelſt der Maclaurin'ſchen Reihe kann man auch eine Function nach den negativen ſteigenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen entwickeln, wenn ſolches möglich iſt. Denn es ſei f(x) die Function, welche nach negativen Potenzen von x entwickelt werden kann, ſo muß ſich $f\left(\frac{1}{z}\right)$, wo $x = \frac{1}{z}$ geſetzt iſt, nach den poſitiven Potenzen von z in eine Reihe entwickeln laſſen, ſo daß man hat:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = f\left(\frac{1}{z}\right)_0 + f'\left(\frac{1}{z}\right)_0 \cdot \frac{z}{1} + f''\left(\frac{1}{z}\right)_0 \cdot \frac{z_2}{1.2} + \text{etc.}$$

wo $f\left(\frac{1}{z}\right)_0$, $f'\left(\frac{1}{z}\right)_0$, ... reſp. die Werthe von $f\left(\frac{1}{z}\right)$, $f'\left(\frac{1}{z}\right)$, ... für $z = 0$ bezeichnen. Es iſt aber offenbar $f\left(\frac{1}{z}\right)_0 = f\left(\frac{1}{x}\right)_0$, $f'\left(\frac{1}{z}\right)_0 = f'\left(\frac{1}{x}\right)_0$, ... und $z = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Folglich hat man:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)_0 + f'\left(\frac{1}{x}\right)_0 \cdot \frac{x-1}{1} + f''\left(\frac{1}{x}\right)_0 \cdot \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

Es ſei z. B.:

$f(x) = \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)^n$, ſo iſt $f\left(\frac{1}{x}\right) = (a + bx + cx^2)^n$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = a$

$$f'\left(\frac{1}{x}\right)_0 = na^{n-1}b,\quad f''\left(\frac{1}{x}\right)_0 = n(n-1)a^{n-2}b^2 + 2na^{n-1}c,\ \ldots$$

und folglich:

$$\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)^n = a^n + na^{n-1}b \cdot \frac{1}{x} + [n(n-1)a^{n-2}b^2 + 2na^{n-1}c] \cdot \frac{1}{2x^2} + \ldots.$$

Für $f(x) = \frac{x}{1-x}$ erhält man:

$$f(x) = -\left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \text{etc.}\right],$$

wie durch die gewöhnliche Diviſion. 3. d. Ueberſ.

je nachdem i eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Man hat also die Reihe:

$$\log.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.}, \qquad (i)$$

welche convergent ist, so lange x zwischen -1 und $+1$ liegt. An der obern Grenze $x = 1$ ist diese Reihe ebenfalls noch convergent, denn man hat:

$$\log. 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.}, \qquad (j)$$

und bekanntlich ist jede Reihe abnehmender und abwechselnd positiver und negativer Glieder nothwendig convergent. (§. 26.)

Wenn man $x = -1$ setzt, so kommt:

$$\log. 0 = -\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}\right\},$$

und da bekanntlich das negative Unendliche der Logarithmus von Null ist, so ist die Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$$

divergent, was sich übrigens auch leicht direct darthun läßt.

Ferner hat man:

$$\log.\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log.(1+x) - \log.(1-x)$$

$$= 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{etc.}\right\}. \qquad (k)$$

und wenn man alsdann

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{\nu}{n}, \text{ folglich } x = \frac{\nu}{2n+\nu},$$

setzt, so kommt:

$$\log.\left(1 + \frac{\nu}{n}\right) = \log.\left(\frac{n+\nu}{n}\right) = \log.(n+\nu) - \log.n$$

$$= 2\left\{\frac{\nu}{2n+\nu} + \frac{1}{3}\left(\frac{\nu}{2n+\nu}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\nu}{2n+\nu}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{\nu}{2n+\nu}\right)^7 + \text{etc.}\right\}. \qquad (l)$$

Diese letzte Reihe convergirt für ganze Werthe der Zahlen n und ν immer sehr schnell und gibt den Logarithmus der Zahl $n + \nu$, wenn der von n bekannt ist. Vermittelst dieser Reihe berechnet man aber blos die Logarithmen der Primzahlen, weil sich die Logarithmen der übrigen Zahlen durch einfache Additionen daraus ergeben, und zwar berechnet man zu diesem Zwecke die Logarithmen der Primzahlen auf eine größere Anzahl von Decimalstellen, als man in der Tafel beibehalten will.

Wir wollen $n = 1$ und $\nu = 1$ setzen, so haben wir, da der Logarithmus der Einheit gleich Null ist, die Reihe:

$$\log. 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{etc.}\right),$$

welche weit schneller convergirt als die Reihe (j) und wovon man nur eine kleine Anzahl von Gliedern zu berechnen braucht, um

$$\log. 2 = 0{,}69314718 \ldots\ldots$$

zu erhalten, und folglich ist:

$$\log. 4 = 1{,}38629436 \ldots\ldots$$

Wenn man in der Reihe (l), $n = 4$, $\nu = 1$ ſetzt, ſo kommt:

$$\log. 5 = \log. 4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} + \text{etc.}\right),$$

folglich:

$$\log. 5 = 1{,}60943791 \ldots\ldots$$

Das dritte Glied dieſer Reihe hat nur noch auf die ſechste Decimalſtelle Einfluß und das fünfte Glied würde bei der Berechnung der gewöhnlichen Logarithmentafeln ganz unmerklich ſein.

Die Summe der Logarithmen von 2 und 5 gibt den Neper'ſchen Logarithmus von 10 = 2,30258509 ..... und wenn man die Einheit, welche der gewöhnliche Logarithmus von 10 iſt, durch dieſe Zahl dividirt, ſo erhält man den gewöhnlichen Logarithmus von e oder den Modulus der Brigg'ſchen Logarithmen = 0,4342944819 ..... (§. 64). Vermittelſt dieſes Modulus kann man die gewöhnlichen Logarithmen aller Primzahlen finden, deren Neper'ſche Logarithmen bereits berechnet ſind. Die Analyſis gibt noch bequemere und kürzere Methoden zur Berechnung der Logarithmen an die Hand; allein alle dieſe Methoden, ſo wie die, wovon wir eben einen Begriff zu geben geſucht haben, wurden erſt erfunden, nachdem man ſchon lange Zeit Logarithmentafeln beſaß, welche durch mühſamere Verfahrungsarten berechnet ſind.

§. 111. Da alle Ableitungen der Function e^x mit ihr ſelbſt identiſch ſind, ſo reduciren ſie ſich, wie ſie für $x = 0$ auf die Einheit. Die Maclaurin'ſche Formel gibt folglich die Reihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.}, \quad (m)$$

welche zuletzt immer für jeden Werth von x convergirt, denn wenn man das Glied dieſer Reihe, welches i Glieder vor ſich hat, mit y_i bezeichnet, ſo convergirt das Verhältniß:

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = \frac{x}{i+1},$$

ohne Ende gegen die Grenze Null, wenn i immer größer werdende Werthe annimmt, was für einen Werth x auch haben mag.

Wenn man $x = 1$ ſetzt, ſo erhält man den Reihenausdruck der Zahl e wieder, welcher in §. 61 aus der Binomialformel abgeleitet iſt.

Nach den Formeln (d) in §. 67 findet man auch:

$$\sin. x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{etc.}, \quad (m_1)$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.} \quad (m_2)$$

Dieſe ſehr merkwürdigen Reihen, welche von Newton herrühren, haben, wie die Reihe (m), die Eigenſchaft, daß ſie zuletzt immer convergent werden, was für einen Werth x auch haben mag, ſo daß ſie ſich auf Kreisbogen erſtrecken, welche den ganzen Kreisumfang oder eine beliebige Anzahl von Kreisumfängen überſchreiten. Man könnte ſich derſelben zur Berechnung der natürlichen trigonometriſchen Tafeln bedienen und aus dieſen alsdann vermittelſt der Reihe (i) die Logarithmen der trigonometriſchen Linien berechnen; allein man hatte für die Bedürfniſſe der Aſtronomie weit früher die trigonometriſchen Tafeln berechnet, als Newton lebte.

Da die Reihen (m), (m_1), (m_2) für alle Werthe von x convergent sind, so kann man auch von denselben ausgehen und gleich von vornherein setzen:

$$\left.\begin{aligned} \psi x &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.},\\ fx &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{etc.},\\ \mathfrak{f}x &= 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}; \end{aligned}\right\} \quad (n)$$

und dann die Eigenschaften der Functionen ψ, f, $\mathfrak{f}$ nach den Eigenschaften der convergenten Reihen, wovon sie die Summen sind, bestimmen. Auf diese Weise fände man:

$$\left.\begin{aligned} \psi(0) = 1,\ f(0) = 0,\ \mathfrak{f}(0) = 1;\\ \psi' x = \psi x,\ f' x = \mathfrak{f} x,\ \mathfrak{f}' x = -fx; \end{aligned}\right\} \quad (o)$$

und aus diesem Systeme von Gleichungen könnte man auf die im zweiten Kapitel des ersten Buches angegebene Weise alle Eigenschaften der Functionen ψ, f, $\mathfrak{f}$ ableiten.

Die Gleichungen (n) würden diese Eigenschaften selbst unmittelbar an die Hand geben, ohne daß man die Gleichungen (o) zu Hülfe zu nehmen brauchte. So ergäbe sich z. B. aus der Form dieser Reihen selbst:

$$\begin{aligned} \psi(x\sqrt{-1}) &= \mathfrak{f}x + fx\cdot\sqrt{-1},\\ \psi(-x\sqrt{-1}) &= \mathfrak{f}x - fx\cdot\sqrt{-1},\\ (fx)^2 + (\mathfrak{f}x)^2 &= 1,\\ f(x+y) &= fx\cdot\mathfrak{f}y + fy\cdot\mathfrak{f}x; \text{ etc.} \end{aligned}$$

Aber obgleich dieser Gang logisch streng ist, so scheint uns derselbe doch für eine didactische Darstellung, wobei man besonders einen rationalen Zusammenhang der Theorieen zu erzielen suchen muß, nicht geeignet zu sein. Im Allgemeinen werden die Functionen in ihrem ganzen Verlaufe durch das Gesetz ihrer Differenzialincremente characterisirt, und nur unter gewissen Bedingungen können sie ebenfalls in ihrem ganzen Verlaufe für alle Werthe der veränderlichen Größe durch convergente Reihen ausgedrückt werden. *)

---

*) Cauchy hat in der letzten Zeit eine sehr merkwürdige Regel zur Bestimmung der Convergenz der Reihenentwickelung einer Function nach den ganzen und positiven Potenzen der unabhängig Veränderlichen gegeben. Es bezeichnen:

$$\varrho_0(\cos.\theta_0 + \sqrt{-1}\ .\ \sin.\theta_0),\ \varrho_1(\cos.\theta_1 + \sqrt{-1}\ .\ \sin.\theta_1),$$

$$\varrho_2(\cos.\theta_2 + \sqrt{-1}\ .\ \sin.\theta_2),\ \text{etc.}$$

die reellen oder imaginären Werthe, welche für x an die Stelle gesetzt, die Function fx oder ihre erste Ableitung f'x unendlich machen, oder vielmehr, welche einer der Gleichungen:

$$\frac{1}{fx} = 0,\ \frac{1}{f'x} = 0$$

genügen; so werden diese Werthe reell und positiv oder negativ sein, wenn die positiven oder negativen Zahlen θ_0, θ_1, θ_2, etc. gerade oder ungerade Vielfache von π werden. Was die Zahlen ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2, etc. anlangt, welche Cauchy Moduli zu nennen pflegt, so kann man sie als wesentlich positiv betrachten. Dieses vorausgesetzt, ist die nach den ganzen und positiven Potenzen von x fortschreitende Reihenentwickelung von fx für jeden reellen oder imaginären Werth:

§. 112. Bei den Anwendungen, welche den Gegenstand der beiden vorhergehenden Paragraphen bilden, haben wir blos die Convergenz der Maclaurin'schen Reihe bewiesen, aber streng genommen muß man direct beweisen, daß diese convergenten Reihenentwickelungen gewisse Functionen zu ihren Summen haben, oder daß der Rest r_i für schickliche Werthe von i kleiner werden kann, als jede gegebene Größe.

Nun wird aber der Rest r_i in den Entwickelungen (i), (m), (m_1), (m_2) resp. ausgedrückt durch:

$$\mp \frac{x^{i+1}}{(i+1)\,(1+\theta x)^{i+1}}, \quad \frac{x^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} \cdot e^{\theta x}$$

$$\mp \frac{x^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} \cdot \begin{cases} \text{sin.} \\ \text{cos.} \end{cases} (\theta x).$$

Die beiden letzten Ausdrücke geben für den Zahlenwerth des Verhältnisses $\frac{r_{i+1}}{r_i}$ einen Bruch, welcher für einen jeden Werth von x kleiner werden kann, als jede gegebene Größe, wofern man für i nur eine hinreichend große Zahl nimmt. Dieselbe Bedingung wird in Beziehung auf den ersten Ausdruck von r_i erfüllt, sobald man für x eine positive Zahl setzt.

§. 113. Aus der Formel (l) in §. 75 folgt:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \log\left(\frac{1 + \sqrt{-1} \cdot \text{tang. } x}{1 - \sqrt{-1} \cdot \text{tang. } x}\right),$$

und wenn man den Logarithmus nach der Formel (k) entwickelt: *)

$$x = \text{tang. } x - \frac{1}{3}\,\text{tang.}^3 x + \frac{1}{5}\,\text{tang.}^5 x - \frac{1}{7}\,\text{tang.}^7 x + \text{etc.} \qquad (p)$$

Diese letzte Reihe ist zuerst von Leibnitz angegeben. Sie convergirt nur für Werthe von tang. x, welche zwischen — 1 und + 1 liegen, oder

---

$$\varrho(\cos.\ \theta + \sqrt{-1}\ .\ \sin.\ \theta),$$

von x, dessen Modulus ϱ kleiner ist als der kleinste der Moduli $\varrho_{,}$, $\varrho_{,,}$, $\varrho_{,,,}$ etc. convergent. Hieraus folgt unmittelbar, daß jede periodische Function, wie sin. x, cos. x, welche, wie ihre erste Ableitung, für keinen reellen oder imaginären Werth von x unendlich wird, sich für jeden Werth von x in eine nach den ganzen und positiven Potenzen von x fortschreitende convergente Reihe entwickeln läßt.

*) Diese Reihe ergibt sich auch unmittelbar aus der Maclaurin'schen Reihe, wenn man bemerkt, daß man, wenn f(x) = arc. tang. x ist, hat:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - x\sqrt{-1}} = \frac{1}{1 + x\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1 - x\sqrt{-1})^{-1} + (1 + x\sqrt{-1})^{-1}\right]$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{-1})^{n-1} \cdot \frac{1.2.3..(n-1)}{2}\left[(1 - x\sqrt{-1})^{-n} + (1 + x\sqrt{-1})^{-n} \cdot (-1)^n\right]$$

$$f^{(n)}(0) = (\sqrt{-1})^{n-1} \cdot \frac{1.2.3...(n-1)}{2}\,[1 - (-1)^n],$$

woraus sich die Werthe von f'(0), f''(0), f'''(0), ... ergeben, wenn man n successive gleich 1, 2, 3, ... setzt. Z. d. Ueberf.

für Werthe von x zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ und findet folglich auch nur für dieſe Werthe ihre Anwendung, obgleich die Function tang. x zwiſchen den Grenzen $x = -\frac{1}{2}\pi$ und $x = +\frac{1}{2}\pi$ ſtetig bleibt.

Die Reihe (p) iſt jedoch an der Grenze $x = \frac{1}{4}\pi$ noch convergent und an dieſer Grenze hat man:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.};$$

allein dieſe Reihe convergirt doch zu langſam, als daß man den Werth der transcendenten Zahl π darnach berechnen könnte. Wenn man $x = 30^0$ ſetzt, wovon die Tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ iſt, ſo gibt die vorhergehende Formel:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \text{etc.}\right),$$

und durch dieſe letzte Reihe hat Lagny die Zahl π bis auf 127 Decimalſtellen berechnet. Es gibt übrigens noch andere Reihenentwickelungen, vermittelſt welcher ſich der Werth von π noch weit ſchneller berechnen läßt.

Aus der Formel (i) ergibt ſich:

$$\log. x = \log.\left(\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}\right) = \log.(1+x) - \log.\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{4}\left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) + \text{etc.}$$

Dieſe neue Reihe iſt zwar für alle reellen Werthe von x divergent, allein wenn man der Größe x den imaginären Werth $e^{z\sqrt{-1}}$ beilegt, ſo erhält man:

$$\log. x = z\sqrt{-1},\quad x^m - \frac{1}{x^m} = e^{mz\sqrt{-1}} - e^{-mz\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\cdot\sin. mz,$$

und folglich verwandelt ſich die vorhergehende Formel, nachdem man durch $2\sqrt{-1}$ dividirt hat, in folgende:

$$\frac{1}{2}z = \sin. z - \frac{1}{2}\sin. 2z + \frac{1}{3}\sin. 3z - \frac{1}{4}\sin. 4z + \text{etc.}$$

Dieſe neue Reihe iſt offenbar für jeden Werth von z convergent, aber ihre Summe iſt nur dann gleich $\frac{1}{2}z$, wenn der Werth von z zwiſchen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$, $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Der geometriſche Ort der Gleichung:

$$y = \sin. x - \frac{1}{2}\sin. 2x + \frac{1}{3}\sin. 3x - \frac{1}{4}\sin. 4x + \text{etc.} \qquad (q)$$

iſt ein Syſtem paralleler gerader Linien:

..... $M_1 N_1$, $M N$, $M' N'$, $M'' N''$, ... (Fig. 35),

deren endliche Gleichungen resp. folgende sind:

.... $y = \frac{1}{2}(x + \pi)$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}(x - \pi)$, $y = \frac{1}{2}(x - 2\pi)$,...

Die gemeinschaftliche Abscisse der Punkte NM' ist $OP = \pi$; allein die Gleichung (q) gibt, wenn man darin $x = \pi$ setzt, für den Werth von y, weder die Ordinate PN, noch die gleiche und mit entgegengesetzten Zeichen behaftete Ordinate PM'. Aus dieser Gleichung folgt $y = 0$, d. h. ein Werth von y, welcher der halben Summe der Ordinaten PN, PM' gleich ist. Dasselbe findet statt, wenn man für x ein positives oder negatives Vielfache von π setzt (§. 38). In der Folge werden wir auf diese wesentliche Eigenthümlichkeit der Entwickelungen discontinuirlicher Functionen zurückkommen und die Gleichung (q) als einen speciellen Fall weit allgemeinerer Gleichungen wieder erhalten.

§. 114. Die Entwickelung einer Function in eine nach den Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreitende Reihe führt auf die Reihenentwickelung mit Exponentialfunctionen; denn es sei fx die gegebene Function, so verwandelt sie sich, wenn man:

$$x = \log. z, \text{ oder } z = e^x$$

setzt, in:

$$f(\log. z) = Fz$$

und läßt sich im Allgemeinen nach den Potenzen von z entwickeln. Es sei Az^m irgend ein Glied der Reihenentwickelung, so nimmt dasselbe, wenn man darin für z seinen Werth setzt, die Form Ae^{mx} an, und folglich wird die Function f auf diese Weise in eine Reihe von Exponentialgrößen entwickelt. *)

*) Vermittelst der Maclaurin'schen Reihe und des Principes für die Bildung der Ableitungen der inversen Functionen kann man auch alle Reihen von der Form:

$$x = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + ... = f(y)$$

umkehren, d. h. $y = \varphi(x)$ unter einer nach den Potenzen von x fortschreitenden ähnlichen Reihenform erhalten. Denn nach der Maclaurin'schen Formel hat man:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\frac{x}{1} + \varphi''(0)\frac{x^2}{1.2} + \varphi'''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + ...$$

so daß man blos die Werthe von $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ... zu bestimmen braucht. Nun ist aber:

$$f'(y) = a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2 + ...$$
$$f''(y) = 2a_2 + 6a_3 y + ...$$
$$f'''(y) = 6a_3 + ...$$
$$\text{etc.} = \text{etc.}$$

und:

$\varphi(0) = 0$, weil $\varphi(x)$ dieselbe Form hat, als $f(y)$.

$$\varphi'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{a_1},$$

$$\varphi''(0) = -\frac{f''(0)}{[f'(0)]^3} = -\frac{2a_2}{a_1^3},$$

$$\varphi'''(0) = \frac{3[f''(0)]^2 - f'''(0) \cdot f'(0)}{[f'(0)]^5} = \frac{12a_2^2 - 6a_1 a_3}{a_1^5},$$

$$\text{etc.} = \text{etc.}$$

Es ist also:

$$y = \frac{1}{a_1}x - \frac{a_2}{a_1^3}x^2 + \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5}x^3 + ...$$

Dasselbe Verfahren ist bei den Functionen log. $(1 + x)$, sin x, tang. x anwendbar, um daraus die inversen Functionen in Reihenform abzuleiten.

Z. d. Uebers.

Drittes Buch.

Differenzirung der entwickelten und unentwickelten Functionen mit mehreren Veränderlichen.

Erſtes Kapitel.

Von den entwickelten Functionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen und von ihrer Differenzirung. — Grundbegriffe über die Stetigkeitsunterbrechungen der Functionen von zwei und drei Veränderlichen.

---

§. 115. Bisher haben wir nur Functionen von einer einzigen Veränderlichen, d. h. Größen, betrachtet, deren Werth beſtimmt iſt, ſobald man den Werth einer andern veränderlichen Größe, wovon ſie abhängen, angegeben hat; aber im Allgemeinen iſt der Werth einer Größe von den Werthen abhängig, welche mehrere andere Größen annehmen, die ſich unabhängig von einander ändern können, und in dieſem Falle ſagt man, daß die erſte Größe eine Function mehrerer unabhängiger veränderlicher Größen ſei.

So ändert ſich z. B. die Intenſität der Schwere mit der Höhe des ſchweren Körpers über dem Niveau des Meeres und auch mit der geographiſchen Breite, und zwar ſind dieſe veränderlichen Größen von einander *unabhängig*; denn man kann ſich vorſtellen, daß ſich die Höhe des ſchweren Körpers ändert, ohne daß ſich die geographiſche Breite ändert, und umgekehrt. Wenn die Figur der Erde merklich von der eines Rotationsſphäroides verſchieden wäre, ſo änderte ſich die Intenſität der Schwere auch mit der geographiſchen Länge und würde eine Function von *drei* unabhängig veränderlichen Größen.

Wenn ein feſter Körper, welcher urſprünglich gleichförmig erhitzt iſt, ſich abkühlt, ſo ändert ſich die Temperatur in jedem Punkte ſeiner Maſſe mit der Zeit, aber ſie ändert ſich auch in demſelben Augenblicke von einem Punkte zum andern; denn die nahe an der Oberfläche liegenden Molecule müſſen ſchneller die Temperatur des umgebenden Mittels annehmen, als die gegen die Mitte des Körpers zu liegenden Molecule. Die Temperatur in jedem Punkte der Maſſe des Körpers iſt folglich eine Function von *vier* unabhängig veränderlichen Größen, nämlich von der ſeit dem Beginnen des Abkühlens verfloſſenen Zeit und von den drei Coordinaten, welche die Lage des betrachteten Punktes innerhalb des Körpers beſtimmen.

Dieſe Beiſpiele ließen ſich leicht beliebig vermehren, und man ſieht leicht ein, daß bei den meiſten Naturerſcheinungen jede meßbare Größe von vielen andern Größen abhängt, welche ſich unabhängig von einander verändern können. Um aber die Urſachen zu vereinfachen und ſie der Rechnung zugänglich zu machen, nimmt man an, daß dieſe Größen mit Ausnahme von einer, zwei oder drei derſelben feſte Werthe bekommen und alsdann werden die davon abhängigen Größen Functionen von einer, von zwei oder von drei unabhängig veränderlichen Größen.

Um auszudrücken, daß eine Größe u eine Function von mehreren veränderlichen Größen x, y, z, ... iſt, bedient man ſich der Bezeichnung:

$$u = f(x, y, z, \ldots),$$

und wenn man andeuten will, daß bei der Bestimmung der Function außerdem auch constante Größen oder Parameter a, b, c, ... vorkommen, so schreibt man:

$$u = f(x, y, z, \ldots a, b, c, \ldots).$$

Eine Function kann in Beziehung auf jede der veränderlichen Größen, wovon sie abhängt eine mathematische oder empirische, algebraische, oder transcendente, rationale oder irrationale, ganze oder gebrochene, lineare oder nicht lineare, etc. sein, und wir brauchen in Beziehung auf die Klassification, welche wir bei den Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe angegeben haben, hier in Beziehung auf die Functionen von mehreren veränderlichen Größen nichts weiter hinzuzufügen.

Wenn die Function u durch eine nicht in Beziehung auf u aufgelößte Gleichung:

$$F(u, x, y, z, \ldots) = 0$$

mathematisch bestimmt wird, so ist die Function u eine unentwickelte und wird eine entwickelte Function, sobald man die vorhergehende Gleichung in Beziehung auf u auflößt.

§. 116. Eine Function von mehreren Veränderlichen, welche keinen mathematischen Ausdruck hat, oder für welche man diesen Ausdruck nicht kennt, wird für die zwischen gegebenen Grenzen der unabhängigen Veränderlichen liegenden Werthe als bekannt angesehen, wenn man Tafeln hat, welche die Werthe der Function angeben, die eben so vielen Systemen der den unabhängigen Veränderlichen beigelegten und einander sehr nahe kommenden Werthen entsprechen. Allein die Construction dieser Tafeln ist reell nur für die Functionen von zwei unabhängigen veränderlichen Größen ausführbar.

Es seien:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_{m-1}, x_m;$$
$$y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{n-1}, y_n;$$

zwei Reihen einander hinreichend genäherter Werthe von x und y und $u_{h,k}$ bezeichne den dem Systeme (x_h, y_k) entsprechenden Werth der Function u; so lassen sich die allen Combinationen, welche man aus den in den beiden obigen Reihen enthaltenen Werthen von x und y bilden kann, entsprechenden Werthe von u der Bequemlichkeit wegen auf folgende Weise in eine Tafel zusammenstellen:

	x_1	x_2	x_3	. . . . .	x_{m-1}	x_m
y_1	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	$u_{3,1}$		$u_{m-1,1}$	$u_{m,1}$
y_2	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$	$u_{3,2}$		$u_{m-1,2}$	$u_{m,2}$
y_3	$u_{1,3}$	$u_{2,3}$	$u_{3,3}$		$u_{m-1,3}$	$u_{m,3}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
y_{n-1}	$u_{1,n-1}$	$u_{2,n-1}$	$u_{3,n-1}$		$u_{m-1,n-1}$	$u_{m,n-1}$
y_n	$u_{1,n}$	$u_{2,n}$	$u_{3,n}$	. . . . .	$u_{m-1,n}$	$u_{m,n}$

ſo daß ſich der Werth $u_{h,k}$ in der Verticalſpalte befindet, an deren Eingange x_h ſteht und in der Horizontalſpalte, an deren linken Eingange y_k ſteht. Eine ſo eingerichtete Tafel wird eine Tafel mit doppeltem Eingange genannt und die Pythagoräiſche Tafel (das Einmaleins) iſt das bekannteſte Beiſpiel einer Tafel mit doppeltem Eingange. Eine Logarithmentafel iſt ihrer Natur nach, wie alle Tafeln, welche Werthe der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe enthalten, eine Tafel mit einfachem Eingange; aber bei ihrer gewöhnlichen Einrichtung hat man derſelben zur Verminderung ihres Volumens die Form einer Tafel mit doppeltem Eingange gegeben.

Eine Function von drei unabhängigen veränderlichen Größen x, y, z könnte durch eine Tafel mit einem dreifachen Eingange gegeben werden, wovon man ſich einen Begriff bilden kann, wenn man ſich den Raum durch drei Syſteme paralleler Ebenen, wovon jedes die beiden anderen unter einem rechten Winkel durchſchneidet, in kubiſche Fächer getheilt denkt und annimmt, daß in jedes Fach ein Werth der Function u geſchrieben wird, ſo daß ſich der Werth $u_{h,k,l}$ über dem Fache $u_{h,k}$ der als horizontal gedachten vorhergehenden Tafel und in der Horizontalſchicht befindet, für welche die veränderliche z den Werth z_l hat. Wenn die Function von mehr als drei veränderlichen Größen abhinge, ſo ließe ſich keine ähnliche geometriſche Anordnung mehr denken, wodurch ſich die beſonderen Werthe dieſer Function im Raume coordiniren ließen.

§. 117. Die mathematiſche oder empiriſche Function $f(x, y, z \ldots\ldots)$ muß im Allgemeinen aus den bei den Functionen von einer einzigen Veränderlichen angegebenen Gründen ſtetig ſein, und aus dieſer Eigenſchaft der Stetigkeit ergeben ſich wichtige Folgerungen, die unabhängig ſind von der Eigenſchaft der Functionen, ſich durch mathematiſche Formeln ausdrücken zu laſſen.

Die Function kann, obgleich ſie ſtetig iſt, für Syſteme beſonderer Werthe:

$$x = \xi,\ y = \eta,\ z = \zeta,\ \text{etc.}$$

oder für Syſteme von Werthen, welche nicht einzeln beſtimmt ſind, ſondern gewiſſen ſpeciellen Bedingungen:

$$\varphi(x, y, z, \ldots.) = 0,\ \psi(x, y, z \ldots.) = 0,\ \text{etc.}$$

genügen, doch Stetigkeitsunterbrechungen erfahren; allein ehe wir uns mit dieſen Unterbrechungen der Stetigkeit beſchäftigen, wird es zweckmäßig ſein, die Theorie der Ableitungen, oder der unendlich kleinen Veränderungen auf die Functionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen zu erſtrecken.

§. 118. Wir wollen zunächſt eine Function von zwei unabhängigen Veränderlichen:

$$z = f(x, y)$$

betrachten, und annehmen, daß die Veränderlichen x und y die Zuwächſe Δx, Δy bekommen, ſo wird die entſprechende Veränderung der Function z:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

welcher man folgende Form geben kann:

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] + f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y),$$

ſo daß die zwiſchen den Klammern ſtehende Größe der Werth iſt, welchen die Veränderung Δz haben würde, wenn ſich x allein geändert hätte.

Der Ausdruck von Δz kann auch auf folgende Form gebracht werden:

$$\Delta z = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y.$$

Wir wollen nun annehmen, daß ſich die Differenzen Δx, Δy ohne Ende der Grenze Null nähern, ſo nähert ſich das Verhältniß:

$$\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}$$

ohne Ende der Ableitung $f'(x,\ y)$ von $f(x,\ y)$ in Beziehung auf die Veränderliche x, und wenn man die Ableitung von $f(x,\ y)$ in Beziehung auf die als unabhängige Veränderliche betrachtete Größe y mit $f_1(x,\ y)$ bezeichnet; so convergirt das Verhältniß:

$$\frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x+\Delta x,\ y)}{\Delta y}$$

gegen die Grenze $f_1(x+\Delta x,\ y)$ wenn Δy immer kleiner und kleiner wird. Endlich convergirt dieſe letzte Grenze, deren Werth mit Δx veränderlich iſt, ihrerſeits gegen die Grenze $f_1(x,\ y)$ wenn Δx gegen Null convergirt.

Bezeichnet man alſo mit dx, dy, dz, unendlich kleine Werthe von Δx, Δy, Δz, ſo hat man:

$$dz = f'(x,\ y)\,dx + f_1(x,\ y)\,dy.$$

Aber wenn wir andererſeits mit $d_x z$ das Differenzial von z bezeichnen, wenn ſich x allein änderte und mit $d_y z$ das Differenzial von z wenn ſich y allein änderte, ſo hat man:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x,\ y) = \dfrac{d_x z}{dx} \\ \\ f_1(x,\ y) = \dfrac{d_y z}{dy} \end{array}\right|$$

und folglich:

$$dz = \frac{d_x z}{dx}\,dx + \frac{d_y z}{dy}\,dy. \qquad (1)$$

In dieſem Ausdrucke bezeichnet dz das Totaldifferenzial, $d_x z$, $d_y z$ bezeichnen die partiellen Differenziale und:

$$\frac{d_x z}{dx},\quad \frac{d_y z}{dy}$$

ſind die partiellen Differenzialcoefficienten oder die partiellen Ableitungen.

Gewöhnlich pflegt die Benennung partielle Differenzen der mehr paſſenden, aber nicht ſo wohlklingenden Benennung partielle Differenziale vorgezogen zu werden, was daher kommt, daß die Geometer des letzten Jahrhunderts ſtatt des Ausdruckes Differenzial den Ausdruck Differenz gebrauchten, indem ſie darunter eine unendlich kleine Differenz verſtanden.

Die Formel (1) bietet, wie wir ſie eben ausgedrückt haben, keine Zweideutigkeit dar; allein in der Praxis würde die Anwendung der Indices unten an dem Differenzialzeichen beſchwerlich ſein und oft zu Schreib- oder Druckfehlern Veranlaſſung geben, weswegen man es vorzieht, blos

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy \qquad (2)$$

zu ſchreiben, wobei keine Verwechſelung des Totaldifferenziales dz im erſten Theile der Gleichung mit den partiellen Differenzialen dz, welche in den Zählern der Differenzialcoefficienten im zweiten Theile der Gleichung vorkommen, zu befürchten iſt.

In der That ſind die Differenziale nur Hülfsſymbole, welche im Verlaufe der analytiſchen Combinationen angewandt werden, um zu den Differenzialcoefficienten zu gelangen, welche numeriſch beſtimmte Functionen ſind, ſo bald man den veränderlichen Größen, wovon ſie abhängen, beſtimmte Zahlenwerthe beilegt. So lange aber die Veränderlichen x, y von einander unabhängig ſind

und die Veränderungen dx, dy durch keine Relation mit einander verbunden ſind, bleiben die Verhältniſſe des Totaldifferenziales dz zu dx oder dy, nämlich:

$$\frac{d_x z}{dx} + \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d_x z}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{d_y z}{dy},$$

unbeſtimmt. Die Ausdrücke:

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}$$

würden folglich keinen beſtimmten Werth haben, wenn das im Zähler vorkommende dz ein Totaldifferenzial bezeichnen ſollte, und die Rechnung könnte, wenn ſie auf Aufgaben angewandt wird, die eine beſtimmte Auflöſung zulaſſen, nicht auf ſolche Ausdrücke führen.

Nichtsdeſtoweniger ſchreiben einige Analyſten nach dem Beiſpiele von Euler und Laplace die partiellen Differenzialcoefficienten zwiſchen Parentheſen auf folgende Weiſe:

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy;$$

aber gewöhnlich betrachtet man dieſe Parentheſen als überflüſſig. *)

---

*) Beiſpiel 1. Es ſei:

$$u = x^3 + ax^2y + y^3$$

ſo iſt:

$$\frac{du}{dx} dx = (3x^2 + 2axy)\, dx,$$

$$\frac{du}{dy} dy = (ax^2 + 3y^2)\, dy,$$

und folglich das Totaldifferenzial:

$$du = (3x^2 + 2axy)\, dx + (ax^2 + 3y^2)\, dy.$$

Beiſpiel 2. Es ſei:

$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ſo iſt $\frac{du}{dx} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$ und $\frac{du}{dy} = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$,

folglich das Totaldifferenzial:

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = \frac{dx}{y} - \frac{ydx}{x^2} + \frac{dy}{x} - \frac{xdy}{y^2}.$$

Beiſpiel 3. Es ſei:

$$u = \log.\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{y}\right) = \log.\left(x + \sqrt{x^2 - y^2}\right) - \log. y,$$

ſo iſt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \text{ und } \frac{du}{dy} = -\frac{x}{y\sqrt{x^2 - y^2}}$$

folglich:

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{xdy}{y\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{ydx - xdy}{y\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Beiſpiel 4. Es ſei:

$$u = \log. \text{tang.} \frac{x}{y},$$

ſo iſt:

§. 119. Die Formel (2) erſtreckt ſich ohne alle Schwierigkeiten auf Functionen von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen, und für $u = f(x, y, z, t, ...)$ hat man z. B.:

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz + \frac{du}{dt}dt + \text{etc.} \qquad (3)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\,\text{tang.}\frac{x}{y}}{dx\,\text{tang.}\frac{x}{y}} = \frac{\sec.^2\frac{x}{y}}{y\,\text{tang.}\frac{x}{y}}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{d\,\text{tang.}\frac{x}{y}}{dy\,\text{tang.}\frac{x}{y}} = \frac{-\sec.^2\frac{x}{y}}{y^2\,\text{tang.}\frac{x}{y}}$$

und folglich:

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = \frac{\sec.^2\frac{x}{y}}{y\,\text{tang.}\frac{x}{y}}dx - \frac{x\sec.^2\frac{x}{y}}{y^2\,\text{tang.}\frac{x}{y}}dy$$

$$= \frac{ydx - xdy}{y^2\,\text{tang.}\frac{x}{y}}\sec.^2\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2\sin.\frac{x}{y}\cos.\frac{x}{y}}.$$

Beiſpiel 5. Es ſei:

$$u = \frac{xy^2}{z^2 - a^2},$$

ſo iſt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{y^2}{z^2 - a^2}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{2xy}{z^2 - a^2}, \quad \frac{du}{dz} = -\frac{2xy^2z}{(z^2 - a^2)^2}$$

und folglich das Totaldifferenzial:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = \frac{y^2dx}{z^2 - a^2} + \frac{2xy\,dy}{z^2 - a^2} - \frac{2xy^2zdz}{(z^2 - a^2)^2}$$

$$= \frac{y^2(z^2 - a^2)\,dx + 2xy(z^2 - a^2)\,dy - 2xy^2zdz}{(z^2 - a^2)^2}.$$

Beiſpiel 6. Es ſei:

$$u = x\,\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right),$$

ſo iſt:

$$\frac{du}{dx} = \Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) + \frac{x}{y}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right),$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{x^2}{y^2}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) + \frac{x}{z}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right),$$

$$\frac{du}{dz} = -\frac{xy}{z^2}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right),$$

und folglich das Totaldifferenzial:

$$du = \Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)dx + \frac{x}{y}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)dx - \frac{x^2}{y^2}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)dy$$

$$+ \frac{x}{z}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)dy - \frac{xy}{z^2}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)dz.$$

Z. d. Ueberſ.

Wenn alſo Δu, Δx, Δy, Δz, Δt, etc. ſehr kleine Veränderungen der erſten Ordnung bezeichnen, ſo hat man bis auf Größen der zweiten und der höhern Ordnungen genau:

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \frac{du}{dz}\Delta z + \frac{du}{dt}\Delta t + \text{etc.} \quad (4)$$

wenigſtens ſo lange die partiellen Ableitungen:

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{du}{dt}, \text{etc.}$$

keine ſehr großen Werthe annehmen, ſo daß die Brüche:

$$\frac{1}{\frac{du}{dx}}, \frac{1}{\frac{du}{dy}}, \frac{1}{\frac{du}{dz}}, \frac{1}{\frac{du}{dt}}, \text{etc.}$$

ſo klein werden, daß ſie mit Δx, Δy, Δz, Δt, etc. vergleichbar ſind (§. 45).

Wenn alſo eine Function von Größen abhängt, welche ſehr kleine poſitive oder negative Veränderungen erfahren, ſo iſt die Totalveränderung der Function nahezu gleich der algebraiſchen Summe der Veränderungen, welche dieſe Function in ihrem Werthe würde erfahren haben, wenn ſich jede der Größen, wovon ſie abhängt, allein geändert hätte.

Das Princip des Zuſammenfallens ſehr kleiner Bewegungen, welches bei der Erklärung der Naturerſcheinungen eine ſo wichtige Rolle ſpielt und worauf die neuen Theorien des Schalles und des Lichtes beruhen, iſt weiter nichts, als eine Folgerung aus dem eben ausgeſprochenen Satze, welchen man daher das Princip des Zuſammenfallens kleiner Veränderungen nennen könnte. Wenn man dieſes Princip mit dem Principe der Proportionalität kleiner Veränderungen (§. 5) zuſammenhält, ſo ſieht man ein, wie eine beſchränkte Anzahl von Verſuchen oder Beobachtungen die Mittel zur Berechnung der Veränderungen einer Größe an die Hand geben kann, welche nach einem empiriſchen und unbekannten Geſetze von mehreren anderen Größen abhängig iſt, wofern die Veränderungen dieſer letzten Größen in enge Grenzen eingeſchloſſen ſind. Denn ſtreng genommen genügt es ſchon, die Werthe von Δu für ſo viele Werthſyſteme von Δx, Δy, Δz, Δt, etc. zu beobachten, als man in der Gleichung (4) partielle Ableitungen numeriſch zu beſtimmen hat, und alsdann gibt dieſe Gleichung den Werth von Δu durch eine lineare Function von Δx, Δy, etc., für ſehr kleine, aber übrigens beliebige Werthe dieſer Veränderungen. Die Beobachtungskunſt beſteht alsdann darin, unter ſolchen Umſtänden zu beobachten, daß dieſe unbekannten Coefficienten mit der größten Genauigkeit beſtimmt werden können und die Wahrſcheinlichkeitsrechnung gibt zu dieſem Zwecke Indicationen an die Hand, welche wir hier nicht näher anführen können.

§. 120. Der Beweis der Formel (2) oder der Formel (3), welche eine Verallgemeinerung derſelben iſt, erfordert nicht, daß die Veränderlichen x, y, z, etc. von einander unabhängig ſind, was wir größerer Allgemeinheit wegen vorausgeſetzt haben; allein nichts hindert, alle dieſen Veränderlichen x, y, etc., oder einige derſelben, als Functionen einer neuen unabhängigen Veränderlichen v zu betrachten, oder vielmehr anzunehmen, daß mehrere dieſer Veränderlichen, z. B. y und z Functionen von x ſind. Alsdann iſt u aus einem doppelten Grunde eine Function von x, nämlich unmittelbar, in ſo fern x in dem Ausdrucke von u vorkommt und mittelbar, weil u eine Function der Größen y und z iſt, welche ſelbſt unmittelbare Functionen von x ſind. Alsdann muß man in der Formel (3) für:

$$\frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz$$

die Größe:

$$\left(\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)dx$$

ſetzen, und ebenſo in allen ähnlichen Fällen.

Dieſe Bemerkung benutzt man zur Erleichterung der Differenzirung der mathematiſchen Functionen von einer einzigen Veränderlichen, wenn der Ausdruck derſelben complicirt iſt. Wenn man z. B. die Function:

$$u = \frac{1+x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}},$$

zu differenziren hätte, ſo könnte man ſetzen:

$$\sqrt{1+x} = y,\quad \sqrt{1-x} = z,$$

folglich:

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}},\quad dz = -\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$$

Andererſeits hätte man:

$$u = \frac{y^2}{y-z},$$

folglich:

$$\frac{du}{dy} = \frac{y^2-2yz}{(y-z)^2},\quad \frac{du}{dz} = \frac{y^2}{(y-z)^2}.$$

Wenn man dieſe Werthe in die Formel:

$$du = \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz = \left(\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)dx$$

ſubſtituirt, ſo findet man:

$$du = \left(\frac{y-2z}{2(y-z)^2} - \frac{y^2}{2z(y-z)^2}\right)dx,$$

und nachdem man für die Hülfsveränderlichen y, z ihre Werthe in x ſubſtituirt hat:

$$du = \frac{x-3+\sqrt{-x^2}}{4\sqrt{1-x}\,(1-\sqrt{1-x^2})}\cdot dx.$$

§. 121. Wenn bei den Anwendungen des Calculs auf Naturerſcheinungen eine Function u ſowohl unmittelbar, als mittelbar von einer gewiſſen Größe t abhängt, ſo iſt es zuweilen nicht blos bequem, ſondern ſogar unumgänglich nothwendig, in der Veränderung von u den Theil, welcher unmittelbar von der Veränderung von t und den Theil, welcher von der Veränderung einer Größe v, die ſelbſt eine Function von t iſt, herrührt, für ſich zu betrachten. Um dieſe doppelte Abhängigkeit durch ein Beiſpiel zu erläutern, wollen wir uns ein materielles Theilchen denken, welches ſich vermöge der Wirkung eines electriſirten Körpers im Raume bewegt.

Die Intenſität der bewegenden Kraft iſt eine unmittelbare Function der Zeit t, weil ſich die electriſche Ladung des electriſirten Körpers fortwährend

vermindert, und eine mittelbare Function derſelben veränderlichen Größe, weil ſie von den Coordinaten des bewegten materiellen Theilchens, welche ſich jeden Augenblick ändern, abhängig iſt. Die feinſten Unterſuchungen in der Theorie der Bewegung der Himmelskörper beruhen auf Unterſcheidungen dieſer Art zwiſchen den verſchiedenen Theilen der Veränderung einer Function, welche man als eben ſo viele einzelne Wirkungen oder Einflüſſe der Veränderung einer und derſelben veränderlichen Größe betrachten muß. In einem ſolchen Falle kann der Differenzialcoefficient verſchiedene und lauter endliche Werthe haben, je nachdem man du als ein totales oder als ein partielles Differenzial betrachtet, und alsdann ſind gewiſſe Bezeichnungen erforderlich, welche jede Zweideutigkeit beſeitigen; allein es laſſen ſich in dieſer Beziehung keine allgemeine Regeln aufſtellen.

§. 122. Vermittelſt der Formel (3) kann man auch eine Relation beweiſen, welche unter dem Namen des Lehrſatzes von den homogenen Functionen bekannt iſt. In rein algebraiſchem Sinne ſagt man, daß eine Function $f(x, y, z, ...)$ homogen ſei, wenn man für jeden Werth von θ die Relation hat:

$$f(\theta x, \theta y, \theta z, ...) = \theta^n f(x, y, z, ...).$$

Wenn man beide Theile dieſer Gleichung in Beziehung auf θ differenzirt, ſo erhält man die neue Identität:

$$\frac{d \cdot f(\theta x, \theta y, \theta z, ...)}{dx} x d\theta + \frac{d \cdot f(\theta x, \theta y, \theta z, ...)}{dy} y d\theta$$

$$+ \frac{d \cdot f(\theta x, \theta y, \theta z, ...)}{dz} z d\theta + \text{etc.} = n\theta^{n-1} d\theta \cdot f(x, y, z...),$$

und wenn man durch $d\theta$ dividirt und dann $\theta = 1$ ſetzt; ſo kommt:

$$x \frac{df(x, y, z, ...)}{dx} + y \frac{df(x, y, z, ...)}{dy} + z \frac{df(x, y, z, ...)}{dz} + \text{etc.}$$

$$= nf(x, y, z, ...),$$

wodurch der Lehrſatz von den homogenen Functionen analytiſch ausgedrückt wird.

§. 123. Wir wollen wieder die Function mit zwei unabhängigen Veränderlichen:

$$z = f(x, y)$$

betrachten. Wenn wir mit $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ die partiellen Veränderungen bezeichnen, welche dieſe Function erfährt, wenn x um Δx zunimmt, ohne daß y ſich ändert und wenn y um Δy wächſt, ohne daß ſich x ändert; ſo haben wir:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Die Veränderungen, welche die beiden Theile dieſer Gleichung erfahren, wenn man darin $y + \Delta y$ für y ſetzt, müſſen ausgedrückt werden durch:

$$\Delta_y \Delta_x z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)$$
$$- f(x, y + \Delta y) + f(x, y),$$

und wegen der Symmetrie des zweiten Theiles dieſer Gleichung in Beziehung auf die Veränderlichen x, y muß man für beliebige Werthe oder Incremente Δx, Δy die Relation haben;

$$\Delta_y \Delta_x z = \Delta_x \Delta_y z;$$

folglich, wenn man zu der Grenze übergeht:

$$d_y d_x z = d_x d_y z, \qquad (5)$$

und;

$$\frac{d_y d_x z}{dy dx} = \frac{d_x d_y}{dx dy}.$$

Bei einer Formel wie dieſe nimmt man an, daß die Art und die Ordnung der partiellen Differenzirungen durch das Vorhandenſein und durch die Aufeinanderfolge der in den Nennern vorkommenden Factoren dx, dy zur Genüge angedeutet wird und man ſchreibt daher:

$$\frac{ddz}{dydx} = \frac{ddz}{dxdy},$$

oder noch einfacher:

$$\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy}.$$

Der eben bewieſene Satz iſt auf jede Art ſtetiger Functionen anwendbar und muß ſich immer numeriſch oder algebraiſch verificiren. Wir wollen z. B.

$$z = \text{arc. tang.} \frac{x}{y}$$

ſetzen, ſo haben wir:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Es ſei ferner:

$$z = \frac{x^2y}{1+y^2},$$

ſo kommt:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2xy}{1+y^2}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{x^2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}$$

$$\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{2x(1-y^2)}{(1+y^2)^2}.$$

Iſt die Identität der beiden Theile der Gleichung (5) einmal dargethan, ſo folgt daraus, daß man in einem Ausdrucke von der Form:

$$d_x d_y d_z \ldots\ldots u,$$

die Aufeinanderfolge irgend zweier ſucceſſiver Indices umkehren und vermittelſt einer oder mehrerer ſolcher Umkehrungen in der Ordnung der Indices oder der ſucceſſiven Differenzirungen alle möglichen Permutationen vornehmen kann, ohne an dem Endreſultate etwas zu verändern. Das Raiſonnement iſt daſſelbe, als das, welches man in den Elementen der Arithmetik anwendet, um den Satz zu beweiſen, daß man, ohne den Werth eines Productes aus mehreren Factoren zu verändern, die Ordnung der ſucceſſiven Multiplicationen auf alle möglichen Arten abändern kann, nachdem vorher bewieſen iſt, daß das Product aus zwei Factoren nicht geändert wird, welchen von dieſen beiden Factoren man als Multiplicand oder als Multiplicator betrachten mag.

§. 124. Vermittelſt des Lehrſatzes im vorhergehenden §. findet man leicht den Ausdruck der Totaldifferenziale der verſchiedenen Ordnungen der Functionen von mehreren unabhängigen veränderlichen Größen. Wenn man die beiden Theile der Gleichung:

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

worin $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ Functionen von x, y bezeichnen und dx, dy als constante Factoren behandelt werden können, weil x, y die unabhängigen Veränderlichen bezeichnen, in Beziehung auf x und y differenzirt; so erhält man:

$$d^2z = \left[d \cdot \frac{\frac{dz}{dx}}{dx}\,dx + d \cdot \frac{\frac{dz}{dx}}{dy}\,dy\right] dx + \left[d \cdot \frac{\frac{dz}{dy}}{dx}\,dx + d \cdot \frac{\frac{dz}{dy}}{dy}\,dy\right] dy$$

$$= \left(\frac{d^2z}{dx^2}dx + \frac{d^2z}{dydy}dy\right)dx + \left(\frac{d^2z}{dxdy}dx + \frac{d^2z}{dy^2}dy\right)dy$$

$$= \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2 .$$

Das Differenzial d^2z im ersten Theile dieser Gleichung ist ein Totaldifferenzial der zweiten Ordnung und die Ausdrücke:

$$\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dxdy}, \quad \frac{d^2z}{dy^2}$$

bezeichnen die drei partiellen Differenzialcoefficienten oder die drei partiellen Ableitungen der zweiten Ordnung, welche im Allgemeinen bestimmte Functionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y sind, aber welche zufällig auch nur eine dieser Veränderlichen enthalten oder sich auf constante Größen reduciren, oder sogar auch für gewisse Werthe der Veränderlichen x, y unbestimmt bleiben können, wie wir gehörigen Orts sehen werden.

Durch Fortsetzung dieser Rechnung ergibt sich, daß das Totaldifferenzial der n^{ten} Ordnung einer Function von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y ausgedrückt wird durch:

$$d^nz = \frac{d^nz}{dx^n}dx^n + \frac{n}{1} \cdot \frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2 + \text{etc.} + \frac{d^nz}{dy^n}dy^n ,$$

welcher Ausdruck offenbar der Binomialformel analog ist, durch dieselbe Art von Induction bewiesen wird und sich auf folgende symbolische Form:

$$d^nz = \left(\frac{1}{dx} \cdot dx + \frac{1}{dy} \cdot dy\right)^n d^nz .$$

bringen läßt.

Ebenso würde das Gesetz der Entwickelung des Totaldifferenziales einer Function u von einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher x, y, z, t, ... durch die symbolische Gleichung:

$$d^nu = \left(\frac{1}{dx} \cdot dx + \frac{1}{dy} \cdot dy + \frac{1}{dz} \cdot dz + \text{etc.}\right)^n d^nu .$$

ausgedrückt. Den Grund dieser Analogieen zwischen der Entwickelung der Potenzen und der Entwickelung der endlichen oder unendlich kleinen Differenzen haben wir bereits in §. 43 angegeben.

Unter Gleichungen mit partiellen Differenzialen, oder wie man sich gewöhnlicher ausdrückt, mit partiellen Differenzen (§. 118) versteht man die Gleichungen, welche zwischen den unabhängigen Veränderlichen, den davon abhängigen Functionen und den partiellen Ableitungen oder den partiellen Differenzialcoefficienten dieser Function stattfinden; wogegen man unter

Gleichungen mit gewöhnlichen Differenzialen oder ſchlechthin unter Differenzialgleichungen diejenigen verſteht, worin nur Differenzialcoefficienten wie die vorkommen, wovon in der Theorie der Functionen einer einzigen Veränderlichen die Rede geweſen iſt. Die Ordnung einer partiellen Differenzialgleichung wird durch die Ordnung des darin vorkommenden Differenzialcoefficienten von der höchſten Ordnung beſtimmt. Die allgemeinſte Form einer partiellen Differenzialgleichung der erſten Ordnung zwiſchen zwei unabhängigen Veränderlichen x, y und der Function z iſt:

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

die einer partiellen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zwiſchen denſelben Veränderlichen iſt:

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0,$$

u. ſ. f.

Unter der Rechnung mit partiellen Differenzialen oder mit partiellen Differenzen verſteht man den Theil der Theorie der Functionen, welcher von den zwiſchen den Functionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher und zwiſchen ihren partiellen Differenzialcoefficienten oder ihren partiellen Ableitungen ſtattfindenden Verhältniſſen und im Allgemeinen von den partiellen Differenzialgleichungen der verſchiedenen Ordnungen handelt.

Wenn man blos zwei unabhängige Veränderliche x, y und eine Function z derſelben betrachtet, wie ſolches faſt immer bei den Anwendungen auf Geometrie der Fall iſt, ſo findet man es bequem, jede der partiellen Ableitungen der drei erſten Ordnungen mit einem einzigen Buchſtaben zu bezeichnen, weil dieſe Ableitungen häufig angewandt werden, und zu dieſem Zwecke werden wir uns nach Monge der folgenden Bezeichnung bedienen:

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy},$$

$$r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dxdy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2},$$

$$u = \frac{d^3z}{dx^3}, \quad w = \frac{d^3z}{dx^2dy}, \quad w = \frac{d^3z}{dxdy^2}, \quad v = \frac{d^3z}{dy^3},$$

oder:

$$\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy \\ d^2z &= r\,dx^2 + 2s\,dxdy + t\,dy^2, \\ d^3z &= u\,dx^3 + 3w\,dx^2dy + 3w\,dxdy^2 + v\,dy^3. \end{aligned}$$

Nach dieſer Bezeichnung werden die partiellen Differenzialgleichungen der erſten und zweiten Ordnung zwiſchen den drei Veränderlichen x, y, z folglich ganz allgemein ausgedrückt durch:

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

§. 125. Aus der analytiſchen Geometrie im Raume iſt bekannt, daß die ſtetige Function $z = f(x, y)$ immer durch die Ordinate einer auf drei rechtwinklichte Axen bezogenen krummen Fläche dargeſtellt werden kann. Die Werthe der Ableitungen p, q, r, s, t, ſtehen zu der Richtung der Berührungsebene und zu gewiſſen geometriſchen Eigenſchaften der krummen Fläche in Beziehungen, welche wir unterſuchen werden, wenn wir ſpeciell von der Anwendung der Differenzialrechnung auf die Geometrie in drei Dimenſionen handeln werden. In

dieſem Augenblicke dagegen wollen wir unterſuchen, von welchem Nutzen die geometriſchen Begriffe zur Erläuterung der Theorie der Functionen ſein können.

Nun iſt aber in dieſer Beziehung leicht einzuſehen, daß die geometriſche Darſtellung der Functionen von zwei veränderlichen Größen durch die Ordinaten krummer Flächen von wenig praktiſchem Nutzen iſt; denn wenn ſich eine Curve, wovon man eine endliche Anzahl einander hinreichend nahe liegender Punkte kennt, leicht in der Ebene conſtruiren läßt, ſo fehlt es doch auf der andern Seite an bequemen Verfahrungsarten zur figürlichen Darſtellung einer krummen Fläche im Raume, wovon man nur eine endliche Anzahl von Punkten kennt und ſelbſt einer Fläche, deren Geſetz der Erzeugung bekannt iſt. Dieſe Schwierigkeit hat die Entſtehung eines neuen Zweiges der Geometrie veranlaßt, welchen man die deſcriptive oder darſtellende Geometrie genannt hat, und deren Zweck darin beſteht, die Conſtructionen, welche im Raume ausgeführt werden müßten, auf graphiſche Conſtructionen in der Ebene zurückzuführen.

§. 126. Von allen Verfahrungsarten der deſcriptiven Geometrie zur Beſtimmung krummer Flächen mittelſt ebener Conſtructionen beſteht die allgemeinſte und die einzige, womit wir uns hier wegen ihres unmittelbaren Zuſammenhanges mit der analytiſchen Theorie der Functionen beſchäftigen wollen, darin, daß man die krumme Fläche mit einer Reihe horizontaler Ebenen durchſchneidet und die Durchſchnittscurven, welche Niveaulinien genannt werden, auf die horizontale Ebene der x, y projicirt, wo die projicirten Linien und ihre Projectionen, wegen des Parallelismus der Ebenen vollkommen aufeinander legbar ſein müſſen.

Für jede Niveaulinie hat man $z = c$, wo c eine beliebige Conſtante bezeichnet, und folglich iſt:

$$dz = 0 \text{ oder } pdx + qdy = 0,$$

die gemeinſchaftliche Differenzialgleichung aller Projectionen der Niveaulinien, und aus derſelben folgt:

$$y' = -\frac{p}{q}, \quad = \frac{dz}{dx} \qquad (6)$$

wodurch für jeden Punkt (x, y) die Richtung der Tangente an der Projection einer Niveaulinie für dieſen Punkt beſtimmt iſt.

Wenn man von einem Punkte der krummen Fläche, deſſen Coordinaten x, y, z ſind, zu einem benachbarten Punkte, deſſen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ ſind, übergeht; ſo ſteigt man in verticaler Richtung um die Höhe dz auf und beſchreibt parallel zu der Horizontalebene die unendlich kleine Linie $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Die Neigung oder der Abhang der auf der krummen Fläche beſchriebenen Linie, oder die Tangente des Winkels, welchen ſie mit der Horizontalebene bildet, wird folglich ausgedrückt durch:

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{p + qy'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \qquad (7)$$

Die Größe dieſer Neigung ändert ſich in demſelben Punkte der krummen Fläche, oder für dieſelben Werthe von x, y, p, q mit dem willkührlichen Verhältniſſe y'. Wenn man daher die Richtung der Linie des ſtärkſten Abhanges oder Falles beſtimmen will, ſo muß man die Ableitung des vorhergehenden Ausdruckes, als Function von y' betrachtet, gleich Null ſetzen, wodurch man:

$$y' = \frac{q}{p}, \qquad (8)$$

oder

$$qdx - pdy = 0,$$

für die gemeinſchaftliche Differenzialgleichung aller Projectionen der Linien des ſtärkſten Falles auf die Ebene der xy erhält. Nach einem bekannten Lehrſatze ergibt ſich aus der Vergleichung der Gleichungen (6) und (8), daß das Syſtem der Projectionen der Niveaulinien von dem Syſteme der Projectionen der Linien des ſtärkſten Falles rechtwinklicht durchſchnitten wird. Wenn alſo eine gewiſſe Anzahl einander hinreichend genäherter Curven des einen Syſtemes gegeben iſt, ſo kann man die Curven des andern Syſtemes mit einer hinreichenden Annäherung zeichnen.

Wenn man den aus der Gleichung (8) genommenen Werth von y' in den zweiten Theil der Gleichung (7) ſubſtituirt, ſo erhält man für den Werth des ſtärkſten Falles:

$$\sqrt{p^2+q^2}.$$

Das Verfahren, welches gegenwärtig in Frankreich bei den großen topographiſchen Arbeiten zur Darſtellung des Reliefs eines Terrains auf einer Horizontalebene angewandt wird, beſteht in der That darin, auf dieſer Horizontalebene die Reihe von Projectionen der Niveaulinien zu zeichnen, welche man erhält, wenn man die Oberfläche des Terrains mit gleichweit von einander entfernten Horizontalebenen durchſchneidet und die Reihe der Projectionen der Linien des ſtärkſten Falles conſtruirt, welche die Curven des erſten Syſtemes unter einem rechten Winkel durchſchneiden.

§. 127. Wenn jede verticale Ordinate die krumme Fläche nur in einem einzigen Punkte trifft und immer einen endlichen Werth behält, ſo bilden die Projectionen der Niveaulinien eine Reihe von Linien, wovon keine die übrigen ſchneidet, und welche auch nicht in ſich ſelbſt zurückkehren, nachdem z gewiſſe Werthe überſchritten hat. Dieſer Fall verdient eine beſondere Aufmerkſamkeit, weil derſelbe bei allen den Unterſuchungen vorkommt, wo die Veränderliche z eine phyſiſche Größe bezeichnet, welche eine Function zweier Coordinaten eines materiellen Punktes iſt. Wir wollen z. B., um die Begriffe zu fixiren, eine kreisförmige Scheibe betrachten, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten x, y iſt und welche man urſprünglich auf irgend eine Weiſe erhitzt hat. Ferner wollen wir annehmen, daß dieſe Scheibe eine ſo geringe Dicke hat, daß die Temperatur aller auf einer Normale der beiden Flächen der Scheibe liegenden Molecule nahezu dieſelbe iſt; ſo wird die Temperatur z aller auf derſelben Normale liegenden Molecule für einen beliebigen Zeitpunkt eine Function der Coordinaten x, y des Fußpunktes der Normale. Dieſe Function kann poſitiv oder negativ ſein, je nachdem man den Nullpunkt der Temperaturen beſtimmt; allein ſie wird immer einen endlichen Werth behalten, und zwar im Allgemeinen für jedes Syſtem von Werthen der Coordinaten x, y nur einen einzigen Werth. Das Geſetz dieſer Function wird anſchaulich gemacht, wenn man auf der Ebene der xy eine Reihe von Linien α, β, γ, ... (Fig. 36) beſchreibt, welche der Differenzialgleichung:

$$pdx + qdy = 0,$$

genügen, oder auf welchen die Temperatur denſelben Werth behält, und wenn man an jede Linie eine Zahl ſetzt, welche den Werth der Temperatur für die auf dieſer Linie liegenden Punkte ausdrückt. Dieſe Linien von gleicher Temperatur, deren Syſtem das Geſetz der Function z beſtimmen und graphiſch darſtellen kann, werden *iſothermiſche Linien* genannt.

Die Veränderliche z könnte auch die Dichtigkeit, die Ausdehnung und Zuſammenziehung eines materiellen Theilchens, den darauf wirkenden Druck, die Intenſität des darauf fallenden Lichtes, die Intenſität der von demſelben ausgehenden electriſchen und magnetiſchen Wirkungen ꝛc. bezeichnen, und die all-

gemeinen Merkmale der Function, womit wir uns bei dieſer Art von Unterſuchungen allein zu beſchäftigen haben, würden ganz dieſelben bleiben.

Um keine nicht durchaus nothwendigen Ausdrücke einzuführen, *) wollen wir auch die Linien Niveaulinien nennen, längs welcher die Function $z = f(x, y)$ einen conſtanten Werth behält, obgleich die Function z eine phyſiſche Größe und nicht mehr die verticale Ordinate einer krummen Fläche ausdrücken ſoll, wovon der Punkt (x, y, z) den Punkt (x, y) zur Horizontalprojection hat. Die Veränderung der Function z iſt Null, wenn man von einem Punkte auf der Niveaulinie zu dem benachbarten übergeht und ſie iſt für dieſelbe unendlich kleine Verrückung die möglichſt größte, wenn dieſe Verrückung in einer auf der Niveaulinie (§. 126) ſenkrechten Richtung geſchieht. Man kann daher die Linien, welche die Niveaulinien unter einem rechten Winkel durchſchneiden und den Projectionen der Linien des ſtärkſten Falles in der Theorie der krummen Flächen entſprechen, Linien der größten Veränderung nennen.

§. 128. Die in den vorhergehenden §§. betrachteten Functionen z, welche ſich übrigens mathematiſch ausdrücken laſſen mögen oder nicht, würden nicht unendlich werden können; aber ſie können Stetigkeitsunterbrechungen der erſten Ordnung erfahren, welche in dem plötzlichen Uebergange von einem endlichen Werthe zu einem andern beſtehen. Dieſes folgt, wie wir bereits an einem ähnlichen Falle gezeigt haben (§. 38), aus der Regel ſelbſt, vermöge welcher wir uns vorſtellen können, daß eine phyſiſche Größe z eine Function der Coordinaten eines mathematiſchen Punktes (x, y) wird. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß z die Dichtigkeit der Platte M (Fig. 36) längs der Normale, deren Fußpunkt, (x, y) iſt, bezeichnet. Um mit dieſer Definition eine phyſiſche Bedeutung verbinden zu können, muß man ſich auf der Fläche der Platte eine geſchloſſene Curve willkührlich beſchrieben denken, deren Umfang σ eine Fläche ω umſchließt, worin der Punkt (x, y) liegt. Die Fläche ω kann zur Grundfläche eines geraden Cylinders genommen werden, deſſen Höhe die Dicke der Platte iſt, und das Verhältniß der Maſſe dieſes Cylinders zu ſeinem Volumen iſt alsdann eine gewiſſe Zahl D, welche die mittlere Dichtigkeit des Cylinders ausdrückt.

Denkt man ſich nun, daß die Fläche ω ohne Ende abnimmt, aber immer den Punkt (x, y) enthält, ſo iſt die Grenze z, gegen welche das veränderliche Verhältniß D convergirt, und welche ſich mit den Coordinaten x, y ändern kann, die Function von x, y, welche man als Maß der Dichtigkeit der Platte auf der im Punkte (x, y) errichteten Normale nimmt. Das eben in Beziehung auf das Maß der Dichtigkeit Geſagte, würde auch auf das Maß der Temperatur, oder jeder andern phyſiſchen Größe anwendbar ſein.

Die Grenze z ändert ſich im Allgemeinen nicht, welche Form die Curven σ und welche Lage der Punkt (x, y) innerhalb der von dieſen Curven begrenzten Fläche auch haben mögen, und ſie ändert ſich im Allgemeinen auch nicht, wenn man den Punkt (x, y) ſogar auf den Umfang der Fläche ω verlegt; denn man könnte für dieſen Punkt einen demſelben innerhalb der Fläche ω unendlich nahe liegenden Punkt $(x + dx, y + dy)$ ſubſtituiren, für welchen der Werth der Function z von dem Werthe derſelben Function für den Punkt (x, y) nur um eine unendlich kleine Größe verſchieden wäre und folglich ver-

*) Man könnte die Linien, welche materielle Theilchen verbinden, die ſich in demſelben phyſiſchen Zuſtande befinden, oder für welche die betrachtete phyſiſche Größe $y = f(x, y)$ denſelben Werth hat, iſomertiſche Linien nennen, und dieſe Benennung iſt der bereits in den Gebrauch übergegangenen Benennung iſothermiſche Linien analog.

nachläſſigt werden könnte. Allein nichts deſtoweniger begreift man leicht, daß ſich die Grenze z für gewiſſe beſondere Werthe von x, y ändern kann, je nachdem die unendlich kleine Fläche ω in allen Richtungen alle benachbarte Punkte von (x, y) enthält, oder nur die zwiſchen gewiſſen durch den Punkt (x, y) gezogenen Linien liegenden Punkte. In dieſem letzten Falle iſt der Unterſchied der Werthe von z für zwei einander unendlich naheliegende Punkte nicht mehr unendlich klein, oder mit andern Worten, die Function z erfährt alsdann eine Unterbrechung der Stetigkeit der erſten Ordnung, welche in dem plötzlichen Uebergange von einem endlichen Werthe zu einem andern endlichen Werthe beſteht.

Ein Beiſpiel dieſer Art von Unterbrechungen der Stetigkeit erhält man, wenn man ſich vorſtellt, daß die Platte M (Fig. 37) aus zwei verſchiedenen und nach der Linie np zuſammengelötheten Metallen beſteht. Die Dichtigkeit der Platte iſt alsdann eine Function, welche ſich plötzlich ändert, wenn man durch die Löthlinie geht, und wenn man für den Punkt (x, y) einen auf dieſer Linie liegenden Punkt μ nimmt; ſo hat die Function z zwei verſchiedene Werthe, je nachdem man dieſen Punkt als zu dem Theile A oder zu dem Theile B der Platte gehörig betrachtet. Es ſeien z_1, z_2 dieſe beiden Werthe der Function z, ſo iſt die eben erwähnte Grenze gleich:

$$\frac{z_1 + z_2}{2},$$

wenn der Punkt μ innerhalb der Fläche ω liegt; ſie iſt gleich z_1, wenn der Umfang σ durch den Punkt μ geht und zur Linken der Tangente st liegt, und ſie iſt endlich $= z_2$, wenn der Umfang wieder durch den Punkt μ geht, aber zur Rechten derſelben Tangente liegt.

Wir wollen die Linien np, längs welcher die Function plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern endlichen Werthe übergeht *Unterbrechungslinien* nennen. Mehrere Unterbrechungslinien np, $n'p'$, $n''p''$, etc. (Fig. 38) können im Punkte μ einen gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkt haben. Durch den Punkt μ wollen wir an dieſe Linien die Tangenten st, $s't'$, $s''t''$, etc. ziehen und mit α_1, α_2, α_3, etc. die Bogen bezeichnen, welche auf dem Kreisumfange von dem Halbmeſſer $= 1$ die Winkel:

$$s\mu s', \quad s'\mu s'', \quad s''\mu t, \quad \text{etc.}$$

meſſen; ſo hat die Function z im Punkte μ verſchiedene Werthe z_1, z_2, z_3, etc. je nachdem man den Punkt μ als zu dem einen oder zu dem andern der Winkelräume:

$$n\mu n', \quad n'\mu n'', \quad n''\mu p, \quad \text{etc.} \qquad (\alpha)$$

gehörig betrachtet. Die Grenze z, mit welcher dieſe Function im Allgemeinen übereinſtimmt, iſt gleich

$$\frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \text{etc.}}{2\pi},$$

wenn der Punkt μ in die Fläche ω fällt und ſie bekommt die Werthe z_1, z_2, z_3, etc., wenn der Umfang σ durch den Punkt μ geht und außerdem ganz in einem der Winkelräume (α) liegt.

Wenn es Unterbrechungslinien gibt, ſo ſind die Niveaulinien keine geſchloſſenen Curven mehr. Wenn z. B. np (Fig. 39) eine Unterbrechungslinie iſt, ſo endigt ſich eine vom Punkte μ ausgehende und zur Linken der Unterbrechungslinie liegende Niveaulinie im Allgemeinen zur Rechten derſelben Linie in einem von μ verſchiedenen Punkte ν. Umgekehrt kann man die Unterbrechungslinie als eine Verbindungslinie der Unterbrechungspunkte der aufeinander fol-

genden Niveaulinien betrachten, wenn dieſe Linien und folglich die Function z Stetigkeitsunterbrechungen der erſten Ordnung erfahren.

Die Stetigkeitsunterbrechungen der zweiten Ordnung der Function z werden im Allgemeinen durch die Exiſtenz der vorſpringenden Punkte in den Niveaulinien characteriſirt. Wenn man die einander in den ſucceſſiven Niveaulinien entſprechenden vorſpringenden Punkte verbindet, ſo beſchreibt man eine andere Linie, welche man eine Unterbrechungslinie der zweiten Ordnung nennen kann, u. ſ. f.

§. 129. Betrachten wir nun die Function mit drei unabhängigen Veränderlichen:

$$u = f(x, y, z),$$

wenn u den Werth einer gewiſſen phyſiſchen Größe für einen Punkt (x, y, z) bezeichnet, z. B. eine Attractiv- oder Repulſivkraft, eine Dichtigkeit, einen Druck, eine Temperatur, u. ſ. w.

Wenn man:

$$\frac{d \cdot f(x, y, z)}{dx} = X, \quad \frac{d \cdot f(x, y, z)}{dy} = Y, \quad \frac{d \cdot f(x, y, z)}{dz} = Z,$$

ſetzt, ſo hat man:

$$du = Xdx + Ydy + Zdz,$$

in welchem Ausdrucke jeder der Buchſtaben X, Y, Z im Allgemeinen eine Function der drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z bezeichnet.

Da außerdem nach §. 123

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}, \quad \frac{d^2u}{dxdz} = \frac{d^2u}{dzdx}, \quad \frac{d^2u}{dydz} = \frac{d^2u}{dzdy}$$

ſo müſſen die Functionen X, Y, Z die drei Bedingungsgleichungen erfüllen:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}. \qquad (B)$$

Wen man der Function u eine Reihe conſtanter Werthe beilegt, ſo erhält man eine Reihe von Flächen, welche alle der Differenzialgleichung:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

genügen und ſich nicht ſchneiden können, weil ſonſt die Function für denſelben materiellen Punkt mehrere verſchiedene Werthe annehmen könnte. Wenn die Function u eine Temperatur bezeichnet, ſo bekommen dieſe Flächen den Namen iſothermiſche Flächen, während ſie in der Hydroſtatik, wo die Function u einen Druck bezeichnet, Niveauflächen genannt werden, welchen Ausdruck wir aus dem bereits angegebenen Grunde (§. 127) bei jeder phyſiſchen Bedeutung der Function u beibehalten:

Wenn die Coordinaten x, y, z, rechtwinklige ſind, ſo wird die Entfernung des Punktes (x, y, z) von einem unendlich naheliegenden Punkte:

$$(x + dx, y + dy, z + dz),$$

ausgedrückt durch:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

und während des Ueberganges von einem Punkte zum andern nimmt die Function u das Increment du an, ſo daß das Verhältniß dieſes Incrementes zu der gegenſeitigen Entfernung der beiden betrachteten Punkte ausgedrückt wird durch:

$$\frac{Xdx + Ydy + Zdz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

oder durch:

$$\frac{X + Yy' + Zz'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \qquad (m)$$

wenn der Kürze wegen:

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{dz}{dx} = z'$$

geſetzt wird. Die Größe dieſes Verhältniſſes ändert ſich für denſelben Punkt des Raumes oder für dieſelben Werthe der Größen X, Y, Z mit den willkührlichen Verhältniſſen y', z', welche die Richtung beſtimmen, nach welcher die Verrückung ſtattgefunden hat. Wenn man auf die als Function von y', z' betrachtete Größe (m) die Methode anwendet, welche weiter unten zur Beſtimmung der Maxima und Minima der Functionen mehrerer veränderlicher Größen angegeben werden wird, ſo findet man, daß der größte Werth des Verhältniſſes (m) ausgedrückt wird durch:

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

und daß die Linien der größten Veränderung die Niveauflächen unter rechten Winkeln treffen.

§. 130. Die Theorie der Stetigkeitsunterbrechungen der Functionen von einer oder von zwei Veränderlichen, welche phyſiſche Größen ausdrücken (§. 38 und §. 128) läßt ſich ohne Schwierigkeit auf die Functionen mit drei Veränderlichen erſtrecken. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß u die Dichtigkeit des Körpers M im Punkte (x, y, z) ausdrückt. Zur nähern Beſtimmung der Bedeutung dieſer Definition muß man ſich innerhalb des Körpers eine geſchloſſene Fläche ω von einer beliebigen Lage denken, jedoch ſo, daß der Punkt (x, y, z) in derſelben liegt. Das Verhältniß der Maſſe des von dieſer Fläche umſchloſſenen Volumens zu dieſem Volumen ſelbſt iſt eine gewiſſe Zahl D, welche die mittlere Dichtigkeit von v ausdrückt. Stellt man ſich nun vor, daß die Dimenſionen des Volumens v durch die fortwährende Veränderung der Fläche ω ohne Ende abnehmen, aber ſo, daß der Punkt (x, y, z) immer in dieſer Fläche bleibt; ſo iſt die Grenze, gegen welche das veränderliche Verhältniß D convergirt, die Function u von x, y, z, welche man als Maß der Dichtigkeit des Körpers im Punkte (x, y, z) nimmt. Dieſe Definition iſt mutatis mutandis auch auf das Maß der Temperatur oder jeder andern phyſiſchen Größe anwendbar.

Hiernach iſt leicht begreiflich, wie die im Allgemeinen ſtetige Function u für die auf gewiſſen Flächen liegenden Punkte plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern endlichen Werthe übergehen kann, und welche Flächen wir daher Unterbrechungsflächen nennen wollen. Es bezeichne μ einen auf einer ſolchen Fläche liegenden Punkt und A, B ſeien die beiden Theile des Körpers M, in welche derſelbe durch dieſe Fläche getheilt wird, und endlich ſeien u_1, u_2 reſp. die Werthe der Grenze u für zwei unendlich nahe liegende Punkte von μ, wovon der eine in dem Theile A und der andere in dem Theile B liegt; ſo wird der Werth der Grenze u für den Punkt μ ausgedrückt durch:

$$\frac{u_1 + u_2}{2}.$$

Wenn der Punkt μ der gemeinſchaftliche Durchſchnittspunkt mehrerer Unterbrechungsflächen iſt, ſo zieht man an die Durchſchnittslinien dieſer Flächen im Punkte μ Tangenten, denkt ſich aus dem Punkte μ als Mittelpunkt mit

dem Halbmesser = 1 eine Kugel beschrieben, verbindet die Punkte, worin die Tangenten die Kugelfläche treffen, durch Bogen größter Kreise und theilt so diese Fläche in Abtheilungen, deren Flächen τ_1, τ_2, τ_3, etc. den Regionen des Körpers M entsprechen, für welche die Grenze u in der unmittelbaren Nähe des Punktes μ die Werthe u_1, u_2, u_3, etc. annimmt. Der Werth dieser Function für den Punkt μ ist alsdann das Mittel:

$$\frac{u_1\tau_1 + u_2\tau_2 + u_3\tau_3 + \text{etc.}}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \text{etc.}} = \frac{u_1\tau_1 + u_2\tau_2 + u_3\tau_3 + \text{etc.}}{4\pi}.$$

Man kann die Unterbrechungsfläche als den geometrischen Ort der Unterbrechungslinien der Niveauflächen betrachten, wenn diese Flächen, und folglich die Function μ Stetigkeitsunterbrechungen der ersten Ordnung erfahren.

Die Stetigkeitsunterbrechungen der zweiten Ordnung der Function u entsprechen den Kanten oder den vorspringenden Linien auf den Niveauflächen und der geometrische Ort der Kanten, welche einander auf den successiven Niveauflächen entsprechen, ist eine Fläche, welche man eine Unterbrechungsfläche der zweiten Ordnung nennen kann.

Zweites Kapitel.

Differenzirung der unentwickelten Functionen von einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen. — Vertauschung der Veränderlichen.

I. Differenzirung der unentwickelten Functionen.

§. 131. Wenn die Veränderliche y implicite als Function von x durch eine unaufgelöste Gleichung:

$$f(x, y) = 0 \qquad (a)$$

bestimmt wird, so kann der erste Theil dieser Gleichung als eine Function u der Veränderlichen x, y betrachtet werden, welche beständig = 0 bleibt, so daß die Incremente dx, dy durch die Gleichung:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y}$$

mit einander verbunden sind. Statt das Hülfszeichen u anzuwenden, kann man auch setzen:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dy = 0,$$

oder was noch einfacher ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0.$$

Wenn man den Differenzialcoefficienten $\frac{dy}{dx}$ mit y' bezeichnet, so nimmt diese Gleichung folgende Form an:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,y' = 0, \qquad (a')$$

woraus folgt:

$$y' = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy}.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung ist im Allgemeinen eine entwickelte Function der beiden Veränderlichen x, y, und wenn man den aus der Gleichung (a) abgeleiteten Werth von y als Function von x substituirt; so erhält man y' als eine Function der einzigen Veränderlichen x. Wenn die Gleichung (a) eine algebraische ist, so kann man auch nach den gewöhnlichen Methoden y zwischen den Gleichungen (a) und (a') eliminiren, und alsdann bestimmt die resultirende Gleichung, welche im Allgemeinen in Beziehung auf y' nicht algebraisch auflösbar ist, die Ableitung y' als Function von x implicite.

Wegen des zwischen der unabhängigen Veränderlichen x und jeder der Functionen y, y' stattfindenden Zusammenhanges ist der erste Theil der Gleichung (a') eine Function von x, welche für jeden Werth von x gleich Null bleiben muß. Folglich ist die Ableitung dieses ersten Theiles, wenn man y, y' als Functionen von x behandelt, auch gleich Null, und man hat zwischen x, y, y', y'', die Gleichung:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dxdy}y' + \frac{d^2f}{dy^2}y'^2 + \frac{df}{dy}y'' = 0, \qquad (a'')$$

so daß man zwischen den Gleichungen (a), (a'), (a'') irgend zwei dieser vier Veränderlichen eliminiren kann. Wenn man z. B. y' fortschafft, so hat man zwischen x, y, y'' die Gleichung:

$$\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\left(\frac{df}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2f}{dxdy}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dy} + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^3 y'' = 0.$$

Ebenso müßte man, um y''' zu bestimmen, von dem ersten Theile der Gleichung (a'') die Ableitung in Beziehung auf x nehmen, indem man wieder die Regel für die Differenzirung der mittelbaren Functionen anwendete, wodurch man erhielte:

$$\frac{d^3f}{dx^3} + 3\frac{d^3f}{dx^2dy}y' + 3\frac{d^3f}{dxdy^2}y'^2 + \frac{d^3f}{dy^3}y'^3 + 3\frac{d^2f}{dxdy}y'' + 3\frac{d^2f}{dy^2}y'y'' + \frac{df}{dy}y''' = 0.$$

Es hat durchaus keine Schwierigkeit, diese Rechnung successive weiter fortzusetzen und unmittelbar die Formel abzuleiten, welche den Werth von $y^{(n)}$ gibt.

§. 132. Wenn man u Gleichungen zwischen n + 1 Veränderlichen hat, so bleibt nur eine einzige dieser Veränderlichen eine unabhängige, wovon alle übrigen Functionen sind, welche sich explicite ausdrücken ließen, wenn man die Elimination zwischen den gegebenen Gleichungen und die Auflösung der resultirenden Gleichungen bewerkstelligen könnte.

Wenn wir der Kürze wegen durch:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0,\ \ldots\ldots\ f_n = 0, \qquad (b)$$

die Gleichungen bezeichnen, wodurch die n + 1 Veränderlichen t, x, y, z, ... mit einander verbunden sind, so haben wir auch die abgeleiteten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} df_1 &= \frac{df_1}{dt}dt + \frac{df}{dx}dx + \frac{df_1}{dy}dy + \frac{df_1}{dz}dz + \text{etc.} = 0,\\ df_2 &= \frac{df_2}{dt}dt + \frac{df_2}{dx}dx + \frac{df_2}{dy}dy + \frac{df_2}{dz}dz + \text{etc.} = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ df_n &= \frac{df_n}{dt}dt + \frac{df_n}{dx}dx + \frac{df_n}{dy}dy + \frac{df_n}{dz}dz + \text{etc.} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (b')$$

Wenn nun t die unabhängige Veränderliche ist, so dividirt man alle die Gleichungen (b') durch dt und man erhält n lineare Gleichungen zwischen den n Differenzialcoefficienten:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \text{etc},$$

vermittelst welcher Gleichungen die Coefficienten einzeln als Functionen von t, x, z, etc. bestimmt werden.

Ebenso bestimmen die Gleichungen:

$$\overline{\frac{d^2f_1}{dt^2}} = 0, \overline{\frac{d^2f_2}{dt^2}} = 0, \ldots\ldots \overline{\frac{d^2f_n}{dt^2}} = 0, \quad (b'')$$

welche man durch Differenzirung der Gleichungen (b') erhält, wenn man x, y, z, etc. als Functionen von t betrachtet, die Ableitungen der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}, \text{etc.}$$

u. s. f. Die Querstriche über den Größen (b'') sollen andeuten, daß die Zähler derselben Totaldifferenziale und keine partiellen Differenziale sind. (§. 118.)

Um die Begriffe besser zu fixiren, wollen wir annehmen, daß zwischen den drei Veränderlichen x, y, z die beiden Gleichungen:

$$f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0,$$

habe und daß x zur unabhängigen Veränderlichen genommen werde; so gibt eine erste Differenzirung:

$$\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy}y' + \frac{df_1}{dz}z' = 0,$$
$$\frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dy}y' + \frac{df_2}{dz}z' = 0.$$

woraus folgt:

$$y' = \left(\frac{df_1}{dx}\cdot\frac{df_2}{dz} - \frac{df_1}{dz}\cdot\frac{df_2}{dx}\right) : \left(\frac{df_1}{dy}\cdot\frac{df_2}{dz} - \frac{df_1}{dz}\cdot\frac{df_2}{dy}\right)$$
$$z' = \left(\frac{df_1}{dy}\cdot\frac{df_2}{dx} - \frac{df_1}{dx}\cdot\frac{df_2}{dy}\right) : \left(\frac{df_1}{dy}\cdot\frac{df_2}{dz} - \frac{df_1}{dx}\cdot\frac{df_2}{dy}\right).$$

Eine zweite Differenzirung führt auf die Gleichungen der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2f_1}{dx^2} + 2\frac{d^2f_1}{dxdy}y' + 2\frac{d^2f_1}{dxdz}z' + 2\frac{d^2f_1}{dydz}y'z'$$
$$+ \frac{d^2f_1}{dy^2}y'^2 + \frac{d^2f_1}{dz^2}z'^2 + \frac{df_1}{dy}y'' + \frac{df^2}{dz}z'' = 0,$$

$$\frac{d^2f_1}{dx^2} + 2\frac{d^2f_1}{dxdy}y' + 2\frac{d^2f_1}{dxdz}z' + 2\frac{d^2f_1}{dydz}y'z'$$
$$+ \frac{d^2f_1}{dy^2}y'^2 + \frac{d^2f_1}{dz^2}z'^2 + \frac{df_1}{dy}y'' + \frac{df_1}{dz}z'' = 0,$$

welche die Werthe von y'', z'' als Functionen von x, y, z geben, nachdem man die aus den vorhergehenden Gleichungen abgeleiteten Werthe von y', z' substituirt hat. Alsdann kann man die Elimination von y, z, vermittelst der beiden gegebenen Gleichungen vornehmen, so daß man zwei Endgleichungen, die eine mit x, y'' und die andere mit y, z'' erhält.

Ebenso könnte man die Differenzialcoefficienten y''', z''', u. s. f. bestimmen.

§. 133. Wir wollen nun zu dem Falle übergehen, wo die Anzahl der Gleichungen zwischen den Veränderlichen mehrere der letzteren unbestimmt läßt, und um den einfachsten Fall zu betrachten, wollen wir annehmen, daß man zwischen den drei Veränderlichen x, y, z die eine Gleichung:

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (c)$$

habe, so ergibt sich daraus wieder die Gleichung:

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0, \qquad (c')$$

wodurch die Totaldifferenziale der Veränderlichen x, y, z mit einander verbunden sind. Aber im Allgemeinen will man die partiellen Ableitungen der Veränderlichen berechnen, welche man als Function betrachtet, und zwar in Beziehung auf jede der unabhängigen Veränderlichen (§. 118). Diese partiellen Ableitungen ergeben sich aus der vorhergehenden Gleichung, nachdem man bestimmt hat, welche der Veränderlichen als unabhängig behandelt werden sollen. Wir wollen annehmen, daß x und y die unabhängigen Veränderlichen sind, und setzen (§. 124):

$$dz = pdx + qdy,$$

so verwandelt sich die Gleichung (c') in:

$$\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p\right)dx + \left(\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q\right)dy = 0,$$

und da sie stattfinden muß, was für ein Verhältniß die Veränderungen dx, dy auch zu einander haben mögen, so zerfällt sie in die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q = 0, \qquad (d)$$

woraus sich die Werthe von p, q im Allgemeinen als Functionen von x, y, z ergeben, und man kann alsdann z vermittelst der Gleichung (c) fortschaffen.

Wenn man die Gleichung (c') differenzirt, indem man x und y als unabhängige Veränderliche und folglich dx, dy als constante Factoren behandelt, so erhält man:

$$d^2f = \frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2f}{dz^2}dz^2$$
$$+ 2\left(\frac{d^2f}{dxdy}dxdy + \frac{d^2f}{dxdz}dxdz + \frac{d^2f}{dydz}dydz\right) + \frac{df}{dz}d^2z = 0. \qquad (c'')$$

Für das Totaldifferenzial d^2z hat man den conventiellen Ausdruck (§. 124):

$$d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2,$$

und wenn man denſelben, ſo wie den des Totaldifferenziales dz in die Gleichung (c'') ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$\left(\frac{df}{dz}r + \frac{d^2f}{dz^2}p^2 + 2\frac{d^2f}{dxdz}p + \frac{d^2f}{dx^2}\right)dx^2$$
$$+ 2\left(\frac{df}{dz}s + \frac{d^2f}{dydz}p + \frac{d^2f}{dxdz}q + \frac{d^2f}{dz^2}pq + \frac{d^2f}{dxdy}\right)dxdy$$
$$\left(\frac{df}{dz}t + \frac{d^2f}{dz^2}q^2 + 2\frac{d^2f}{dydz}q + \frac{d^2f}{dy^2}\right)dy^2 = 0.$$

Da dieſe Gleichung unabhängig von den willkührlichen Factoren dx, dy, ſtattfinden muß, ſo zerfällt ſie in drei andere Gleichungen, welche nach der Subſtitution der aus den Gleichungen (d) abgeleiteten Werthe von p, q in folgende übergehen:

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^3 r - 2\frac{d^2f}{dxdz}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2}\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \frac{d^2f}{dx^2}\cdot\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^3 s - \frac{df}{dz}\cdot\left(\frac{d^2f}{dydz}\cdot\frac{df}{dx} + \frac{d^2f}{dxdz}\cdot\frac{df}{dy}\right)$$
$$+ \frac{d^2f}{dxdy}\cdot\left(\frac{df}{dz}\right)^2 + \frac{d^2f}{dz^2}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dy} = 0,$$

$$\left(\frac{df}{dz}\right)t - 2\frac{d^2f}{dydz}\cdot\frac{df}{dy}\cdot\frac{df}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2}\cdot\left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = 0.$$

Man gelangt auf einem directeren Wege zu demſelben Reſultate, wenn man bemerkt, daß man, da die Gleichungen (d) für jeden Werth von x und y ſtattfinden müſſen, die Ableitungen ihrer erſten Glieder, ſucceſſive in Beziehung auf x und auf y genommen, gleich Null ſetzen kann und einerſeits nicht vergißt, daß die partiellen Ableitungen:

$$\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$$

im Allgemeinen die drei Veränderlichen x, y, z enthalten und andererſeits, daß z, p, q unentwickelte Functionen von x, y ſind, ſo daß man hat:

$$\frac{dz}{dx} = p, \frac{dz}{dy} = q, \frac{dp}{dx} = r, \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s, \frac{dq}{dy} = t.$$

Auf dieſe Weiſe erhält man vier Gleichungen; denn die Gleichungen (d) laſſen ſich folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{\overline{df}}{dx} = 0, \frac{\overline{df}}{dy} = 0,$$

wo die oberen Querſtriche andeuten, daß man die Function f in Beziehung auf x oder auf y differenzirt hat, indem nicht blos auf die explicite in der Function f vorkommenden Veränderlichen x, y, ſondern auch auf die Veränderliche z Rückſicht genommen iſt, welche vermöge der Gleichung (c) implicite von x und y abhängt. Demnach muß die Ableitung der erſten der Gleichungen (d) in Beziehung auf y mit der Ableitung der zweiten dieſer Gleichungen in Beziehung auf x identiſch ſein, indem beide nach derſelben Bezeichnung durch:

$$\frac{d^2f}{dxdy} = 0$$

ausgedrückt werden können.

Ebenſo könnte man die partiellen Ableitungen der höhern Ordnungen für die Functionen von einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher, welche durch irgend eine Anzahl von Gleichungen mit einander verbunden ſind, beſtimmen, ohne daß ſich eine andere Schwierigkeit, als die Weitläufigkeit der Rechnungen darbieten könnte.

§. 134. Wir haben ſchon mehrere Male den Satz in Erinnerung gebracht, daß eine entwickelte oder unentwickelte algebraiſche Function, welche, ſo wie alle ihre ſucceſſiven Ableitungen für einen beſonderen Werth der unabhängigen Veränderlichen verſchwindet, identiſch gleich Null iſt. Dieſer Satz, welchen man für jede Art von Functionen ſtillſchweigend als wahr anzunehmen pflegt, muß jedoch ſtreng bewieſen werden, um ſo mehr, da derſelbe für nichtalgebraiſche Functionen nicht allgemein gültig iſt. Nun läßt ſich aber dieſer Satz ſehr leicht beweiſen, ſobald man die Regel für die Differenzirung der unentwickelten Functionen (Gleichungen) aufgeſtellt hat.

Denn es ſei y eine Function von x, welche durch die algebraiſche Gleichung:

$$f(x, y) = Y_n x^n + Y_{n-1} x^{n-1} + ... + Y_2 x^2 + Y_1 x + Y_0 = 0, \quad (g)$$

beſtimmt wird, worin die Coefficienten Y_n, etc., ganze Polynome von y bezeichnen; ſo kann man, der Allgemeinheit des Beweiſes unbeſchadet, annehmen, daß Null der Werth von x iſt, welcher y, y', y'', etc. verſchwinden macht. Soll aber y mit x zugleich verſchwinden, ſo muß Y_0 von der Form $Y_0 y$ ſein, wo Y_0 ein anderes Polynom mit y bezeichnet. Wir wollen dieſen Werth von Y_0 in die Gleichung (g) ſubſtituiren und dann differenziren, ſo kommt:

$$nY_n x^{n-1} + (n-1)\,Y_{n-1} x^{n-2} + ... + 2\,Y_2 x + Y_1$$
$$+ y'(Y'_n x^n + Y'_{n-1} x^{n-1} + ... + Y'_2 x + Y_{,1} x + Y_0 + Y'_0 y) = 0.$$

Für $x = 0$ hat man nach der Vorausſetzung $y = 0$ und dieſe Gleichung reducirt ſich auf:

$$Y_1 + y' Y_0 = 0.$$

Aber nach der Vorausſetzung muß ſich aus der vorhergehenden Gleichung auch $y' = 0$ ergeben, und folglich iſt Y_1 durch y theilbar und von der Form $Y_1 y$.

Wenn man von der Gleichung (g) die zweite Ableitung nimmt, ſo erhält man:

$$n(n-1)Y_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)Y_{n-1} x^{n-3} + ... + 2Y_2$$
$$+ 2y'[nY'_n x^{n-1} + (n-1)Y'_{n-1} x^{n-2} + ... + 2Y'_2 x + Y_1 + Y'_1 y]$$
$$+ y'^2[Y''_n x^n + Y''_{n-1} x^{n-1} + ... + Y''_2 x^2 + Y''_1 x + 2Y'_0 + Y''_0 y]$$
$$+ y''[Y'_n x_n + Y'_{n-1} x^{n-1} + ... + Y'_2 x^2 + Y'_1 x + Y_0 + Y'_0 y] = 0.$$

Wenn man zugleich $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$ ſetzt, ſo reducirt ſich dieſe Gleichung auf:

$$2Y_2 + y'' Y_0 = 0;$$

wenn alſo y'' zu gleicher Zeit verſchwinden ſoll, ſo muß Y_2 die Form $Y_2 y$ haben, und wenn man ſo weiter ſchließt, ſo kann man beweiſen, daß y ein gemeinſchaftlicher Factor aller Glieder der Gleichung (g) iſt, woraus ſich folglich $y = 0$ ergibt, welchen Werth x auch haben mag, wodurch der ausgeſprochene Satz bewieſen iſt.

Hieraus folgt, wie bereits in §. 37 und §. 103 bemerkt iſt, daß eine Function, welche in einem Theile ihres Laufes durch die algebraiſche Function fx und in einem andern Theile durch eine andere, nicht mit der erſten identiſche Function f_1x ausgedrückt wird, nothwendig eine Stetigkeitsunterbrechung von einer niedrigen oder höhern Ordnung für den Werth von x erfährt, welcher der Wiedervereinigung der Functionen f, f_1 entſpricht; denn ſonſt würde die algebraiſche Function:

$$y = fx - f_1x,$$

ſo wie alle ihre Ableitungen bis ins unendliche verſchwinden, ohne identiſch Null zu ſein, was dem eben bewieſenen Satze zuwider ſein würde.

§. 135. Wir haben in §. 70 angenommen, und man nimmt es gewöhnlich an, aber ohne formellen Beweis, daß die Function:

$$\log. x = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

eine irreductibele transcendente Function iſt, welche ſich durch keine entwickelte oder unentwickelte algebraiſche Function ausdrücken läßt; aber erſt Liouville hat dieſen wichtigen Satz auf folgende ſehr einfache Art bewieſen. *)

Wenn $\log. x$ durch eine entwickelte algebraiſche Function $\frac{X}{X_1}$ ausgedrückt werden könnte, worin X, X_1 ganze poſitive Polynome bezeichnen, welche als prim unter ſich vorausgeſetzt werden können; ſo erhielte man durch Differenzirung:

$$\frac{1}{x} = \frac{X'X_1 - XX'_1}{X_1^2}, \text{ oder } \frac{X_1^2}{x} = X'X_1 - XX'_1,$$

woraus folgt, daß X_1 durch x theilbar iſt; aber X nicht, weil ſonſt X nicht zu X_1 prim wäre. Man kann alſo ſetzen:

$$X_1 = x^n\Xi, \text{ folglich } X'_1 = nx^{n-1}\Xi + x^n\Xi'$$

wo Ξ ein nicht durch x theilbares Polynom bezeichnet und n einen ganzen poſitiven Exponenten. Man erhält alſo die Gleichung:

$$x^{2n-1}\Xi^2 = x^n\Xi X' - nx^{n-1}\Xi X - x^n\Xi' X,$$

oder:

$$n\Xi X = x(\Xi X' - \Xi' X) - x^n\Xi^2,$$

welche ungereimt iſt, weil der zweite Theil derſelben durch x theilbar iſt, aber der erſte nicht.

Wir wollen nun annehmen, daß die Function $y = \log. x$ implicite durch die algebraiſche Gleichung:

$$f(x, y) = X_n y^n + X_{n-1}y^{n-1} + \ldots + X_1 y + X_0 = 0 \qquad (h)$$

beſtimmt werden könne, wo die Coefficienten X_n, etc. ganze Polynome von x bezeichnen; ſo hätte man:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' = 0$$

*) Journal de Mathématiques, t. II. p. 66.

und wenn man für y' seinen durch die Differenzirung der logarithmischen Function gegebenen Werth setzt:

$$x\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}=0. \qquad (i)$$

Wenn nun aber eine der Wurzeln der Gleichung (i), welche als irreductibel, d. h. als nicht in rationale Factoren von x zerlegbar vorausgesetzt ist, die Eigenschaft hat, die Gleichung (h) identisch zu machen, so wird diese Gleichung, deren erster Theil eine rationale Function von x ist, auch durch alle übrigen Wurzeln der Gleichung (i) identisch gemacht. Wenn man also diese Wurzeln, welche im Allgemeinen eben so viele verschiedene Functionen von x sind, resp. mit $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ bezeichnet, so hat man:

$$\frac{dx}{x}=dy_1,\ \frac{dx}{x}=dy_2,\ \ldots\ldots\ \frac{dx}{x}=dy_n,$$

und folglich:

$$\frac{dx}{x}=\frac{1}{n}d(y_1+y_2+\ldots\ldots+y_n)=-\frac{1}{n}d\left(\frac{X_{n-1}}{X_n}\right),$$

was, wie eben bewiesen worden, unmöglich ist.

Die Transcendente e^x läßt sich ebenfalls durch keine algebraische Function ausdrücken; denn die Gleichung $f(x, e^x)=0$, wo f eine algebraische Function bezeichnet, ist gleichbedeutend mit der Gleichung $f(\log.\ y, y)=0$, deren Unmöglichkeit eben bewiesen ist.

Dagegen bilden die Sinus, Cosinus und Kreisbogen keine irreductibelen Transcendenten, weil sich dieselben in Exponentialgrößen und Logarithmen verwandeln lassen, indem man imaginäre Wurzelgrößen anwendet, wodurch, aus einem algebraischen Gesichtspunkte betrachtet, die Natur der Function nicht geändert wird.

Die Potenzen mit irrationalen Exponenten bilden ebenfalls keine irreductibelen Transcendenten, weil der Ausdruck $y=x^\alpha$ gleichbedeutend ist mit $y=e^{\alpha\log.x}$, und sich also die durch x^α angedeutete Operation an x, wo α eine Irrationalzahl bezeichnet, durch die durch das Zeichen $\log.\ x$ angedeutete Operation und durch die durch das Zeichen e^u angedeutete Operation an e^u verrichten läßt.

Es bliebe nun noch zu beweisen übrig, daß die Functionen e^α, $\log.x$ auch irreductibel unter sich sind; allein da dieser Beweis complicirter ist als die vorhergehenden, so verweisen wir auf die Abhandlung von Liouville selbst.

Im Allgemeinen schließt sich der Beweis der Irreductibilität der verschiedenen transcendenten Functionen an die Untersuchungen über die Theilbarkeit der Zahlen und über die algebraische Zerlegbarkeit der Gleichungen an, und alle diese Untersuchungen haben das mit einander gemein, daß dadurch mehr die Theorie, als die Fortschritte der Methoden vervollkommnet werden, worauf die Anwendungen des Calculs beruhen. Da bei diesen Untersuchungen die Beweise fast immer durch die Zurückführung auf das Absurde geführt werden, so stößt man dabei auch auf die Schwierigkeiten und Complicationen einer Beweisart, welche zwar logisch streng ist, aber welche über den rationalen Zusammenhang und über die Erzeugung oder den Grund der bewiesenen Wahrheiten keinen Aufschluß gibt.

II. Vertauſchung der Veränderlichen.

§. 136. Es iſt hier der Ort, die Vertauſchung der unabhängigen Veränderlichen, welche wir bei der Auseinanderſetzung der Principien der Theorie der Ableitungen und der Differenziale (§. 39 und §. 56) nur angedeutet haben, allgemein zu behandeln.

Wir wollen annehmen, daß, wenn y als Function der unabhängigen Veränderlichen x betrachtet wird, dieſe Function und ihre Ableitungen der verſchiedenen Ordnungen in einer Gleichung:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots\right) = 0 \qquad (f)$$

vorkommen, und es darauf ankommt, zu wiſſen, wie die Ableitungen:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots$$

als Functionen einer dritten unabhängigen Veränderlichen t, welche mit x und y durch eine gegebene Gleichung:

$$\varphi(x, y, t) = 0 \qquad (\varphi)$$

verbunden iſt, ausgedrückt werden müſſen.

Wenn man die Gleichung (φ) in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche t differenzirt, ſo erhält man eine Reihe von abgeleiteten Gleichungen:

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = 0 \qquad (\varphi')$$

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\cdot\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\cdot\frac{dy^2}{dt^2}$$
$$+ 2\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dx\,dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dy\,dt}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \qquad (\varphi'')$$

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^3y}{dt^3} + \text{etc.} = 0, \qquad (\varphi''')$$

etc.

Aber andererſeits hat man auch:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt},$$

woraus folgt:

$$\frac{dy'}{dt} = y''\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

und folglich:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3.$$

Durch dieſelbe Rechnung findet man:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt} + 3\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}\right] : \left(\frac{dx}{dt}\right)^5,$$

u. ſ. f.

Vermittelſt der Gleichungen (φ), (φ'), (φ''), etc. kann man aus den vorhergehenden Formeln die Veränderliche x und ihre Ableitungen:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}, \ldots\ldots$$

fortſchaffen, ſo daß die Formel (f), nachdem man die Werthe von:

$$x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots$$

ſubſtituirt hat, nur noch die Größen:

$$t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}, \ldots\ldots$$

enthält, und ebenſo könnte man ſie darauf zurückführen, daß ſie nur noch die Größen:

$$t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}, \ldots\ldots$$

enthielte.

§. 137. Die Vertauſchung der unabhängigen Veränderlichen iſt nur ein beſonderer Fall der Vertauſchung der Veränderlichen überhaupt. Wenn man für die beiden in der Gleichung (f) vorkommenden veränderlichen Größen x, y zwei andere veränderliche Größen v, t ſubſtituiren will, welche mit den erſten durch die beiden Gleichungen:

$$\varphi(x, y, v, t) = 0, \quad \psi(x, y, v, t) = 0$$

verbunden ſind, wo t die unabhängige Veränderliche bezeichnet; ſo nimmt man von dieſen beiden letzten Gleichungen die ſucceſſiven Ableitungen, indem man x, y, v als unentwickelte Functionen von t betrachtet, wodurch man eine Reihe von Gleichungen erhält, welche wir der Kürze wegen mit:

$$(\varphi'), (\psi'), (\varphi''), (\psi''), (\varphi'''), (\psi'''), \text{ etc.}$$

bezeichnen wollen. Die Anzahl dieſer Gleichungen iſt $= 2n$, wenn $\frac{d^ny}{dx^n}$ der höchſte in der Gleichung (f) vorkommende Differenzialcoefficient iſt. Vermittelſt dieſer $2n$ Gleichungen drückt man alsdann in Verbindung mit den beiden Gleichungen, wovon ſie abgeleitet ſind, die Größen:

$$x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots\ldots \frac{d^nx}{dt^n}; \quad y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dt^n} \qquad (1)$$

als Functionen von:

$$t, v, \frac{dv}{dt}, \frac{d^2v}{dt^2}, \ldots\ldots \frac{d^nv}{dt^n} \qquad (2)$$

aus, und ſubſtituirt die erhaltenen Ausdrücke in die Werthe von:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

als Functionen der Größen (1); ſo erhält man endlich die Formel (f) vermittelſt der Größen (2) ausgedrückt.

§. 138. Um die Allgemeinheit dieſes Verfahrens zu zeigen, brauchen wir es nur auf den Fall zweier unabhängiger Veränderlicher anzuwenden. Es ſei daher:

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \ldots\ldots\right) = 0 \qquad (F)$$

eine Gleichung, worin man für die drei Veränderlichen x, y, z drei andere Veränderliche u, v, t ſetzen will, wo die beiden letzten als unabhängige Veränderliche behandelt werden und alle drei mit x, y, z durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x, y, z, u, v, t) = 0,\ \psi(x, y, z, u, v, t) = 0,\\ \tilde{\omega}(x, y, z, u, v, t) = 0.\end{array}\right\} \qquad (\Phi)$$

verbunden ſind, ſo hat man:

$$\frac{dz}{dv} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dv} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dv},\quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dv^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{dv} + \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dv^2} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dv^2},$$

$$\frac{d^2z}{dvdt} = \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d^2z}{dxdy}\left(\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dv}\right) + \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{dz}{dv}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dvdt} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dvdt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dt^2},$$

etc.

Aus dieſen Formeln leitet man die partiellen Ableitungen:

$$\frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{dy},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dxdy},\ \frac{d^2z}{dy^2},\ \text{etc.}, \qquad (3)$$

als Functionen von:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{dx}{dv},\ \frac{dy}{dv},\ \frac{dz}{dv},\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\\ \frac{d^2x}{dv^2},\ \frac{d^2y}{dv^2},\ \frac{d^2z}{dv^2},\ \frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}\\ \frac{d^2x}{dvdt},\ \frac{d^2y}{dvdt},\ \frac{d^2z}{dvdt},\ \text{etc.}\end{array}\right\} \qquad (4)$$

ausgedrückt, ab.

Aber wenn man andererſeits die Gleichungen (Φ) ſucceſſive in Beziehung auf v und in Beziehung auf t differenzirt und bis zu den Differenzialen von derſelben Ordnung, als die höchſten in der Gleichung (F) vorkommenden Ableitungen fortgeht; ſo erhält man ſo viele Gleichungen, als erforderlich ſind, um die Größen (4) und folglich die Größen (3) als Functionen von:

$$\frac{du}{dv},\ \frac{du}{dt},\ \frac{d^2u}{dv^2},\ \frac{d^2u}{dvdt},\ \frac{d^2u}{dt^2},\ \text{etc.}$$

auszudrücken. *)

*) Wir wollen das vorhin Geſagte durch ein Beiſpiel erläutern, welches in der Mechanik und in der mathematiſchen Phyſik häufig vorkommt.

Drittes Kapitel.

Beſtimmung des Werthes der entwickelten und unentwickelten Functionen von mehreren veränderlichen Größen, wenn dieſe Functionen unter unbeſtimmten Formen erſcheinen. — Theorie der Maxima und Minima dieſer Functionen.

I. Beſtimmung des Werthes der entwickelten Functionen von mehreren veränderlichen Größen, wenn dieſe Functionen unter unbeſtimmten Formen erſcheinen.

§. 139. Wenn Functionen von einer einzigen unabhängigen Veränderlichen für beſondere Werthe dieſer letztern unter den unbeſtimmten Formen:

$$\frac{0}{0}, \pm\frac{\infty}{\infty},$$

erſcheinen, ſo wird der Werth ſolcher Functionen nach den in Kap. 3 des vorhergehenden Buches angegebenen Verfahrungsarten beſtimmt; aber wenn eine Function z von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y unter einer dieſer unbeſtimmten Formen für ein Werthepaar der Veränderlichen x und y erſcheint,

---

Es ſeien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes und r, ω, ψ die Polarcoordinaten deſſelben, ſo hat man bekanntlich zwiſchen dieſen ſechs Veränderlichen die folgenden drei Gleichungen:

$$z = r\cos.\omega, \quad y = r\sin.\omega\sin.\psi, \quad x = r\sin.\omega\cos.\psi,$$

und vermittelſt des vorhin angegebenen Verfahrens findet man:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\sin.\omega\cos.\psi + \frac{du}{d\omega}\frac{\cos.\omega\cos.\psi}{r} - \frac{du}{d\psi}\frac{\sin.\psi}{r\sin.\omega},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\sin.\omega\sin.\psi + \frac{du}{d\omega}\frac{\cos.\omega\sin.\psi}{r} + \frac{du}{d\psi}\frac{\cos.\psi}{r\sin.\omega},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr}\cos\omega - \frac{du}{d\omega}\frac{\sin.\omega}{r},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin.^2\omega\sin.\psi\cos.\psi + \frac{d^2u}{d\omega^2}\frac{\cos.^2\omega\sin\psi\cos.\psi}{r^2} - \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{r^2\sin.^2\omega}$$
$$+ 2\frac{d^2u}{d\omega dr}\frac{\sin.\omega\cos.\omega\sin.\psi\cos.\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi dr}\left(\frac{\cos.^2\psi - \sin.^2\psi}{r}\right)$$
$$+ \frac{d^2u}{d\psi\,d\omega}\frac{(\cos.^2\psi - \sin.^2\psi)\cos.\omega}{r^2\sin.\omega} - \frac{du}{dr}\frac{\sin.^2\omega\sin.\psi\cos.\psi}{r}$$
$$- \frac{du}{d\omega}\frac{\cos.\omega\sin.\psi\cos.\psi}{r^2}\left(2\sin.\omega + \frac{1}{\sin.\omega}\right) + \frac{du}{d\psi}\left(\frac{\sin.^2\psi - \cos.^2\psi}{r^2\sin.^2\omega}\right),$$

$$\frac{d^2u}{dxdz} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin.\omega\cos.\omega\cos.\psi - \frac{d^2u}{d\omega^2}\frac{\sin.\omega\cos.\omega\sin.\psi}{r^2}$$
$$+ \frac{d^2u}{d\omega dr}\frac{(\cos.^2\omega - \sin.^2\omega)\cos.\psi}{r} - \frac{d^2u}{d\psi dr}\frac{\sin.\psi\cos.\omega}{r\sin.\omega} + \frac{d^2u}{d\omega d\psi}\frac{\sin.\psi}{r^2}$$
$$+ \frac{du}{d\omega}\frac{(\sin.^2\omega - \cos.^2\omega)\cos.\psi}{r^2} - \frac{du}{dr}\frac{\sin.\omega\cos.\omega\cos.\psi}{r},$$

ſo kann man den Zahlenwerth der Function durch die erwähnte Methode erſt dann beſtimmen, nachdem man einen willkührlichen Zuſammenhang oder eine willkührliche Relation zwiſchen den beiden unabhängigen Veränderlichen angenommen hat, und der für z erhaltene Zahlenwerth ändert ſich im Allgemeinen mit der zwiſchen y und x aufgeſtellten Relation. Man kann daher, ſo lange x und y unabhängig bleiben, die Unbeſtimmtheit der Function z nicht abſolut beſeitigen, ſondern blos im Allgemeinen Grenzen angeben, zwiſchen welchen der Werth von z liegen muß.

Es ſei:

$$z = \frac{f(x, y)}{F(x, y)},$$

und x_0, y_0 ſeien die Werthe von x, y, welche die Functionen f und F gleichzeitig verſchwinden machen. Mit p_0, q_0, r_0, etc. wollen wir die Werthe bezeichnen, welche die partiellen Ableitungen p, q, r, etc. der Function f annehmen, wenn man darin $x = x_0$, $y = y_0$ ſetzt (§. 124) und P_0, Q_0, R_0, etc. ſeien die analogen Größen für die Function F. Endlich bezeichne y_0' den Werth, welchen das ſich aus der zwiſchen y und x aufgeſtellten willkührlichen Relation ergebende Verhältniß $y' = \frac{dy}{dx}$ für daſſelbe Werthſyſtem von x und y annimmt; ſo wird der Werth z_0 von z ausgedrückt durch:

$$\frac{d^2u}{dydz} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin.\omega\cos.\omega\sin.\psi - \frac{d^2u}{d\omega^2}\frac{\sin.\omega\cos.\omega\sin.\psi}{r^2}$$
$$+ \frac{d^2u}{d\omega dr}\frac{(\cos.^2\omega - \sin.^2\omega)\sin.\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi dr}\frac{\cos.\psi\cos.\omega}{r\sin.\omega} - \frac{d^2u}{d\omega d\psi}\frac{\cos.\psi}{r^2}$$
$$+ \frac{du}{d\omega}\frac{(\sin.^2\omega - \cos.^2\omega)\sin.\psi}{r^2} - \frac{du}{dr}\frac{\sin.\omega\cos.\omega\sin.\psi}{r},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin.^2\omega\cos.^2\psi + \frac{d^2u}{d\omega^2}\frac{\cos.^2\omega\cos.^2\psi}{r^2} + \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\sin.^2\psi}{r^2\sin.^2\omega}$$
$$+ 2\frac{d^2u}{d\omega dr}\frac{\sin.\omega\cos.\omega\cos.^2\psi}{r} - 2\frac{d^2u}{d\psi dr}\frac{\sin.\psi\cos\psi}{r}$$
$$- 2\frac{d^2u}{d\omega d\psi}\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{r^2\tang.\omega} + \frac{du}{dr}\frac{\cos.^2\omega\cos.^2\psi + \sin.^2\psi}{r}$$
$$+ \frac{du}{d\omega}\cos.\omega\left(\frac{\sin.^2\psi - 2\sin.^2\omega\cos.^2\psi}{r^2\sin.\omega}\right) + 2\frac{du}{d\psi}\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{r^2\sin.^2\omega},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin.^2\omega\sin.^2\psi + \frac{d^2u}{d\omega^2}\frac{\cos.^2\omega\sin.^2\psi}{r^2} + \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\cos.^2\psi}{r^2\sin.^2\omega}$$
$$+ 2\frac{d^2u}{d\omega dr}\frac{\sin\omega\cos.\omega\sin.^2\psi}{r} + 2\frac{d^2u}{d\psi dr}\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{r}$$
$$+ 2\frac{d^2u}{d\omega d\psi}\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{r^2\tang.\omega} + \frac{du}{dr}\left(\frac{\cos.^2\omega\sin.^2\psi + \cos.^2\psi}{r}\right)$$
$$\frac{du}{d\omega}\cos.\omega\left(\frac{\cos.^2\psi - 2\sin.^2\omega\sin.^2\psi}{r^2\sin.\omega}\right) - 2\frac{du}{d\psi}\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{r^2\sin.^2\omega},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\cos.^2\omega + \frac{d^2u}{d\omega^2}\frac{\sin.^2\omega}{r^2} - 2\frac{d^2u}{d\omega dr}\frac{\sin.\omega\cos.\omega}{r} + \frac{du}{dr}\frac{\sin.^2\omega}{r}$$
$$+ 2\frac{du}{d\omega}\frac{\sin.\omega\cos.\omega}{r^2}.$$

3. d. Ueberſ.

$$z_0 = \frac{p_0 + q_0 y'_0}{P_0 + Q_0 y'_0}, \qquad (a)$$

und bleibt unter dieſer allgemeinen Form, wegen der Unbeſtimmtheit des Coefficienten y'_0 unbeſtimmt; aber wenn man zu gleicher Zeit:

$$p_0 = 0, \; P_0 = 0, \qquad (p)$$

oder:

$$q_0 = 0, \; Q_0 = 0, \qquad (q)$$

hätte, ſo verſchwände der Coefficient y'_0 und der Werth von z_0 bliebe nicht mehr unbeſtimmt.

Wenn endlich die beiden Syſteme von Gleichungen (p), (q) gleichzeitig ſtatt fänden, ſo müßte man von den Functionen f, F die Ableitungen der zweiten Ordnung nehmen, welche im Allgemeinen ausgedrückt werden durch:

$$r + 2sy' + ty'^2 + qy'',$$
$$R + 2Sy' + Ty'^2 + Qy'',$$

und ſich für $x = x_0$, $y = y_0$ vermöge der Gleichungen (q) auf:

$$r_0 + 2s_0 y'_0 + t_0 y'^2_0, \; R_0 + 2S_0 y'_0 + T_0 y'^2_0$$

reduciren, woraus folgt:

$$z_0 = \frac{r_0 + 2s_0 y'_0 + t_0 y'^2_0}{R_0 + 2S_0 y'_0 + T_0 y'^2_0}, \qquad (b)$$

und dieſer Werth iſt wegen der Unbeſtimmtheit des Coefficienten y'_0 im Allgemeinen unbeſtimmt.

Wenn ferner:

$$r_0 = 0, \; s_0 = 0, \; t_0 = 0; \; R_0 = 0, \; S_0 = 0, \; T_0 = 0,$$

wäre, ſo müßte man zu den Ableitungen der dritten Ordnung übergehen, u. ſ. f. Dieſes Verfahren läßt ſich leicht auf eine beliebige Anzahl unabhängiger veränderlicher Größen erſtrecken.

Beiſpiel 1. Es ſei:

$$z = \frac{\log. x + \log. y}{x + 2y - 3}, \; x_0 = 1, \; y_0 = 1,$$

ſo kommt:

$$p_0 = 1, \; q_0 = 1, \; P_0 = 1, \; Q_0 = 2,$$

woraus folgt:

$$z_0 = \frac{1 + y'_0}{1 + 2y'_0},$$

und z_0 kann alle Werthe zwiſchen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen.

Beiſpiel 2. Es ſei:

$$z = \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} - 1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}} - y + 1}; \; x_0 = 1, \; y_0 = 1,$$

ſo hat man:

$$p_0 = 0, \; q_0 = \frac{3}{2}, \; P_0 = 0, \; Q_0 = -1,$$

und z_0 bekommt den beſtimmten Werth $-\frac{3}{2}$.

Beiſpiel 3. Es ſei:

$$z = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2};\ x_0 = 0,\ y_0 = 0,$$

ſo geſchieht den Gleichungen (p) und (q) Genüge. Man muß daher zu den Ableitungen der zweiten Ordnung übergehen und man erhält:

$$r_0 = 2,\ s_0 = 2,\ t_0 = 2,\ R_0 = 2,\ S_0 = 0,\ T_0 = 2,$$

woraus folgt:

$$z_0 = \frac{(1+y'_0)^2}{1+y'^2_0}.$$

Der Werth von z_0 liegt, obgleich er unbeſtimmt iſt, zwiſchen den Grenzen 0 und + 2, wie man fände, wenn man auf dieſe Function von y'_0 die gewöhnliche Regel für die Beſtimmung der Maxima und Minima anwendete.

§. 140. Die eben auseinandergeſetzte Methode kann unbrauchbar werden, wenn die Functionen p_0, q_0, P_0, Q_0, etc. unendlich werden, oder ſelbſt unter unbeſtimmten Formen erſcheinen, und alsdann muß man zu beſondern Rechnungskunſtgriffen ſeine Zuflucht nehmen. Wir wollen z. B. die Function:

$$z = y\sqrt{x^2+y^2}$$

betrachten, deren partielle Ableitungen der erſten und zweiten Ordnung folgende ſind:

$$p = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ q = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$r = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ s = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ t = \frac{2y^3+3yx^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für die Werthe $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ verſchwindet die Function z und ihre partiellen Ableitungen erſcheinen unter der Form $\frac{0}{0}$. Ferner überzeugt man ſich leicht, daß ſich die wahren Werthe der Größen p, q, r, s, t nach der vorhergehenden Methode nicht würden beſtimmen laſſen; aber wenn man ein Syſtem ſehr nahe liegender Werthe betrachtet, für welches:

$$x = x_0 + \Delta x_0 = \Delta x_0,$$
$$y = y_0 + \Delta y_0 = \Delta y_0,$$

iſt, und wenn man $\Delta y_0 = \alpha \Delta x_0$ ſetzt, ſo kommt:

$$p_0 = \Delta x_0 \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}},\ q = \Delta x_0 \cdot \frac{1+2\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$r_0 = \frac{\alpha^3}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},\ s_0 = \frac{1}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},\ t_0 = \frac{2\alpha^3+3\alpha}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun kann man Δx_0 gegen die Grenze Null convergiren laſſen, und da ſich α an dieſer Grenze in y'_0 verwandelt; ſo hat man:

$$p_0 = 0,\ q_0 = 0,$$

$$r_0 = \frac{y'^3_0}{(1+y'^2_0)^{\frac{3}{2}}},\ s_0 = \frac{1}{(1+y'^2_0)^{\frac{3}{2}}},\ t_0 = \frac{2y'^3_0+3y'_0}{(1+y'^2_0)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Werthe von r_0, s_0, t_0, bleiben unbeſtimmt, aber liegen immer zwiſchen gewiſſen Grenzen, welche für

r_0 ſind -1 und $+1$, und entſprechen $y'_0 = -\infty$, $y'_0 = +\infty$;
s_0 „ 0 „ $+1$, „ „ „ $y'_0 = \pm\infty$, $y'_0 = 0$;
t_0 „ -2 „ $+2$, „ „ „ $y'_0 = -\infty$, $y'_0 = +\infty$.

II Beſtimmung des Werthes der unentwickelten Functionen, wenn ſie unter unbeſtimmten Formen erſcheinen.

§. 141. Es ſei:

$$f(x, y) = 0 \qquad (c)$$

eine Gleichung, welche y implicite als Function von x beſtimmt, und wir wollen ſetzen:

$$\frac{df(x, y)}{dx} = f'(x, y), \quad \frac{df(x, y)}{dy} = f_1(x, y).$$

Wenn der erſte Theil der Gleichung (c) für $x = x_0$ verſchwindet, was y auch für einen Werth haben mag, ſo kann man aus dieſer Gleichung nicht unmittelbar den entſprechenden Werth von y_0, welcher anſcheinend unbeſtimmt iſt, ableiten. In dieſem Falle verſchwindet die Function:

$$f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y)$$

für jeden Werth von y und Δy, und folglich verſchwindet die Function $f'(x_0, y)$ ebenfalls unabhängig von y. Mithin reducirt ſich die Ableitung der Gleichung (c), welche im Allgemeinen die Form:

$$f'(x, y) + y'f'(x, y) = 0$$

hat, für $x = x_0$ auf:

$$f'(x_0, y_0) = 0,$$

und aus dieſer letzten Gleichung zieht man den Werth von y_0. Wenn derſelben ebenfalls genügt würde, ſo müßte man zu der Gleichung:

$$f''(x_0, y_0) = 0$$

übergehen, u. ſ. f.

Es ſei z. B.:

$$f(x, y) = mx^2 - x + \log.(1 + xy) = 0, \quad x_0 = 0,$$

ſo iſt die abgeleitete Gleichung:

$$2mx - 1 + \frac{y + xy'}{1 + xy} = 0,$$

und ſie reducirt ſich für $x = 0$ auf:

$$-1 + y_0 = 0, \text{ oder } y_0 = 1.$$

Wir wollen ferner

$$f(x, y) = (y^2 - 1)x^2 - y[\log.(1 + x)]^2 = 0, \quad x_0 = 0$$

ſetzen, ſo iſt die erſte abgeleitete Gleichung:

$$\left\{2yx^2 - [\log.(1 + x)]^2\right\}y' + 2x(y^2 - 1) - 2y\frac{\log.(1 + x)}{1 + x} = 0,$$

und wenn wir das Glied mit y', welches für $x = 0$ verſchwinden muß, hinweglaſſen, ſo bleibt uns die Gleichung:

$$x(1 + x)(y^2 - 1) - y \log.(1 + x) = 0,$$

welcher noch unabhängig von y durch den Werth $x = 0$ Genüge geſchieht. Aber wenn man die zweite Ableitung:

$$[2yx(1+x) - \log.(1+x)]\,y' + (y^2-1)(1-2x) - \frac{y}{1+x} = 0$$

nimmt und darin $x = 0$ ſetzt, ſo ſind die zugehörigen Werthe von y die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$y^2 - y - 1 = 0.$$

§. 142. Wir wollen nun eine Differenzialgleichung:

$$f(x, y, y') = 0, \qquad (c')$$

betrachten und dieſelbe zunächſt auf die Form:

$$y' = \frac{f(x, y)}{F(x, y)}$$

gebracht annehmen. Durch x_0, y_0 wollen wir die Werthe von x, y bezeichnen, welche die Functionen f, F zugleich verſchwinden machen, und mit y'_0 den zugehörigen Werth von y'; ſo wird der Werth von y'_0 vermöge der Formel (a) durch die Gleichung des zweiten Grades:

$$y'_0 = \frac{p_0 + q_0 y'_0}{P_0 + Q_0 y'_0}, \text{ oder } Q_0 y'^2_0 + (P_0 - q_0) y'_0 - p_0 = 0$$

gegeben. Wenn außerdem die Gleichungen (p) und (q) erfüllt würden, ſo wäre der Werth von y'_0 nach der Formel (b) eine Wurzel der Gleichung des dritten Grades:

$$y'_0 = \frac{r_0 + 2s_0 y'_0 + t_0 y'^2_0}{R_0 + 2S_0 y'_0 + T_0 y'^2_0},$$

oder:

$$T_0 y'^3_0 - (2S_0 - t_0) y'^2_0 + (R_0 - 2s_0) y'_0 - r_0 = 0,$$

u. ſ. f.

Es kann jedoch geſchehen, daß der Werth von y'_0 wirklich unbeſtimmt iſt, was z. B. der Fall ſein würde, wenn die Gleichung:

$$Qy'^2 + (P - q) y' - p = 0$$

für alle Werthe von y' unabhängig von den x und y beigelegten Werthen erfüllt würde. Alsdann würde die Gleichung:

$$Ty'^3 + (2S - t) y'^2 + (R - 2s) y' - r = 0$$

und alle durch wiederholte Differenzirung davon abgeleiteten Gleichungen ebenfalls identiſch gemacht. Man fände z. B., daß der durch die Gleichung:

$$y' = \frac{y}{x}$$

gegebene Werth von y' für die Werthe $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ wirklich unbeſtimmt iſt.

Allgemein, wenn die beſonderen Werthe x_0, y_0 der Gleichung (c') unabhängig von y' genügen, ſo reducirt ſich die abgeleitete Gleichung:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' + \frac{df}{dy'} y'' = 0$$

für dieſelben Werthe auf:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 + \left(\frac{df}{dy}\right) y'_0 = 0 \qquad (c''_0)$$

weil der Ausdruck $\left(\frac{df}{dy'}\right)_0$, welcher den Werth von $\frac{df}{dy'}$ für $y' = 0$ ausdrückt, nach dem weiter oben Gesagten (§. 141) verschwinden muß. Die Functionen:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{df}{dy}\right)_0$$

müssen im Allgemeinen die drei Größen x_0, y_0, y'_0 enthalten, und folglich kann die Gleichung (c''_0) in Beziehung auf die Unbekannte y'_0 nicht linear sein.

Wir wollen annehmen, daß die Gleichung (c') in Beziehung auf y' algebraisch oder von der Form:

$$f_0(x, y) + f_1(x, y) \cdot y' + f_2(x, y) \cdot y'^2 + \text{etc.} = 0$$

sei, so verwandelt sich die Gleichung (c''_0) in folgende:

$$\left(\frac{df_0}{dx}\right) + \left(\frac{df_0}{dy} + \frac{df_1}{dx}\right)_0 y'_0 + \left(\frac{df_1}{dy} + \frac{df_2}{dx}\right)_0 y'^2_0 + \left(\frac{df_2}{dy}\right)_0 y_0'^3 + \text{etc.}$$

und ist folglich im Allgemeinen in Beziehung auf y'_0 von einem um eine Einheit höhern Grade, als die Gleichung (c') in Beziehung auf y'.

III. Bestimmung der Maxima und Minima der entwickelten Functionen von mehreren Veränderlichen.

§. 143. Wenn die Function zweier Veränderlichen:

$$z = f(x, y)$$

gegeben ist und man nimmt zwischen y und x eine willkührliche Relation an, so wird z eine Function der einzigen unabhängigen Veränderlichen x und man hat:

$$\frac{\overline{dz}}{dx} = p + qy',$$

$$\frac{\overline{d^2z}}{dx^2} = r + 2sy' + ty'^2 + qy''$$

$$\frac{\overline{d^3z}}{dx^3} = u + 3uy' + 3vy'^2 + wy'^3 + 3(s + ty')y'' + qy'''$$

etc.

Die Querstriche über den Differenzialen dz, d^2z, etc. sollen Totaldifferenziale andeuten; die Buchstaben p, q, r, etc. haben die in §. 124 angegebene Bedeutung und y', y'', y''', etc. bezeichnen, wie gewöhnlich, die Differenzialcoefficienten der Größe y, welche vermöge der zwischen y und x angenommenen willkührlichen Relation, als eine Function von x betrachtet wird. Hiernach hat man für die gemeinschaftliche Bedingungsgleichung des Maximums und Minimums (§. 91):

$$p + qy' = 0, \qquad (d)$$

und außerdem muß in dem Falle des Maximums die Ungleichheit:

$$r + 2sy' + ty'^2 + qy'' < 0 \qquad (d_1)$$

und in dem Falle des Minimums die entgegengesetzte Ungleichheit:

$$r + 2sy' + ty'^2 + qy'' > 0 \qquad (d_2)$$

erfüllt werden. Wenn man nun ausdrückt, daß diese Bedingungen unabhängig von der zwischen y und x willkührlich angenommenen Relation erfüllt werden;

ſo werden eben dadurch die Bedingungen des Maximums und Minimums der Function z in der Vorausſetzung der Unabhängigkeit der Veränderlichen x, y beſtimmt.

Soll aber die Gleichung (d) unabhängig von jeder Relation zwiſchen y und x erfüllt werden, ſo muß einzeln:

$$p = 0,\ q = 0 \qquad (e)$$

ſein, wodurch die Ungleichheiten (d_1) und (d_2) auf folgende reducirt werden:

$$r + 2sy' + ty'^2 < 0,$$
$$r + 2sy' + ty'^2 > 0.$$

Soll der gemeinſchaftliche erſte Theil dieſer beiden Ungleichheiten für jeden Werth von y' daſſelbe Zeichen behalten, ſo müſſen die Wurzeln der in Beziehung auf y' aufgelößten Gleichung:

$$r + 2sy' + ty'^2 = 0 \qquad (f)$$

imaginär ſein, wozu erfordert wird, daß die Bedingung:

$$s^2 - rt < 0 \qquad (g)$$

erfüllt wird, welches wieder erfordert, daß die Functionen r, t daſſelbe Zeichen haben, nachdem man die aus den Gleichungen (e) gezogenen Werthe von x, y ſubſtituirt hat. Wenn die Ungleichheit (g) durch dieſe Werthe erfüllt wird, ſo findet ein Maximum, oder Minimum ſtatt, je nachdem die Functionen r, t beide negativ oder poſitiv ſind.

§. 144. Die Theorie der Maxima und Minima der Functionen mit zwei unabhängigen Veränderlichen ergibt ſich ſehr einfach aus der Betrachtung der Niveaulinien (§. 127), deren Differenzialgleichung die Gleichung (d) iſt. Denn es iſt einleuchtend, daß die Niveaulinie in dem Punkte (x, y), für welchen die Function z ein Maximum oder Minimum iſt, verſchwinden oder vielmehr ſich auf einen iſolirten Punkt reduciren muß. Es wird alſo erfordert (wie wir ſpäter bei der Betrachtung der ſingulären Punkte ebener Curven näher zeigen werden), daß man aus der Gleichung:

$$y' = -\frac{p}{q} \qquad (d')$$

keinen reellen Werth von y' ableiten kann, obgleich die Werthe von p, q weder imaginär, noch unendlich ſind, weil ſonſt die Function z aufhörte, reell zu ſein, oder wenigſtens eine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung erführe. Der vorhergehende Werth von y' muß folglich unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$ erſcheinen, und man hat folglich für das Maximum, wie für das Minimum:

$$p = 0,\ q = 0.$$

Der wahre Werth von y' wird folglich nach dem weiter oben Geſagten (§. 142) durch die Gleichung:

$$y' = -\frac{r + sy'}{s + ty'},$$

welche von der Gleichung (f) nicht verſchieden iſt, gegeben, und damit man endlich aus dieſer Gleichung keine reellen Werthe für y' ableiten kann, muß die Ungleichheit (g) erfüllt werden.

Wenn man dagegen die Ungleichheit:

$$s^2 - rt > 0$$

hat, ſo ergeben ſich aus der Gleichung (f) zwei reelle Werthe von y', und der Punkt (x, y) iſt der Durchſchnittspunkt zweier Zweige mn, $n'mu'$ (Fig. 40) einer Niveaulinie, welche die Ebene der xy um den Punkt m herum in vier Regionen theilt, wovon in zwei derſelben der Werth von z von dem Punkte m aus zunimmt, während er in den beiden andern von demſelben Punkte aus abnimmt.

§. 145. Die Bedingungen (e) und (g) ſind die des abſoluten Maximums und Minimums. Wenn man zwiſchen y und x die Relation $y = \varphi x$ annimmt und in dieſer Vorausſetzung den Werth von x beſtimmt, welcher die Function z zu einem relativen Maximum oder Minimum macht, ſo iſt dieſer Werth die Abſciſſe des Punktes, wo die Linie $y = \varphi x$ von einer Niveaulinie berührt wird.

Im Allgemeinen verſteht man unter relativen Maximis und Minimis diejenigen, welche ſtattfinden, nachdem man zwiſchen den unabhängigen Veränderlichen willkührliche Beziehungen angenommen hat, wodurch die Anzahl derſelben vermindert wird.

§. 146. Gewöhnlich ſind die Coefficienten r, s, t der Gleichung (f) nur von den Veränderlichen x, y und nicht von y' abhängig; aber wenn es geſchieht, daß dieſe Coefficienten zufällig unter der Form $\frac{0}{0}$ erſcheinen, ſo kann es auch geſchehen, daß ſich ihre nach den im Anfange dieſes Kapitels angegebenen Verfahrungsarten gefundenen wahren Werthe mit y' ändern, und da alsdann die Gleichung (f) in Beziehung auf y' nicht mehr vom zweiten Grade iſt, ſo werden die vorhergehenden Schlüſſe unzuläſſig. Es ſei z. B.:

$$z = y\sqrt{x^2 + y^2},$$

ſo geſchieht nach §. 140 den Gleichungen (e) durch das Werthſyſtem $x = 0$, $y = 0$ Genüge, und die Gleichung (f) verwandelt ſich in folgende:

$$y'^5 + 2y'^3 + y' = 0.$$

Da dieſe Gleichung die reelle Wurzel $y' = 0$ hat, ſo entſpricht das Syſtem der eben angeführten Werthe keinem Maximum oder Minimum der Function z und in allen ſolchen Fällen hat man die Ungleichheit (g) nicht mehr zu betrachten.

§. 147. Wenn die Werthe von x, y, welche den Gleichungen (e) genügen, auch den Gleichungen:

$$r = 0,\ s = 0,\ t = 0, \qquad (e_1)$$

Genüge leiſten, ſo kann die Gleichung (f) nicht mehr den Werth von y' geben, welcher ſich alsdann aus der Formel:

$$y' = -\frac{u + 2wy' + vy'^2}{w + 2vy' + uy'^2}$$

oder:

$$u + 3wy' + 3vy'^2 + uy'^3 = 0 \qquad (f_1)$$

ergibt. Da dieſe Gleichung von einem ungeraden Grade in Beziehung auf y' iſt, ſo lange die partiellen Ableitungen der dritten Ordnung u, v, w, w nicht von y' abhängen; ſo hat ſie nothwendig eine reelle Wurzel, und folglich können die Werthe x, y, welche Wurzeln der Gleichungen (e) und (e_1) ſind, die Function z nicht zu einem Maximum, oder Minimum machen, wofern nicht einzeln:

$$u = 0,\ w = 0,\ v = 0,\ u = 0, \qquad (e_2)$$

ist, d. h. wofern nicht alle Glieder des Totaldifferenziales der dritten Ordnung:

$$\frac{\overline{d^3z}}{dx^3},$$

wie die der Totaldifferenziale der ersten und zweiten Ordnung einzeln verschwinden.

Außerdem ist erforderlich, daß das Polynom des vierten Grades in Beziehung auf y':

$$\frac{\overline{d^4z}}{dx^4},$$

wenn es gleich Null gesetzt wird, nur imaginäre Werthe für y' gibt, und wenn diese neue Bedingung erfüllt wird, so findet ein Maximum, oder Minimum statt, je nachdem das Polynom für alle Werthe von y' beständig negativ oder beständig positiv bleibt.

Wenn man diese Analyse weiter fortsetzt, so erhält man als allgemeine Regel für die Existenz des Maximums oder Minimums folgende:

1) Es muß das erste Totaldifferenzialverhältniß oder die erste Totalableitung, deren Glieder nicht sämmtlich einzeln verschwinden, von einer geraden Ordnung sein, und

2) muß diese Totalableitung dasselbe Zeichen behalten (nämlich das negative in dem Falle des Maximums und das positive in dem Falle des Minimums), von welcher Beschaffenheit das zwischen den unendlich kleinen Veränderungen der unabhängigen Veränderlichen willkührlich angenommene Verhältniß auch sein mag.

Dieses ist in der That die Regel, welche die Schriftsteller ohne alle Einschränkung für die Bestimmung der Maxima und Minima zu geben pflegen; aber wobei eine sehr wichtige Beschränkung nothwendig ist. Denn wenn z. B. einige der partiellen Ableitungen u, m, w, v unter den unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ erschienen und ihre wahren Werthe sich mit y' ändern könnten, so könnte die Gleichung (f_1) keine algebraische oder in Beziehung auf y' von keinem ungeraden Grade mehr sein und nur imaginäre Wurzeln haben, so daß ein Maximum oder Minimum stattfinden könnte, ohne daß die Gleichungen (e_2) erfüllt würden.

§. 148. Wenn die Function z eine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung erfährt und die Ableitungen p, q beide unendlich werden, so wird der Werth von y' durch die Gleichung (d') wieder unter einer unbestimmten Form gegeben, und man muß für jeden Fall eine specielle Untersuchung anstellen, um zu erfahren, ob dieser Umstand einem Maximum oder Minimum von z entspricht, oder nicht.

Es sei z. B.:

$$z = \sqrt[3]{x^2 + y^2},$$

so ist:

$$p = \frac{2x}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad q = \frac{2y}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

und die Werthe $x = 0$, $y = 0$, welche z verschwinden machen, machen p und q unendlich. Denn wenn man $y = \alpha x$ setzt, so erhält man die Werthe:

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot (1+\alpha^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad q = \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt[3]{x} \cdot (1+\alpha^2)^{\frac{2}{3}}},$$

welche für $x = 0$ unendlich werden. Aber an dieſer Grenze verwandelt ſich das Verhältniß α in y', und die Gleichung (d') gibt:

$$y' = -\frac{p}{q} = -\frac{1}{y'}, \text{ folglich } y' = \pm\sqrt{-1}.$$

Die Imaginarität dieſer Werthe von y' zeigt, daß es keine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Niveaulinie gibt, und daß folglich dieſer Punkt einem Maximum oder Minimum von z entſpricht. Uebrigens erhellet aus der Form der Function, daß ſie nur ein Minimum geſtatten kann.

§. 149. Wir wollen nun die Function:

$$u = f(x, y, z)$$

von drei Veränderlichen betrachten und der Kürze wegen folgende Bezeichnungen anwenden:

$$\frac{du}{dx} = p_1, \frac{du}{dy} = p_2, \frac{du}{dz} = p_3;$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = r_1, \frac{d^2u}{dy^2} = r_2, \frac{d^2u}{dz} = r_3;$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = s_{1,2}, \frac{d^2u}{dxdz} = s_{1,3}, \frac{d^2u}{dydz} = s_{2,3}.$$

Wenn man ſich zwiſchen x und jeder der beiden andern Veränderlichen y und z eine willkührliche Relation aufgeſtellt denkt, ſo wird u eine Function der einzigen Veränderlichen x, und die gemeinſchaftliche Bedingungsgleichung für das Maximum und Minimum iſt:

$$\frac{\overline{du}}{dx} = p_1 + p_2y' + p_3z' = 0.$$

Soll alſo ein abſolutes Maximum oder Minimum (§. 145) ſtattfinden, oder ſoll die vorhergehende Gleichung unabhängig von den willkührlichen Verhältniſſen y', z' erfüllt werden, ſo muß einzeln:

$$p_1 = 0, \; p_2 = 0, \; p_3 = 0 \qquad (E)$$

ſein, wodurch ſich der allgemeine Ausdruck von

$$\frac{\overline{d^2u}}{dx^2}$$

auf das Polynom:

$$r_1 + r_2y'^2 + r_3z'^2 + 2(s_{1,2}y' + s_{1,3}z' + s_{2,3}y'z')$$

reducirt. Außerdem iſt erforderlich, daß dieſes Polynom daſſelbe Zeichen behält, ohne zu verſchwinden, was für relle Werthe man y', z' auch beilegen mag, und daß folglich die Gleichung mit y', z', welche gebildet wird, wenn man dieſes Polynom gleich Null ſetzt, niemals für die eine dieſer Veränderlichen einen reellen Werth gibt, was für einen reellen Werth man der andern Veränderlichen auch beilegen mag.

Wenn man dieſe Gleichung in Beziehung auf y' auflöſt, ſo findet man, daß y' beſtändig imaginär bleibt, wenn für jeden Werth von z' die Bedingung:

$$(s_{1,2} + s_{2,3}z')^2 - r_2(r_3z'^2 + 2s_{1,3}z' + r_1) < 0,$$

oder:

$$(s^2_{2,3} - r_2r_3)z'^2 + 2(s_{1,2}s_{2,3} - r_2s_{1,3})z' + s^2_{1,2} - r_1r_2 < 0$$

erfüllt wird, welche letzte Bedingung ihrerſeits erfüllt wird, wenn zunächſt:

$$s_{1,2}^2 - r_1 r_2 < 0, \quad s_{2,3}^2 - r_2 r_3 < 0, \qquad (G)$$

und dann:

$$(s_{1,2}s_{2,3} - r_2 s_{1,3})^2 - (s_{1,2}^2 r_1 r_2)(s_{2,3}^2 - r_1 r_3) < 0. \qquad (G_1)$$

iſt. Die Ungleichheiten (G) erfordern, daß die drei partiellen Ableitungen r_1, r_2, r_3 daſſelbe Zeichen haben, und wenn die eine dieſer Ungleichheiten ſtattfindet, ſo iſt die andere eine Folge aus der Ungleichheit (G_1), ſo daß dieſe letzte Ungleichheit in Verbindung mit der einen der Ungleichheiten (G) und mit den Gleichungen (E) das Syſtem der Bedingungen für die Exiſtenz des Maximums oder Minimums bildet. Aus der Symmetrie folgt ferner, daß in dieſem Syſteme auch:

$$s_{1,3}^2 - r_1 r_3 < 0$$

ſein muß, und es findet ein Maximum ſtatt, wenn die drei Ableitungen r_1, r_2, r_3 negativ ſind, und ein Minimum dagegen, wenn ſie alle drei poſitiv ſind.

Wenn die Werthe von x, y, z, welche den Gleichungen (E) genügen, auch den folgenden:

$$r_1 = 0, \; r_2 = 0, \; r_3 = 0; \; s_{1,2} = 0, \; s_{1,3} = 0, \; s_{2,3} = 0, \quad (E_1)$$

genügten, ſo wäre zu der Exiſtenz des Maximums oder Minimums erforderlich, daß dieſelben Werthe alle partiellen Ableitungen der dritten Ordnung verſchwinden machten, und daß die Totalableitung der vierten Ordnung beſtändig daſſelbe Zeichen behielte (nämlich das *negative* Zeichen in dem Falle des Maximums und das poſitive in dem Falle des *Minimums*) unabhängig von den willkührlichen Verhältniſſen y', z'; u. ſ. f.

Dieſe Regel würde jedoch unbrauchbar werden, wenn die nicht verſchwindenden partiellen Ableitungen unter einer unbeſtimmten Form erſchienen und Functionen der Verhältniſſe y', z' würden, wie wir an den Beiſpielen von Functionen zweier Veränderlicher geſehen haben.

Die vorhergehende Regel würde ferner unbrauchbar und man müßte für jeden Fall eine ſpecielle Unterſuchung anſtellen, wenn die partiellen Ableitungen der erſten Ordnung oder der höhern Ordnungen unendlich würden.

§. 150. Als Anwendung dieſer Theorie wollen wir unter allen iſoperimetriſchen Dreiecken das zu beſtimmen ſuchen, deſſen Flächeninhalt ein Maximum iſt.

Wenn man den Umfang des Dreieckes mit 2c, zwei Seiten deſſelben mit x, y und ſeinen Flächeninhalt mit z bezeichnet, ſo hat man die bekannte Formel:

$$z = \sqrt{c(c-x)(c-y)(x+y-c)},$$

und die Gleichungen des Maximums ſind:

$$p = \frac{c(c-y)(2c-2x-y)}{2\sqrt{c(c-x)(c-y)(x+y-c)}} = 0,$$

$$q = \frac{c(c-x)(2c-2y-x)}{2\sqrt{c(c-x)(c-y)(x+y-c)}} = 0,$$

oder wenn man die Auflöſungen $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$ hinwegläßt:

$$(c-y)(2c-2x-y) = 0, \quad (c-x)(2c-2y-x) = 0.$$

Dieſe beiden letzten Gleichungen zerfallen in die vier Syſteme:

$$x = c, \; y = c;$$

$$\left.\begin{array}{l} y = c,\ 2c - 2y - x = 0; \\ x = c,\ 2c - 2x - y = 0; \\ 2c - 2y - x = 0,\ 2c - 2x - y = 0; \end{array}\right\} \text{oder} \left\{\begin{array}{l} y = c,\ x = 0; \\ x = c,\ y = 0; \\ x = y = \frac{2}{3}c. \end{array}\right.$$

Das letzte System ist das einzige, welches der Aufgabe im geometrischen Sinne genügt und die übrigen entsprechen dem Falle, wo das Dreieck unmöglich ist.

Es ist:

$$r = -\frac{1}{4}\sqrt{c} \cdot \frac{y^2\sqrt{c-y}}{[(c-x)(x+y-c)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$s = -\frac{1}{4}\sqrt{c} \cdot \frac{xy - 2(x+y-c)^2}{\sqrt{(c-x)(c-y)} \cdot (c+y-c)^{\frac{3}{2}}},$$

$$t = -\frac{1}{4}\sqrt{c} \cdot \frac{x^2\sqrt{c-x}}{[(c-y)(x+y-c)]^{\frac{3}{2}}},$$

Die durch die Ungleichheit (g) ausgedrückte Bedingung verwandelt sich also nach verrichteter Reduction in:

$$(x + y - c)^2 > 0$$

und wird für alle reellen Werthe von x, y erfüllt. Uebrigens ist klar, daß r und t negativ sind, und folglich entspricht das System $x = y = \frac{2}{3}c$ einem Maximum der Function z. Hieraus folgt, daß das Dreieck, welches der Aufgabe genügt, ein gleichseitiges ist, wie auch in den Elementen der Geometrie bewiesen wird.

§. 151. Wir wollen noch das System der Werthe von x, y suchen, für welches die Function:

$$z = \frac{a + bx + cy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

ein Maximum wird, so haben wir die Gleichungen:

$$p = \frac{b - ax + y(by - cx)}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$q = \frac{c - ay + x(cx - by)}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

oder einfacher:

$$b - ax + y(by - cx) = 0,\quad c - ay + x(cx - by) = 0. \quad \text{(h)}$$

Diesen Gleichungen wird genügt, wenn man

$$b - ax = 0,\ c - ay = 0,\ \text{folglich}\ by - cx = 0 \quad \text{(i)}$$

setzt, und der Werth des gesuchten Maximums ist:

$$z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Das System (i) enthält überdies alle reellen Auflösungen des Systemes (h); denn wenn man y auf die gewöhnliche Weise zwischen den Gleichungen (h) eliminirt, so erhält man für die resultirende Gleichung mit x:

$$(b - ax)[(b^2 + c^2)x^2 + 2abx + a^2 + c^2] = 0;$$

und nachdem man den Factor $b - ax$ in Rechnung gebracht hat, gibt der andere Factor für x nur die imaginären Werthe:

$$-ab \pm \frac{\sqrt{-c^2(a^2+b^2+c^2)}}{b^2+c^2}.$$

Es ist:

$$r = -\frac{(a+cy)(1+x^2+y^2)+3x[b-ax+y(by-cx)]}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$s = -\frac{(2by-cx)(1+x^2+y^2)-3y[b-ax+y(by-cx)]}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$t = \frac{(a+bx)(1+x^2+y^2)+3y[c-ay+x(cx-by)]}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Für die Werthe von x, y, welche den Gleichungen (i) genügen, reduciren sich diese Ausdrücke auf:

$$r = -\frac{a^2(a^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad s = \frac{a^2bc}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad t = -\frac{a^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}};$$

und da sich die Ungleichheit (g) auf:

$$-\frac{a^6}{(a^2+b^2+c^2)^2} < 0$$

reducirt, so wird sie nothwendig erfüllt. Ferner kann kein Minimum stattfinden, weil die Werthe von r, t nothwendig negativ sind.

Aus dieser Rechnung folgt, daß die Werthe der veränderlichen Größen y', z', welche die Function:

$$u = \frac{X + Yy' + Zz'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

zu einem Maximum machen, für u den Werth $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ geben, wie bereits im §. 129 bemerkt worden, und durch die Gleichungen:

$$Y - Xy' = 0, \quad Z - Xz' = 0$$

bestimmt werden.

Zur Rechtfertigung des in dem angeführten §. Gesagten bliebe nun noch zu zeigen übrig, daß die Gleichungen:

$$Y - X\frac{dy}{dx} = 0, \quad Z - X\frac{dz}{dx} = 0$$

Linien angehören, welche die durch die Differenzialgleichung:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

characterisirten Flächen in normaler Richtung treffen; allein dieses ergibt sich aus der Theorie der krummen Flächen, wovon in dem folgenden Buche die Rede sein wird.

IV. Maxima und Minima der unentwickelten Functionen.

§. 152. Zur Bestimmung der Maxima und Minima der Veränderlichen y, welche durch die Gleichung:

$$f(x, y) = 0 \qquad (k)$$

implicite als Function von x gegeben wird, ſetze man:

$$y' = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy} = 0 \qquad (k')$$

und leite aus den Gleichungen (k) und (k') die Werthſyſteme von x und y ab, welche die Function y zu einem Maximum oder Minimum machen können. Dieſe Werthe ſubſtituire man in die Gleichung:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 0,$$

welche ſich wegen $y' = 0$ auf:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{df}{dy}\,y'' = 0 \qquad (k'')$$

reducirt, um ſich zu überzeugen, daß dieſelben Werthe y'' nicht verſchwinden machen und um zu gleicher Zeit, wenn es nöthig iſt nach dem Zeichen von y'' das Maximum von dem Minimum zu unterſcheiden.

Es ſei z. B. die Gleichung:

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0 \qquad (\alpha)$$

gegeben, welche die unter dem Namen des Descartes'ſchen Foliums bekannte Curve (Fig. 44) ausdrückt, ſo ergibt ſich daraus:

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}, \qquad (\alpha')$$

und die gemeinſchaftliche Gleichung für das Maximum oder Minimum iſt:

$$ay - x^2 = 0. \qquad (\beta)$$

Durch die Elimination von y zwiſchen den Gleichungen (α) und (β) ergibt ſich die Gleichung:

$$x^6 - 2a^3x^3 = 0,$$

deren Wurzeln, welche wir hier allein betrachten wollen, folgende ſind:

$$x = 0, \quad x = a\sqrt[3]{2},$$

welchen die reellen Werthe von y entſprechen:

$$y = 0, \quad y = a\sqrt[3]{4}.$$

Die Gleichung (k'') verwandelt ſich in:

$$(y^2 - ax)y'' + 2x = 0,$$

und wenn man in dieſelbe die Werthe $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$ ſubſtituirt, ſo gibt ſie $y'' = -\frac{2}{a}$, und folglich entſpricht dieſes Syſtem einem Maximum, wenn a poſitiv iſt, oder einem Minimum, wenn dieſer Coefficient negativ iſt.

Für das Syſtem $x = 0$, $y = 0$ erſcheint der Werth von y' vermöge der Gleichung (α') unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$; aber die Ableitung dieſer Gleichung oder die zweite Ableitung der gegebenen Gleichung iſt:

$$(y^2 - ax)y'' + 2yy'^2 - 2ay' + 2x = 0,$$

während die dritte Ableitung folgende iſt:

$$(y^2 - ax)\,y''' + (6yy' - 3a)\,y'' + 2y'^3 + 2 = 0.$$

Wenn man in dieſen beiden Gleichungen $x = 0$, $y = 0$ ſetzt, ſo reduciren ſie ſich auf $y' = 0$, $y'' = \frac{2}{3a}$, und folglich entſpricht dieſes Syſtem von Werthen einem Minimum von y.

Wenn wir nun bemerken, daß die gegebene Gleichung in Beziehung auf die Veränderlichen x, y ſymmetriſch iſt, ſo folgt daraus, daß das Syſtem $x = 0$, $y = 0$ einen der aus dieſer Gleichung abgeleiteten Werthe von $\frac{dy}{dx}$ verſchwinden macht, daß es auch einen der Werthe von $\frac{dx}{dy}$ verſchwinden und folglich einen Werth von $\frac{dy}{dx}$ oder y' unendlich machen muß. Die beiden Coordinatenaxen berühren alſo die durch die gegebene Gleichung ausgedrückte Curve im Anfangspunkte.

§. 153. Wenn es darauf ankommt, die Werthe von x und y zu beſtimmen, welche eine implicite durch die Gleichung:

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (l)$$

gegebene Function z dieſer beiden Veränderlichen zu einem Maximum oder Minimum macht, ſo ſetzt man $p = 0$, $q = 0$ oder:

$$\frac{df}{dx} : \frac{df}{dz} = 0, \quad \frac{df}{dy} : \frac{df}{dz} = 0, \qquad (m)$$

wodurch ſich die Gleichungen, aus welchen die Werthe der partiellen Ableitungen r, s, t (§. 133) abgeleitet werden müſſen, auf folgende reduciren:

$$\frac{df}{dz}\,r + \frac{d^2f}{dx^2} = 0, \quad \frac{df}{dz}\,s + \frac{d^2f}{dxdy} = 0, \quad \frac{df}{dz}\,t + \frac{d^2f}{dy^2} = 0.$$

Hierauf muß man ſich überzeugen, ob die aus den Gleichungen (l) und (m) abgeleiteten und in die Ausdrücke von r, s, t ſubſtituirten Werthe von x, y, z der Ungleichheit (g) genügen. In Beziehung auf die Ausnahmefälle, welche vorkommen können, wollen wir nicht weiter ins Einzelne gehen, weil ſie ſich nach dem bisher Geſagten ohne Schwierigkeit behandeln laſſen.

§. 154. Es ſei:

$$u = f(x, y, z, \ldots\ldots)$$

eine Function von n veränderlichen Größen, welche durch m Bedingungsgleichungen

$$f_1(x, y, z, \ldots.) = 0, \; f_2(x, y, z, \ldots.) = 0, \; \ldots. \; f_m(x, y, z, \ldots.) = 0 \qquad (n)$$

mit einander verbunden ſind, ſo daß $n - m$ Veränderliche unabhängig bleiben. Wenn man die Function u zu einem Maximum oder Minimum machen will, ſo muß man $du = 0$ oder

$$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy + \frac{df}{dz}\,dz + \ldots\ldots = 0 \qquad (n')$$

ſetzen.

Die Gleichungen (n) führen auf die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{df_1}{dx}\,dx + \frac{df_1}{dy}\,dy + \frac{df_1}{dz}\,dz + \ldots\ldots = 0,\\
&\frac{df_2}{dx}\,dx + \frac{df_2}{dy}\,dy + \frac{df_2}{dz}\,dz + \ldots\ldots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{df_m}{dx}\,dx + \frac{df_m}{dy}\,dy + \frac{df_m}{dz}\,dz + \ldots\ldots = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (n'')$$

Nachdem man zwiſchen den Gleichungen (n') und (n'') eine Anzahl m der Differenziale dx, dy, dz, ... eliminirt hat, ſetzt man die Multiplicatoren der $n - m$ willkührlich bleibenden Differenziale einzeln gleich Null, ſo geben dieſe $n - m$ Gleichungen in Verbindungen mit den Gleichungen (n) die Werthſyſteme von x, y, z, ..., welche die Function u zu einem Maximum oder Minimum machen können. Hierauf muß man ſich überzeugen, ob die Function d^2u durch die Subſtitution dieſer Werthe in dem einen Falle negativ und in dem andern poſitiv wird, von welcher Beſchaffenheit die Verhältniſſe der willkührlich gebliebenen Differenziale auch ſein mögen, was zu complicirten Rechnungen führen kann.

Was die Elimination zwiſchen den Gleichungen (n') und (n'') anlangt, ſo läßt ſie ſich durch die Methode der unbeſtimmten Factoren, wovon man häufig in der Analyſis Gebrauch macht, am eleganteſten bewerkſtelligen. Geſetzt man hätte die erſten Theile der Gleichungen (n'') durch die Factoren λ_1, λ_2, ... λ_m multiplicirt, man addirte ſie dann zu dem erſten Theile der Gleichung (n') und ſetzte endlich die Multiplicatoren der Differenziale in der reſultirenden Gleichung gleich Null, ſo erhielte man n Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{dx} + \lambda_1\,\frac{df_1}{dx} + \lambda_2\,\frac{df_2}{dx} + \ldots\ldots + \lambda_m\,\frac{df_m}{dx} = 0,\\
&\frac{df}{dy} + \lambda_1\,\frac{df_1}{dy} + \lambda_2\,\frac{df_2}{dy} + \ldots\ldots + \lambda_m\,\frac{df_m}{dy} = 0,\\
&\quad\text{etc.}\quad\text{etc.},
\end{aligned}$$

zwiſchen welchen man die m unbeſtimmten Factoren λ_1, λ_2, ... λ_m eliminiren könnte, ſo daß man die $n - m$ Endgleichungen erhielte.

§. 155. Wir wollen z. B. annehmen, daß man das Minimum der Function:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots\ldots$$

ſuche, indem die Veränderlichen x, y, z, ... durch die Bedingungsgleichung:

$$ax + by + cz \ldots\ldots = k$$

mit einander verbunden ſind, worin a, b, c ..... k conſtante Zahlen bezeichnen. Wenn man auf die eben angegebene Weiſe verfährt, ſo erhält man:

$$x + a\lambda_1 = 0,\ y + b\lambda_1 = 0,\ z + c\lambda_1 = 0,\ \text{etc.}$$

was hinausläuft auf:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \text{etc.}, \quad (o)$$

woraus ſich nach den bekannten Eigenſchaften der Proportionen ergibt:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \text{etc.} = \frac{x^2+y^2+z^2+\text{etc.}}{a^2+b^2+c^2+\text{etc.}} = \frac{u}{a^2+b^2+c^2+\text{etc.}},$$

$$\frac{x^2}{ax} = \frac{y^2}{by} = \frac{z^2}{cz} = \text{etc.} = \frac{x^2+y^2+z^2+\text{etc.}}{ax+by+cz+\text{etc.}} = \frac{u}{k},$$

und folglich:

$$\frac{u}{k} = \pm\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\text{etc.}}}, \quad u = \frac{k^2}{a^2+b^2+c^2+\text{etc.}}.$$

Um ſich zu überzeugen, daß dieſer Werth von u wirklich ein Minimum iſt, braucht man nur die identiſche Gleichung:

$$(a^2+b^2+c^2+\text{etc.})(x^2+y^2+z^2+\text{etc.}) = (ax+by+cz+\text{etc.})^2 + (bx-ay)^2 + (cx-az)^2 + \text{etc.},$$

anzuſetzen, welche in dieſem Falle wird:

$$u = \frac{k^2+(bx-ay)^2+(cx-az)^2+\text{etc.}}{a^2+b^2+c^2+\text{etc.}},$$

woraus man ſieht, daß die Ungleichheit:

$$u > \frac{k^2}{a^2+b^2+c^2+\text{etc.}}$$

in der That für alle Werthe der Veränderlichen erfüllt wird, welche den Gleichungen (o) nicht genügen.

Wenn man nur drei Veränderliche x, y, z hat, welche rechtwinklige Coordinaten bezeichnen, ſo drückt der kleinſte Werth von $\sqrt{u}$ den Abſtand des Anfangspunktes von der Ebene:

$$ax + by + cz = k$$

aus.

Viertes Kapitel.

Ausdehnung der Taylor'ſchen und Maclaurin'ſchen Formel auf entwickelte Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. — Lagrange's Formel zur Entwickelung der unentwickelten Functionen.

I. Ausdehnung der Taylor'ſchen und Maclaurin'ſchen Formel auf entwickelte Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

§. 156. Wir brauchen nur die Function:

$$z = f(x, y)$$

von zwei unabhängigen Veränderlichen zu betrachten, weil ſich die für dieſen Fall erhaltenen Formeln leicht auf eine beliebige Anzahl veränderlicher Größen erſtrecken laſſen.

Um die Function:

$$f(x+h, y+k)$$

nach den ſteigenden Potenzen der Incremente h und k zu entwickeln, ſetze man:

$$h = \alpha h', \; k = \alpha k',$$

ſo iſt:

$$f(x + h, y + k) = f(x + \alpha h', y + \alpha k') = f\alpha,$$

und wenn man die Function $f\alpha$ wie eine Function von einer einzigen Veränderlichen durch die Maclaurin'ſche Reihe entwickelt, ſo erhält man:

$$f\alpha = f(o) + \frac{\alpha}{1} \cdot f'(o) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(o) + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(o) + \text{etc.} \quad (f)$$

Aber nach der Regel für die Differenzirung der mittelbaren Functionen hat man:

$$f'\alpha = \frac{d \cdot f(x + \alpha h', y + \alpha k')}{dx} h' + \frac{d \cdot f(x + \alpha h', y + \alpha k')}{dy} k',$$

oder kürzer:

$$f\alpha = \frac{df}{dx} h' + \frac{df}{dy} k'$$

und eben ſo hat man

$$f''\alpha = \frac{d^2 f}{dx^2} h'^2 + 2 \frac{d^2 f}{dxdy} h'k' + \frac{d^2 f}{dy^2} k'^2,$$

$$f'''\alpha = \frac{d^3 f}{dx^3} h'^3 + 3 \frac{d^3 f}{dx^2 dy} h'^2 k' + 3 \frac{d^3 f}{dxdy^2} h'k'^2 + \frac{d^3 f}{dy^3} k'^3,$$

etc.

Andererſeits iſt:

$$f(o) = f(x, y) = z,$$

und aus den vorhergehenden Gleichungen ergibt ſich:

$$f'(o) = ph' + qk'$$
$$f''(o) = rh'^2 + 2shk' + tk'^2$$
$$f'''(o) = uh'^3 + 3wh'^2 k' + 3wh'k'^2 + vk'^3,$$
etc.

Wenn man dieſe Werthe in die Formel (f) ſubſtituirt und darin für h', k' ihre Werthe in h, k ſetzt, ſo verſchwindet die Hülfsgröße α, und man erhält:

$$f(x+h, y+k) = z + p\frac{h}{1} + q\frac{k}{1} + r\frac{h^2}{1 \cdot 2} + s\frac{h}{1} \cdot \frac{k}{1} + t\frac{k^2}{1 \cdot 2} + u\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + w\frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{k}{1} + w\frac{h}{1} \cdot \frac{k^2}{1 \cdot 2} + v\frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.} \quad (F)$$

In dieſem Ausdrucke kann man ſtatt der Buchſtaben p, q, r, etc. die Differenzialcoefficienten ſetzen, welche ſie ausdrücken, und wenn man außerdem der Kürze wegen die bereits in §. 43 und §. 124 angewandte ſymboliſche Bezeichnung gebraucht, ſo erhält man die Formel:

$$f(x+h, y+k) = z + \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)\frac{dz}{1} + \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^2 \frac{d^2z}{1\cdot 2} + \left(\frac{h}{dy} + \frac{k}{dy}\right)^3 \frac{d^3z}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}, \qquad (\Phi)$$

woraus das Geſetz des Fortſchrittes für eine beliebige Anzahl von Veränderlichen erhellet. *)

Die ſo erweiterte Taylor'ſche Reihe wird unbrauchbar, wenn die Function z und ihre partiellen Ableitungen p, q, r, etc., oder einige derſelben, für beſondere Werthe der Veränderlichen x, y, unendlich werden, wie bereits bei der Entwickelung der Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe gezeigt iſt (§. 106). Sie wird ferner unbrauchbar, wenn die Function z, oder ihre partiellen Ableitungen unbeſtimmte Werthe annehmen und ſich die Unbeſtimmtheit nur durch die Annahme einer willkührlichen Relation zwiſchen den Veränderlichen x, y und folglich zwiſchen den Incrementen h und k beſeitigen läßt, wie dieſes im vorhergehenden Kapitel näher gezeigt iſt.

§. 157. Es ſei r_i der Werth des Reſtes, welcher die Reihe (f) ergänzen muß, wenn man ſie bei dem Gliede mit der Potenz α^i ſchließt, ſo hat man nach §. 109:

$$r_i = \frac{\alpha^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} \cdot f^{(i+1)}(\theta\alpha) = \frac{(1-\theta_1)^i \alpha^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} \cdot f^{(i+1)}(\theta_1\alpha),$$

wo θ, θ_1 unbekannte, zwiſchen 0 und 1 liegende Zahlen bezeichnen. Wenn man alſo die Reihe (Φ) mit dem Gliede:

---

*) Es ſei: $f(x, y) = x^m y^n$, ſo iſt:

$$\frac{df}{dx} = mx^{m-1}y^n, \quad \frac{df}{dy} = nx^m y^{n-1},$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}y^n, \quad \frac{d^2f}{dxdy} = mnx^{m-1}y^{n-1},$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = n(n-1)x^m y^{n-2},$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}y^n,$$

$$\frac{d^3f}{dx^2dy} = mn(m-1)x^{m-2}y^{n-1},$$

$$\frac{d^3f}{dxdy^2} = mn(n-1)x^{m-1}y^{n-2},$$

$$\frac{d^3f}{dy^3} = n(n-1)(n-2)x^m y^{n-3},$$

und folglich:

$$f(x+h, y+k) = (x+h)^m (y+k)^n =$$

$$x^m y^n + mx^{m-1}y^n h + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}y^n h^2 + \text{etc.}$$

$$+ nx^m y^{n-1}k + \frac{mn}{1\cdot 1}x^{m-1}y^{n-1}hk + \text{etc.}$$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^m y^{n-2}k^2 + \text{etc.}$$

$$+ \text{etc.}$$

Z. d. Ueberſ.

$$\left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^i \frac{d^i z}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i}$$

ſchließt, ſo wird der Reſt R_i, welcher dieſe Reihe ergänzen muß, ſymboliſch ausgedrückt durch:

$$R_i = \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^{i+1} \cdot \frac{d^{i+1} f(x+\theta h, y+\theta k)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)}$$

der auch durch:

$$R_i = (1-\theta_1)^i \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^{i+1} \cdot \frac{d^{i+1} f(x+\theta_1 h, y+\theta_1 k)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i}.$$

Die in dieſen Formeln vorkommenden Zahlen θ, θ_1 ſind unbekannt und können nicht zur Berechnung der Werthe von R_i, ſondern blos zur Beſtimmung von Grenzen dienen, zwiſchen welchen dieſe Werthe liegen müſſen.

Da der Werth von r_i durch das beſtimmte Integral:

$$r_i = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} \int_0^\alpha f^{(i+1)} (\alpha - \beta) \cdot \beta^i \, d\beta$$

ausgedrückt wird, ſo hat man für den Werth von R_i auch die beiden andern ſymboliſchen Ausdrücke:

$$R_i = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i \cdot h^{i+1}} \int_0^h \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^{i+1} d^{i+1} f\left(x+h-\beta, \; y+k-\frac{k}{h}\right) \beta^i d\beta,$$

$$R_i = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i \cdot k^{i+1}} \int_0^k \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^{i+1} d^{i+1} f\left(x+h-\frac{h}{k}\beta, \; y+k-\beta\right) \cdot \beta^i d\beta.$$

Um von dieſen letzten Formeln eine Anwendung und zugleich den Beweis derſelben zu geben, wollen wir $i = 1$ ſetzen, ſo daß man hat:

$$f\alpha = f(0) + \frac{\alpha}{1} \cdot f'(0) + r_1, \; r_1 = \int_0^\alpha f''(\alpha-\beta) \cdot \beta d\beta.$$

Es ſei:

$$\frac{d^2 f(x, y)}{dx^2} = f''(x, y), \; \frac{d^2 f(x, y)}{dxdy} = f'_{,}(x, y), \; \frac{d^2 f(x, y)}{dy^2} = f_{,,}(x, y),$$

folglich:

$$f''(\alpha-\beta) = h'^2 f''[x + (\alpha-\beta) h', \; y + (\alpha-\beta) k']$$
$$+ 2h'k' f'_{,}[x+(\alpha-\beta)h', \; y+(\alpha-\beta)k'] + k'^2 f_{,,}[x+(\alpha-\beta)k', \; y+(\alpha-\beta)k']$$
$$= h'^2 f''(x+h-h'\beta, \; y+k-k'\beta) + 2h'k' f'_{,}(x+h-h'\beta, \; y+k-k'\beta)$$
$$+ k'^2 f_{,,}(x+h-h'\beta, \; y+k-k'\beta);$$

ſo hat man:

$$R_1 = h'^2 \int_0^\alpha f''(x-h-h'\beta, \; y+k-k'\beta) \cdot \beta d\beta$$
$$+ 2h'k' \int_0^\alpha f'_{,}(x+h-h'\beta, \; y+k-k'\beta) \cdot \beta d\beta$$
$$+ k'^2 \int_0^\alpha f_{,,}(x+h-h'\beta, \; y+k-k'\beta) \cdot \beta d\beta.$$

In dem erſten Gliede des Werthes von R_1 kann man $\frac{\beta}{k'}$ für die Veränderliche β ſetzen, wenn man $\alpha h' = h$ ſtatt α für die obere Grenze des Integrales nimmt, und alsdann verwandelt ſich dieſes erſte Glied in:

$$\int_0^h f''(x+h-\beta,\ y+k-\frac{k'}{h'}\beta)\cdot\beta d\beta = \int_0^h f''(x+h-\beta,\ y+k-\frac{k}{h}\beta)\cdot\beta d\beta,$$

ſo daß in ſeinem Ausdrucke die Hülfsgrößen α, h', k' nicht mehr vorkommen. Man könnte demſelben Gliede, wenn man $\frac{\beta}{k'}$ für die Veränderliche β ſetzt, auch die Form:

$$\frac{h^2}{k^2}\int_0^k f''(x+h-\frac{h}{k}\beta,\ y+k-\beta)\cdot\beta d\beta$$

geben, und wenn man die beiden andern Glieder des Werthes von R_i derſelben Transformation unterwirft; ſo erhält man für R_i die beiden Ausdrücke:

$$R_1 = \frac{1}{h^2}\int_0^h \Big\{h^2 f''(x+h-\beta,\ y+k-\frac{k}{h}\beta) + 2hk f_{,}'(x+h-\beta,\ y+k-\frac{k}{h}-\beta)$$
$$+ k^2 f_{,,}(x+h-\beta,\ y+k-\frac{k}{h}\beta)\Big\}\cdot\beta d\beta,$$

$$R_1 = \frac{1}{k^2}\int_0^k \Big\{h^2 f''(x+h-\frac{h}{k}\beta,\ y+k-\beta) + 2hk f_{,}'(x+h-\frac{h}{k}\beta,\ y+k-\beta)$$
$$+ k^2 f_{,,}(x+h-\frac{h}{k}\beta,\ y+k-\beta)\Big\}\cdot\beta d\beta.$$

Durch eine ähnliche Rechnung erhielte man die allgemeinen Werthe von R_i, deren ſymboliſcher Ausdruck weiter oben angegeben iſt.

§. 158. Wir wollen mit z_0, p_0, q_0, r_0, etc. die Werthe bezeichnen, welche die Functionen z, p, q, r, etc. annehmen, wenn man $x = 0$, $y = 0$ ſetzt, ſo gibt die Gleichung (F):

$$f(x,\ y) = z_0 + p_0\frac{x}{1} + q_0\frac{y}{1}$$
$$+ r_0\frac{x^2}{1\cdot 2} + s_0\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1} + t_0\frac{y^2}{1\cdot 2}$$
$$+ u_0\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + w_0\frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{y}{1} + w_0\frac{x}{1}\cdot\frac{y^2}{1\cdot 2} + v_0\frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$

und auf dieſe Weiſe iſt die Maclaurin'ſche Formel auf die Entwickelung der Functionen von zwei Veränderlichen erſtreckt. Man kann auch ſchreiben:

$$f(x,\ y) = z_0 + \Big(\frac{x}{dx_0} + \frac{y}{dy_0}\Big)\frac{dz_0}{1} + \Big(\frac{x}{dx_0} + \frac{y}{dy_0}\Big)\frac{d^2z_0}{1\cdot 2}$$
$$+ \Big(\frac{x}{dx_0} + \frac{y}{dy_0}\Big)\frac{d^3z_0}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$

Statt die Functionen mit mehreren Veränderlichen durch die Maclaurin'ſche Formel nach den Potenzen jeder unabhängigen Veränderlichen zu entwickeln, was auf ſehr complicirte Entwickelungen führt, entwickelt man gewöhnlich dieſe Functionen nur nach den Potenzen einer der Veränderlichen; aber alsdann ſind

die Coefficienten der Glieder der Reihe nicht mehr Constanten, sondern Functionen aller übrigen unabhängigen Veränderlichen. Man kann daher setzen:

$$f(x, y, z, \ldots) = f(o, y, z, \ldots) + f'(o, y, z, \ldots) \cdot \frac{x}{1}$$

$$+ f''(o, y, z \ldots) \frac{x^2}{1 \cdot 2} + f'''(o, y, z, \ldots) \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

wo f', f'', f''', etc. die Ableitungen von f in Beziehung auf die Veränderliche x bezeichnen. Die Anwendbarkeit dieser Formel setzt voraus, daß die Werthe von y, z, ... die Functionen:

$$f(o, y, z, \ldots), f'(o, y, z, \ldots), f''(o, y, z, \ldots), \text{etc.}$$

nicht unendlich machen und außerdem, daß man die Grenzen des Fehlers angeben kann, welchen man begeht, wenn man die Reihe mit einem gewissen Gliede schließt. Hieraus folgt, daß eine Formel, wie:

$$z = f(o, y) + f'(o, y) \frac{x}{1} + f''(o, y) \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + f'''(o, y) \cdot \frac{x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

eine Fläche nur in einem Theile ihrer Ausdehnung darstellen kann, nämlich nur in dem Theile, worin die Werthe von y die Functionen $f(o, y)$, $f'(o, y)$, $f''(o, y)$, etc. nicht unendlich machen.

II. Lagrange's Formel zur Entwickelung der unentwickelten Functionen.

§. 159. Es ist eine Gleichung von der Form:

$$z = x + yfz \qquad (a)$$

gegeben, und man soll z in eine nach den steigenden Potenzen von y fortschreitende Reihe entwickeln. Wenn y eine sehr kleine Größe bezeichnet, so ist x der Näherungswerth von z für $y = 0$. Eine zweite Annäherung gibt den Werth:

$$z = x + yfx, \qquad (a_1)$$

welchen man für z in die Function f substituiren könnte, so daß man einen dritten mehr genäherten Werth von z erhielte, welchen man seinerseits in die Function f substituirte u. s. f. Es ist der Zweck der gesuchten Entwickelung, sich dieser successiven Substitutionen zu überheben, und von welcher Größenordnung der Coefficient y auch sein mag, so ist doch einleuchtend, daß der zweite Theil der Gleichung (a_1) aus den beiden ersten Gliedern der gesuchten Entwickelung besteht. Die Coefficienten der höhern Potenzen von y fände man nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze, wenn man die successiven Differenziale der Gleichung (a) in Beziehung auf die Veränderlichen z, y nähme und dann in den Werthen der aus den Differenzialgleichungen gezogenen Ableitungen:

$$\frac{d^2z}{dy^2}, \quad \frac{d^3z}{dy^3}, \quad \frac{d^4z}{dy^4}, \text{ etc.}$$

$y=0$, $z=x$ setzte. Es versteht sich von selbst, daß die auf diese Weise erhaltene Reihe convergent sein muß, weil sonst das ganze Resultat der Rechnung illusorisch sein würde. Die Bedingungen der Convergenz sind von Cauchy angegeben, auf dessen Abhandlungen wir die sich für solche seine Untersuchungen interessirenden Leser verweisen.

Das vorhin zur Bestimmung der Coefficienten der successiven Glieder der gesuchten Entwickelung angedeutete allgemeine Verfahren würde das Bildungsgesetz dieser Coefficienten gar nicht oder nur sehr schwerfällig zu erkennen ge-

ben, während es ſich ganz leicht herausſtellt, wenn man nach Laplace z als eine Function der beiden Veränderlichen x, y vermöge der Gleichung (a) betrachtet.

Wenn man unter dieſem Geſichtspunkte differenzirt, ſo erhält man:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + f'z \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy} = fz + yf'z \cdot \frac{dz}{dy},$$

und folglich:

$$\frac{dz}{dy} = fz \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = fz \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + f'z \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)^2. \qquad (b)$$

Nun ſei ψz eine Function von z, ſo hat man:

$$\frac{d\left(\psi z \cdot \frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \psi z \cdot \frac{d^2z}{dxdy} + \psi' z \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy},$$

und wenn man $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$ vermittelſt der Gleichungen (b) fortſchafft:

$$\frac{d\left(\psi z \cdot \frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \psi z \cdot fz \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + (\psi z \cdot f'z + fz \cdot \psi' z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

oder:

$$\frac{d\left(\psi z \cdot \frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\psi z \cdot fz \cdot \frac{dz}{dx}\right)}{dx}. \qquad (c)$$

Wir wollen $\psi z = fz$ ſetzen, ſo gibt die erſte der Gleichungen (b) in Verbindung mit der vorhergehenden:

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d\left(fz \frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \frac{d\left[(fz)^2 \cdot \frac{dz}{dx}\right]}{dx}.$$

Wenn man hierauf $\psi z = (fz)^2$ ſetzt, ſo ergibt ſich aus der Vergleichung der Gleichung (c) mit der letzten Gleichung:

$$\frac{d^3z}{dy^3} = \frac{d^2\left[(fz)^2 \cdot \frac{dz}{dx}\right]}{dxdy} = \frac{d^2\left[(fz)^3 \cdot \frac{dz}{dx}\right]}{dx^2},$$

und da man auf dieſe Weiſe beliebig weit fortfahren kann, ſo iſt einleuchtend, daß man für einen beliebigen Index n hat:

$$\frac{d^nz}{dy^n} = \frac{d^{n-1}\left[(fz)^n \cdot \frac{dz}{dx}\right]}{dx^{n-1}}.$$

Wenn man $y = 0$ folglich $z = x$, $\frac{dz}{dx} = 1$ ſetzt, ſo reducirt ſich dieſer Ausdruck auf:

$$\left(\frac{d^nz}{dy^n}\right)_0 = \frac{d^{n-1} \cdot (fx)^n}{dx^{n-1}},$$

und der Maclaurin'ſche Lehrſatz gibt folglich:

$$z = x + \frac{y}{1} \cdot fx + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \cdot (fx)^2}{dx} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 \cdot (fx)^3}{dx^2} + \text{etc.} \quad (d)$$

§. 160. Es ſei nun φz eine neue Function von z, welche nach den Potenzen von y entwickelt werden ſoll, ſo hat man vermöge der erſten der Gleichungen (b):

$$\frac{d \cdot \varphi z}{dy} = \varphi' z \cdot \frac{dz}{dy} = \varphi' z \cdot fz \cdot \frac{dz}{dx},$$

und wenn man $\varphi' z \cdot fz = \psi z$ ſetzt, ſo gibt die Formel (c):

$$\frac{d^2 \cdot \varphi z}{dy^2} = \frac{d\left(\varphi' z \cdot fz \frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \frac{\left[d \cdot \varphi' z \cdot (fz)^2 \cdot \frac{dz}{dx}\right]}{dx}.$$

Da man ebenſowohl für ψz ſucceſſive die Functionen:

$$\varphi' z \cdot (fz)^2, \ \varphi' z \cdot (fz)^3, \ \text{etc.}$$

nehmen kann, ſo iſt einleuchtend, daß man allgemein hat:

$$\frac{d^n \cdot \varphi z}{dy^n} = \frac{\left[d^{n-1} \varphi' z \cdot (fz)^n \cdot \frac{dz}{dx}\right]}{dx^{n-1}},$$

und für die beſonderen Werthe $y = 0$, $z = x$:

$$\left(\frac{d^n \cdot \varphi z}{dy^n}\right)_0 = \frac{d^{n-1}[\varphi' x \cdot (fx)^n]}{dx^{n-1}};$$

folglich:

$$\varphi z = \varphi x + \frac{y}{1} \cdot \varphi' x \cdot fx + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \cdot [\varphi' x \cdot (fx)^2]}{dx} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 \cdot \varphi' x \cdot (fx)^3}{dx^2} + \text{etc.} \quad (e)$$

Die Formeln (d) und (e) laſſen ſich offenbar auf unentwickelte Functionen von zwei oder mehreren unabhängigen Veränderlichen ausdehnen.

§. 161. Die Formel (d) kann zur Auflöſung algebraiſcher und transcendenter Gleichungen angewandt werden, vorausgeſetzt, daß ſie auf eine convergente Reihe führt. Es ſei z. B.:

$$z = x + kz^m$$

eine Gleichung, woraus man den Werth von z als eine nach den Potenzen von k fortſchreitende Reihe mit x ableiten will, ſo gibt die Formel (d):

$$z = x + \frac{k}{1} \cdot x^m + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \cdot zmx^{2m-1} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3m(3m-1)x^{3n-2} + \text{etc.}$$

und wenn man $\varphi z = z^n$ ſetzte, ſo ergäbe ſich aus der Formel (e):

$$z^n = x^n + \frac{k}{1} \cdot nx^{m+n-1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \cdot n(2m+n-1)x^{2m+n-2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot n(3m+n-1)(3m+n-2)x^{3m+n-3} + \text{etc.}$$

Ausführlicheres über die Anwendungen dieſer Formeln auf die Auflöſung der algebraiſchen Gleichungen findet man in Lagrange's Werke „über die Auflöſung der Gleichungen."

Wir wollen noch die transcendente Gleichung:

$$z = x + \varepsilon \sin. z$$

betrachten, welche der unter dem Namen des Kepler'ſchen Problemes in der Aſtronomie bekannten Aufgabe entſpricht, und wo die Veränderliche x die Zeit, oder eine Größe bezeichnet, welche der Zeit proportional zunimmt, der Coefficient ε die Excentricität der elliptiſchen Bahn eines Planeten und die Veränderliche z den Winkel, welcher die excentriſche Anomalie des Planeten genannt wird; ſo haben wir:

$$z = x + \frac{\varepsilon}{1} \cdot \sin. x + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \cdot \sin.^2 x}{dx} + \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 \cdot \sin.^3 x}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$= x + \varepsilon \sin. x + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin. 2x + \frac{\varepsilon^3}{8} (3 \sin. 3x - \sin. x) + \text{etc.},$$

und da die Excentricität ε ein ſehr kleiner Bruch iſt, wenigſtens für die Hauptplaneten, ſo convergirt die Reihe ſehr ſchnell.

Bei den Anwendungen der Analyſis auf die Aſtronomie und auf die mathematiſche Phyſik, hat man oft den Bruch:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + y^2}}$$

nach den ſteigenden Potenzen von y zu entwickeln, und dieſe Entwickelung nimmt eine ſehr elegante Form an, wenn man ſich der Lagrange'ſchen Reihe bedient. Denn wir wollen

$$\sqrt{1 - 2xy + y^2} = 1 - yz$$

ſetzen, ſo iſt:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + y^2}},$$

$$z = x + \frac{1}{2} y (z^2 - 1),$$

und um dieſe letzte Gleichung auf die Form (a) zurückzuführen, braucht man nur:

$$fz = \frac{1}{2} (z^2 - 1)$$

zu ſetzen. Andererſeits gibt die Reihe (d) durch Differenziirung:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{y}{1} \cdot \frac{dfx}{dx} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 \cdot (fx)^2}{dx^2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 \cdot (fx)^3}{dx^3} + \text{etc.}$$

und folglich hat man:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + y^2}} = 1 + \frac{y}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \cdot (x^2 - 1)}{dx} + \frac{y^2}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \cdot \frac{d^2 \cdot (x^2 - 1)^2}{dx^2}$$

$$+ \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} \cdot \frac{d^3 \cdot (x^2 - 1)^3}{dx^3} + \ldots + \frac{y^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 2^n} \cdot \frac{d^n \cdot (x^2 - 1)^n}{dx^n} + \text{etc.}$$

Fünftes Kapitel.

Ueber die Bildung der Differenzialgleichungen mit einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen.

1. Von den Differenzialgleichungen zwiſchen zwei Veränderlichen.

§. 162. Wenn man die Gleichung:

$$f(x, y) = a, \qquad (a)$$

worin a eine Conſtante bezeichnet, differenzirt, ſo drückt die Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' = 0, \qquad (a')$$

woraus die Conſtante a verſchwunden iſt, eine Relation zwiſchen x, y, y' aus, welche ſtattfindet, was für einen beſondern Werth man dieſer Conſtanten in der Gleichung (a) auch beilegen mag. Wenn man dieſe Gleichung (a) als einer Reihe von Curven, welche ſich nur durch die verſchiedenen Werthe des Parameters a von einander unterſcheiden, angehörig betrachtet; ſo drückt die Gleichung (a') eine gemeinſchaftliche Eigenſchaft aller dieſer Curven aus, vermöge welcher die Richtung der Tangente beſtimmt iſt, wenn die Coordinaten x, y des Berührungspunktes gegeben ſind.

Wenn man z. B. die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = a,$$

differenzirt, ſo erhält man:

$$x + yy' = 0, \text{ oder } y' = -\frac{x}{y},$$

und ſo lange der Parameter a unbeſtimmt bleibt, gehört die erſte Gleichung zu einem Kreiſe von einem beliebigen Halbmeſſer, deſſen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, und die zweite Gleichung drückt eine allen dieſen concentriſchen Kreiſen gemeinſchaftliche Eigenſchaft aus, nämlich die, daß ihre Tangente auf der vom Anfangspunkte der Coordinaten nach dem Berührungspunkte gezogenen geraden Linie ſenkrecht iſt.

Wenn der Parameter a auf irgend eine Weiſe mit den Veränderlichen x, y in der Gleichung:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (b)$$

verbunden vorkommt, ſo kommt derſelbe im Allgemeinen in der Differenzialgleichung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0 \qquad (b')$$

auch noch vor; aber wenn man a zwiſchen den Gleichungen (b) und (b') eliminirt, ſo gilt von der reſultirenden Gleichung:

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (c)$$

das eben in Beziehung auf die Gleichung (a') Geſagte ebenfalls, und ſie drückt eine gemeinſame Eigenſchaft aller der Curven aus, welche durch die

Gleichung (b) ausgedrückt werden, wenn man der Conſtanten a ſucceſſive eine Reihe verſchiedener Werthe beilegt.

Wenn man den Werth von y, welcher einem beliebigen Werthe von x entſpricht, willkührlich annimmt, ſo iſt der Werth der Conſtante a implicite beſtimmt. Denn es ſeien x_0, y_0 dieſe beiden zuſammengehörigen Werthe von x, y, ſo hat man zwiſchen x_0, y_0 und a die Gleichung:

$$F(x_0, y_0, a) = 0,$$

und wenn der ſich aus dieſer Gleichung ergebende Werth von a in die Gleichung (b) ſubſtituirt wird, ſo drückt dieſe eine beſtimmte, durch den Punkt (x_0, y_0) gehende Curve aus.

Nachdem man den Werth von a beſtimmt hat, kann man aus der Gleichung (b) die Werthe der Function y ableiten, welche zwei verſchiedenen Werthen der unabhängigen Veränderlichen x entſprechen, und der Unterſchied dieſer Werthe iſt die Summe der unendlich kleinen Zuwächſe, welche die Function in dem Intervalle erhalten hat, wofern ſie in dieſem Intervalle keine Unterbrechungen der Stetigkeit erfahren hat (§. 51). Man ſagt daher, daß die Gleichung (b) das Integral der Gleichung (c) ſei, weil dieſe letzte den Werth des Zuwachſes dy ausdrückt, welcher für jedes Syſtem der Werthe von x und y einem Zuwachſe dx entſpricht, und weil die erſte Gleichung den Werth des Integrales oder der Summe dieſer unendlich kleinen Zuwächſe in einem gegebenen Intervalle ausdrückt oder beſtimmt.

Da die Gleichungen (b) und (c) inſofern gleichbedeutend ſind, als ſie derſelben Reihe von Curven angehören, ſo kann man aus dem Vorhergehenden ſchon ſchließen: 1) daß die Function y und die Curve, deren Ordinate ſie iſt, durch die Gleichung (c) vollſtändig beſtimmt iſt, wenn man die einer Abſciſſe x_0 entſprechende Ordinate y_0 willkührlich annimmt, und 2) daß, wenn dieſe Differenzialgleichung direct gegeben iſt und es darauf ankommt, ſie zu integriren oder eine Gleichung zwiſchen x und y zu finden, welche derſelben genügt, die Integralgleichung nothwendig eine willkührliche Conſtante enthalten muß, wenn ſie dieſelbe Allgemeinheit haben ſoll, wie die gegebene Differenzialgleichung. Wir werden auf dieſe wichtigen Eigenſchaften wieder zurückkommen, wenn wir von der Theorie der Integration der Differenzialgleichungen reden werden, und unſer gegenwärtiger Zweck war blos, ſchon hier einige allgemeine Begriffe über die Natur der Differenzialgleichungen mitzutheilen.

§. 163. Es ſei:

$$F(x, y, a, b) = 0 \qquad (d)$$

eine Gleichung zwiſchen den Veränderlichen x, y, welche zwei Parameter a, b enthält. Wenn man dieſe Gleichung zweimal hintereinander differenzirt, ſo erhält man die Differenzialgleichungen der erſten und zweiten Ordnung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\,y' = 0 \qquad (d')$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy}\,y' + \frac{d^2F}{dy^2}\,y'^2 + \frac{dF}{dy}\,y'' = 0, \qquad (d'')$$

welche im Allgemeinen die Parameter a, b gleichfalls enthalten. Man kann a, b zwiſchen den drei Gleichungen (d), (d'), (d'') eliminiren und die reſultirende Differenzialgleichung:

$$f(x, y, y', y'') = 0, \qquad (e)$$

welche von der zweiten Ordnung iſt, drückt eine gemeinſame Eigenſchaft aller Curven aus, welchen die Gleichung (d) vermöge einer ſchicklichen Beſtimmung der Parameter a, b angehören kann.

Um die Conſtanten a, b näher zu beſtimmen, könnte man ſich geben: 1) einen Punkt der Curve oder die einer Abſciſſe x_0 entſprechende Ordinate y_0, und 2) die Richtung der Tangente in dieſem Punkte oder den Werth y'_0 der Function y' für dieſelbe Abſciſſe.

Denn alsdann hat man die beiden Gleichungen:

$$F(x_0, y_0, a, b) = 0, \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 + \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 y'_0 = 0,$$

wo $\left(\frac{dF}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)_0$ die Werthe von $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ bezeichnen, wenn man darin $x = x_0$, $y = y_0$ ſetzt, und aus dieſen beiden Gleichungen kann man die Werthe von a, b ableiten, um ſie in die Gleichung (d) zu ſubſtituiren.

Statt die Conſtanten a, b unmittelbar zwiſchen den drei Gleichungen (d), (d') (d'') zu eliminiren, kann man b und a ſucceſſive zwiſchen den beiden erſten Gleichungen eliminiren, wodurch man zwei Differenzialgleichungen der erſten Ordnung:

$$f_1(x, y, y', a) = 0, \qquad (f_1)$$
$$f_2(x, y, y', b) = 0, \qquad (f_2)$$

erhält, wovon die eine blos den Curven angehört, für welche a einen beſtimmten Werth hat, indem b willkührlich bleibt, während die andere aus demſelben Grunde den Curven angehört, für welche b einen beſtimmten Werth hat, und a willkührlich bleibt.

So lange die Conſtanten a und b unbeſtimmt bleiben, hat jede der Gleichungen (f_1) und (f_2) dieſelbe Allgemeinheit, als die Gleichung (d) oder wie die Gleichung (e). Man kann alſo aus der Gleichung (f_1) durch Differenziirung einen durch x, y, y', a ausgedrückten Werth ableiten, welcher der Gleichung (e) Genüge leiſtet, was für einen Werth a auch haben mag. Wenn man folglich zwiſchen der Gleichung (f_1) und ihrem Differenziale:

$$\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy} y' + \frac{df_1}{dy'} y'' = 0$$

die Conſtante a eliminirt, ſo findet man die Gleichung (e) und man würde ſie ebenfalls wieder erhalten, wenn man die Conſtante b zwiſchen der Gleichung (f_2) und ihrem unmittelbaren Differenziale:

$$\frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dy} y' + \frac{df_2}{dy'} y'' = 0$$

eliminirte. Wenn man endlich y' zwiſchen den Gleichungen (f_1) und (f_2) eliminirt, ſo erhält man die Gleichung (d).

Es ſei z. B. die Gleichung:

$$x^2 - ax - by = 0 \qquad (1)$$

gegeben, ſo erhält man durch zwei unmittelbare Differenziirungen:

$$2x - a - by' = 0, \qquad (2)$$
$$2 - by'' = 0, \qquad (3)$$

und dann durch Elimination der Conſtanten a, b die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0. \qquad (4)$$

Wenn man abwechſelnd die Conſtanten b, a zwiſchen den Gleichungen (1) und (2) eliminirt, ſo erhält man die beiden Differenzialgleichungen der erſten Ordnung:

$$x^2y' - 2xy - a(xy' - y) = 0, \quad (5)$$
$$x^2 + by - bxy' = 0, \quad (6)$$

deren unmittelbare Differenziale ſind:

$$2xy' + x^2y'' - 2y - 2xy' - a(y' + xy'' - y') = 0, \quad (7)$$
$$x(2 - by'') = 0, \quad (8)$$

und man erhält die Gleichung (4) wieder, wenn man a zwiſchen den Gleichungen (5) und (7), oder b zwiſchen den Gleichungen (6) und (8) eliminirt. Endlich gibt die Elimination von y' zwiſchen den Gleichungen (5) und (6) die Gleichung (1) wieder.

Aus dieſer Analyſe muß man ſchließen: 1) daß einer Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zwiſchen x, y, y', y'' zwei Gleichungen von verſchiedenen Formen zwiſchen x, y, y' entſprechen, welche derſelben genügen, oder zwei erſte Integrale der Gleichung der zweiten Ordnung; 2) daß dieſe Integrale, wenn ſie dieſelbe Allgemeinheit haben ſollen, wie die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung, welcher ſie genügen, jedes eine willkührliche Conſtante enthalten müſſen; 3) daß die Gleichung zwiſchen x, y, welche einer beliebigen dieſer Differenzialgleichungen der erſten Ordnung in aller erforderlichen Allgemeinheit und folglich auch der Differenzialgleichung der zweiten Ordnung, wovon ſie das zweite Integral iſt, Genüge leiſtet, zwei willkührliche Conſtanten, nämlich die in den beiden erſten Integralen vorkommenden Conſtanten, enthält; 4) daß dieſe beiden willkührlichen Conſtanten implicite beſtimmt ſind, wenn man die der Abſciſſe x_0 entſprechenden anfänglichen Werthe y_0, y'_0 angibt, oder wenn ein Punkt gegeben wird, durch welchen die Curve gehen muß, deren rechtwinklige Coordinaten x, y ſind, ſo wie der Richtung der Tangente in dieſem Punkte.

§. 164. Dieſe Unterſuchung läßt ſich leicht weiter verfolgen, indem man ſie auf Differenzialgleichungen von einer beliebigen Ordnung anwendet; und da man allgemein bei dem Uebergange von einer Gleichung mit zwei Veränderlichen zu ihrer Differenziale der n^{ten} Ordnung immer n Conſtanten eliminiren kann, ſo folgt, daß das n^{te} Integral einer Differenzialgleichung von dieſer Ordnung oder die Gleichung x und y, welche dieſer Differenzialgleichung mit aller erforderlichen Allgemeinheit genügt, n willkührliche Conſtanten enthalten muß. Die Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung hat n Differenzialgleichungen der $n-1^{ten}$ Ordnung, wovon jede eine willkührliche Conſtante enthält, zu ihren erſten Integralen, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ Differenzialgleichungen der $(n-2)^{ten}$ Ordnung, jede mit einer binären Combination dieſer n Conſtanten, zu ihren zweiten Integralen; $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ Differenzialgleichungen der $(n-3)^{ten}$ Ordnung, wovon jede eine ternäre Combination derſelben Conſtanten enthält, zu ihren dritten Integralen, u. ſ. f. Wenn man y', y'', y''', ... $y'^{n-1)}$ zwiſchen den n erſten Integralen eliminirt, ſo erhält man das n^{te} Integral der gegebenen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung oder die Gleichung zwiſchen x, y, welche derſelben mit den n willkührlichen Conſtanten Genüge leiſtet.

Dieſe n Conſtanten werden implicite beſtimmt, wenn die Werthe:

$$y_0,\ y'_0,\ y''_0,\ y'''_0,\ \ldots\ y_0^{(n-1)}$$

für die Abſciſſe x_0 gegeben ſind.

Man ſagt, ein Integral ſei allgemein oder vollſtändig, wenn daſſelbe ſo viele willkührliche Conſtanten enthält, daß es denſelben Grad von Allgemeinheit behält, wie die Differenzialgleichung, welcher es genügt. Aus

dieſem allgemeinen Integrale ergeben ſich die *particulären* oder *beſondern* Integrale, wenn man den willkührlichen Conſtanten beſtimmte Werthe beilegt.

So iſt z. B. die Gleichung:

$$(y + b)x + a(y - mx^2) = 0,$$

worin a, b willkührliche Conſtanten bezeichnen, das allgemeine Integral der Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$(y + mx^2)xy'' + 2y'(y - xy') = 0. \qquad (9)$$

Wenn man ſucceſſive $a = 0$, $a = \infty$ ſetzt, ſo erhält man die beiden Gleichungen:

$$y + b = 0, \quad y - mx^2 = 0,$$

welche beide der Gleichung (q) genügen; aber welche nur particuläre Integrale derſelben ſind, weil die erſte nur die willkührliche Conſtante b und die zweite gar keine willkührliche Conſtante mehr enthält.

Die in einem n^{ten} Integrale vorkommenden n willkührlichen Conſtanten müſſen von einander verſchieden ſein, wenn das Integral vollſtändig ſein ſoll. Offenbar könnte man ſtatt einer willkührlichen Conſtanten C die zweitheilige Conſtante $C_1 + C_2$ ſetzen, allein dieſe letzte Conſtante würde, obgleich ſie anſcheinend zwei willkührliche Conſtanten C_1, C_2 enthält, ſich doch bei allen vorkommenden Operationen wie die eingliedrige Conſtante C, deren Stelle ſie vertritt, verhalten; die beiden Conſtanten C_1 und C_2 würden nicht wirklich von einander verſchieden ſein und in eine einzige zuſammenfallen. Ebenſo enthält der Ausdruck:

$$C_1 e^{m_1 + ax} + C_2 e^{m_2 + ax}$$

nur ſcheinbar zwei verſchiedene willkührliche Conſtanten C_1, C_2; denn man kann denſelben auf die Form $(C_1 e^{m_1} + C_2 e^{m_2}) e^{ax}$ bringen, und ſo lange die Conſtanten C_1, C_2 willkührlich bleiben, kann man für den Factor $C_1 e^{m_1} + C_2 e^{m_2}$ eine einzige willkührliche Conſtante C ſetzen, ohne daß der Ausdruck ſeine Allgemeinheit verliert. Wenn wir ſagen, daß das vollſtändige Integral dieſelbe Allgemeinheit hat, wie die entſprechende Differenzialgleichung, ſo ſoll dieſes ſo viel heißen, daß beide dieſelbe Reihe, oder dieſelben Reihen von Curven ausdrücken; allein es kann außerdem Gleichungen geben, welche der Differenzialgleichung Genüge leiſten, ohne in dem vollſtändigen Integrale begriffen zu ſein, oder zu der Reihe der particulären Integrale zu gehören, und man nennt daher ſolche Gleichungen *ſinguläre Integrale* oder *ſinguläre Auflöſungen*. Wir werden die geometriſche Bedeutung der ſingulären Integrale der Differenzialgleichungen der erſten Ordnung bald kennen lernen und in der Theorie der Integration der Differenzialgleichungen auf dieſen wichtigen Punkt wieder zurückkommen.

II. Gleichzeitige Differenzialgleichungen.

§. 165. Wenn man ein Syſtem von eben ſo vielen Differenzialgleichungen als Functionen x, y, z, ... der unabhängigen Veränderlichen t hat, ſo kann man daraus immer eine Enddifferenzialgleichung ableiten, worin blos zwei Veränderliche, z. B. t und x vorkommen; wenigſtens unterliegt die Bildung dieſer Endgleichung keinen andern Schwierigkeiten, als denen, welche die Elimination zwiſchen gewöhnlichen Gleichungen, worin keine Differenzialcoefficienten vorkommen, darbieten kann.

Denn wir wollen zunächſt annehmen, daß man zwei von t abhängige Functionen x, y und zwei Differenzialgleichungen habe, welche wir durch:

$$f(t; x, x', x'', \ldots x^{(m)}; y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0,$$
$$f_1(t; x, x', x'', \ldots x^{(m_1)}; y, y', y'', \ldots y^{(n_1)}) = 0,$$

ausdrücken können, wo $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ nach der Lagrange'ſchen Bezeichnungsart die Differenzialcoefficienten $\frac{d^i x}{dt^i}$, $\frac{d^i y}{dt^i}$ bezeichnen. Wenn man die erſte Gleichung n_1 mal und die zweite n mal hinter einander differenzirt, ſo erhält man außer den beiden gegebenen Gleichungen noch $n + n_1$ Gleichungen, worin der höchſte Differenzialcoefficient von y gleich $y^{(n+n_1)}$ iſt, und wenn man zwiſchen dieſen $n + n_1 + 2$ Gleichungen die Größen:

$$y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n+n_1)},$$

deren Anzahl nicht größer als $n + n_1 + 1$ ſein kann, eliminirt; ſo enthält die reſultirende Gleichung nur die Größen t, x, x', x'', etc.; und die Ordnung dieſer reſultirenden Gleichung kann offenbar nicht größer ſein, als die größte der beiden Zahlen $m + n_1$, $m_1 + n$.

Wir wollen nun annehmen, daß man zwiſchen der unabhängigen Veränderlichen t, den ν Functionen x, y, z, ... und ihren Ableitungen der verſchiedenen Ordnungen ν Gleichungen habe; ſo wird ein ſolches Syſtem, ein Syſtem gleichzeitiger Differenzialgleichungen genannt. Es kann hierbei geſchehen, daß nicht alle in dem Syſteme der gleichzeitigen Differenzialgleichungen vorkommenden Ableitungen in Beziehung auf dieſelbe unabhängige Veränderliche t genommen ſind; allein vermittelſt der Formeln für die Vertauſchung der unabhängigen Veränderlichen kann man das gegebene Syſtem gleichzeitiger Differenzialgleichungen immer auf ein ſolches zurückführen, worin die Ableitungen alle in Beziehung auf dieſelbe unabhängige Veränderliche genommen ſind.

Es ſeien:

$$x^{(m)}, y^{(n)}, z^{(p)}, \ldots\ldots$$

die höchſten Ableitungen der Functionen x, y, z, ..., welche in dem gegebenen Syſteme vorkommen, ſo wollen wir, wenn die Veränderlichen y, z, ... und ihre Ableitungen eliminirt werden ſollen, um eine Endgleichung mit t, x, x', x'', ... zu erhalten,

$$s = n + p + \text{etc.}$$

ſetzen.

Wenn man jede der Gleichungen des Syſtemes s mal differenzirt, ſo erhält man, mit Einſchluß der gegebenen Gleichungen, im Ganzen $\nu(s + 1)$ Gleichungen, und die Anzahl der zu eliminirenden Größen:

$$y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n+s)},$$
$$z, z', z'', \ldots\ldots z^{(p+s)}, \text{ etc.}$$

iſt gleich:

$$(n + s + 1) + (p + s + 1) + \text{etc.} = s + (s + 1)(\nu - 1) = \nu(s+1) - 1,$$

ſo daß folglich die durch die Elimination erhaltene Endgleichung von keiner höhern Ordnung, als von der $(m + s) = (m + n + p + \text{etc.})^{\text{ten}}$ Ordnung ſein kann; aber wohl von einer niedrigern Ordnung, was z. B. nach dem Vorhergehenden der Fall ſein würde, wenn man zwiſchen den Veränderlichen t, x, y und ihren Ableitungen nur zwei Gleichungen hätte, und wenn die höchſten Ableitungen von x und y in derſelben Gleichung vorkämen.

Betrachten wir insbeſondere den Fall, wo die gegebenen Gleichungen alle von der erſten Ordnung ſind und auf die Form:

$$x' = f(t, x, y, z, \ldots.), \; y' = f_1(t, x, y, z, \ldots.), \; z' = f_2(t, x, y, z, \ldots.), \text{ etc.}$$

gebracht werden können; so ist es, statt alle diese Gleichungen zu gleicher Zeit zu differenziren, einfacher, immer dieselbe, z. B. die erste, Gleichung zu differenziren, indem man nach jeder Differenzirung für die durch diese Operation in den zweiten Theil eingeführten Ableitungen x', y', z', etc. ihre unmittelbar durch die gegebenen Gleichungen gegebenen Werthe substituirt, und man erhält alsdann nach $\nu - 1$ successiven Differenzirungen mit Einschluß der ersten der gegebenen Gleichungen ν Gleichungen zwischen den Ableitungen x', x'', ... $x^{(\nu)}$ und den Veränderlichen t, x, y, z, etc., so daß es blos noch darauf ankommt, zwischen diesen ν Gleichungen die $\nu - 1$ Veränderlichen y, z, etc. zu eliminiren, um die gesuchte Endgleichung zu erhalten.

III. Von den Gleichungen mit partiellen Differenzen.

§. 166. Es seien zwei Gleichungen von der Form:

$$\alpha = f(x, y, z),$$
$$F(x, y, z, \varphi\alpha) = 0 \qquad (g)$$

gegeben, wovon die zweite blos eine Function der Veränderlichen x, y, z würde, wenn man für α seinen aus der ersten gezogenen Werth substituirte; so kann man z als eine Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y betrachten, und wenn man die Gleichung (g) successive in Beziehung auf diese beiden Veränderlichen differenzirt; so erhält man, wenn die Buchstaben p, q ihre gewöhnliche Bedeutung behalten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}p + \frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p\right)\varphi'\alpha = 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}q + \frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q\right)\varphi'\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (g')$$

Zwischen den Gleichungen (g) und (g') kann man die Functionen $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$ eliminiren, und da die sich durch diese Elimination ergebende partielle Differenzialgleichung (§. 124):

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

von der Form der Function φ unabhängig ist, so drückt sie eine gemeinsame Eigenschaft aller Werthe von z als Function von x, y aus, welche man aus der Gleichung (g) ableiten kann, wenn man die Form der Function φ verändert, ohne die Functionen F und f zu ändern. Sie drückt folglich auch eine gemeinsame Eigenschaft aller Flächen aus, deren Gleichung zwischen x, y, z, vermittelst einer entsprechenden Bestimmung der Function φ auf die Gleichung (g) zurückgeführt werden kann.

Es sei z. B.:

$$\alpha = ax + by, \quad z - \varphi\alpha = 0$$

oder:

$$z = \varphi(ax + by); \qquad (h)$$

so nehmen die abgeleiteten Gleichungen die sehr einfache Form an:

$$p - a\varphi'\alpha = 0, \quad q - b\varphi'\alpha = 0,$$

woraus folgt:

$$bp - aq = 0. \qquad (i)$$

§. 167. Wenn man zwei Gleichungen hat, wovon die eine partielle Differenziale und die andere blos die ursprünglichen Veränderlichen ohne ihre Ableitungen enthält, aber welche beide denselben Functionen entsprechen und den-

ſelben Grad von Allgemeinheit haben; ſo wird die zweite Gleichung das allgemeine Integral der erſten genannt. Die Gleichung (h) iſt alſo das allgemeine Integral der Gleichung (i), weil ſie vermöge der Unbeſtimmtheit des Zeichens φ alle Gleichungen enthält, woraus man einen Werth von z als Function von x, y ableiten kann, welcher der Gleichung (i) genügt.

Der Grund dieſer Benennung „Integral" iſt derſelbe, als bei den Gleichungen, welche einer gewöhnlichen Differenzialgleichung zwiſchen zwei Veränderlichen genügen (§. 162). Denn wir wollen annehmen, daß man, nachdem die Function φ particulariſirt iſt, den Veränderlichen x, y zwei Syſteme von Werthen (x_0, y_0), (x_1, y_1) beilege, und es ſeien z_0, z_1 die entſprechenden Werthe von z; ſo ergibt ſich aus der Gleichung (h) der Werth der endlichen Differenz $z_1 - z_0$; aber dieſe endliche Differenz iſt die Summe oder das Integral der unendlich kleinen Incremente, welche die Function z erhält, wenn x auf irgend eine Weiſe von dem Werthe x_0 zu dem Werthe x_1 und zu gleicher Zeit y ebenfalls auf eine beliebige Weiſe von dem Werthe y_1 übergeht, abgeſehen von dem Ausnahmefalle, wo die Function z Stetigkeitsunterbrechungen der erſten Ordnung erfährt, während man die Größen x, y ſo variiren läßt.

Die Gleichungen, welche aus der Gleichung (h) abgeleitet werden, wenn die willkührliche Function φ particulariſirt wird, ſind particuläre Integrale der Gleichung (i), und in allen Fällen muß man unter particulären Integralen die verſtehen, welche ſich aus dem allgemeinen Integrale ergeben, wenn man eine oder mehrere der willkührlichen Functionen particulariſirt, welche dieſes allgemeine Integral enthalten muß, wenn es dieſelbe Allgemeinheit haben ſoll, wie die Gleichung mit partiellen Differenzen, welcher dieſelbe entſpricht, oder wenn man zwiſchen den willkührlichen Functionen, Relationen aufſtellt, welche dieſe Allgemeinheit beſchränken.

Wenn man z. B. die Gleichung:

$$z = \varphi(x + ay) + \psi(x - ay) \qquad (k)$$

hat, worin φ, ψ willkührliche Functionen bezeichnen, und man berechnet vermittelſt dieſer Gleichung die partiellen Ableitungen der erſten und zweiten Ordnung p, q, r, s, t, ſo erhält man:

$$\begin{aligned} p &= \varphi'(x + ay) + \psi'(x - ay), \\ q &= a\varphi'(x + ay) - a\psi'(x - ay), \\ r &= \varphi''(x + ay) + \psi''(x - ay), \\ s &= a\varphi''(x + ay) - a\psi''(x - ay), \\ t &= a^2\varphi''(x + ay) + a^2\psi''(x - ay). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt ſich die partielle Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$a^2 r = t, \qquad (l)$$

welche die willkührlichen Functionen φ, ψ nicht mehr enthält und, wie man in der Folge ſehen wird, dieſelbe Allgemeinheit hat, als die Gleichung (k), woraus ſie abgeleitet iſt; und umgekehrt iſt die Gleichung (k), welche der Gleichung (l) mit aller möglichen Allgemeinheit genügt, das allgemeine Integral derſelben.

Aber wenn man zwiſchen den Functionen φ, ψ eine gewiſſe Abhängigkeit annimmt, namentlich $\psi t = -\varphi t$ oder $\psi t = \varphi' t$ ſetzt, ſo ſind die Gleichungen:

$$z = \varphi(x + ay) - \varphi(x - ay), \quad z = \varphi(x + ay) + \varphi'(x - ay),$$

worin noch die eine willkührliche Function φ vorkommt, nur particuläre Integrale der Gleichung (l).

Die partiellen Differenzialgleichungen können wie die gewöhnlichen Differenzialgleichungen singuläre Integrale oder singuläre Auflösungen haben, d. h. man kann denſelben in gewiſſen Fällen durch Gleichungen zwiſchen den urſprünglichen Veränderlichen genügen, welche ſich durchaus nicht aus dem allgemeinen Integrale durch Particulariſirung der darin vorkommenden willkührlichen Functionen würden ableiten laſſen. Wir werden bald Beiſpiele dieſer ſingulären Integrale bei den Anwendungen der Differenzialrechnung auf die Theorie der krummen Flächen kennen lernen, und dieſer Gegenſtand wird auch ſpäter bei der Integration der partiellen Differenzialgleichungen zur Sprache kommen.

§. 168. Eine partielle Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung kann erſte Integrale von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, zweite Integrale der $(n-2)^{ten}$ Ordnung, u. ſ. f. haben. So ergibt ſich z. B. aus der Differenzialgleichung der erſten Ordnung

$$p = \Pi q, \qquad (m)$$

worin Π eine willkührliche Function bezeichnet, wenn man ſucceſſive in Beziehung auf x und y differenzirt:

$$r = s\Pi' q, \quad s = t\Pi' q,$$

und dann wenn man $\Pi' q$ eliminirt:

$$rt - s^2 = 0. \qquad (n)$$

Aus dieſer Gleichung der zweiten Ordnung, welcher die Gleichung (m) vollkommen äquivalent iſt, ſo lange die Function Π unbeſtimmt bleibt, iſt dieſe Function Π verſchwunden.

Die Gleichung (m) iſt folglich ein erſtes Integral der Gleichung (n), und wenn man eine Gleichung mit x, y, z angeben könnte, welche der Gleichung (m) auf die allgemeinſte Weiſe genügte; ſo hätte man das zweite Integral der Gleichung (n).

Nun kann man zwar der Gleichung (m) nicht durch eine einzige Gleichung mit x, y, z, aber durch ein Syſtem zweier Gleichungen zwiſchen x, y, z und einer Hülfsveränderlichen α, nämlich:

$$z = \alpha + x\varphi\alpha + y\psi\alpha, \qquad (o)$$

$$1 + x\varphi'\alpha + y\psi'\alpha = 0 \qquad (o')$$

genügen, wovon die zweite die Ableitung der erſten in Beziehung auf die Hülfsveränderliche α iſt. Denn wenn man die Gleichung (o) ſucceſſive in Beziehung auf x und y differenzirt, ſo erhält man:

$$p = \varphi\alpha + \frac{d\alpha}{dx}(1 + x\varphi'\alpha + y\psi'\alpha),$$

$$q = \psi\alpha + \frac{d\alpha}{dy}(1 + x\varphi'\alpha + y\psi'\alpha),$$

oder wegen der Gleichung (o'):

$$p = \varphi\alpha, \quad q = \psi\alpha,$$

und ſo lange die Functionen φ, ψ, ſo wie Π willkührlich ſind, iſt das Syſtem dieſer letzten Gleichungen gleichbedeutend mit der Gleichung (m).

Da das Syſtem der Gleichungen (o), (o') die willkührlichen Functionen φ, ψ und eine Hülfsveränderliche α enthält, welche man nicht eliminiren kann, ſo lange die Functionen φ, ψ unbeſtimmt bleiben; ſo drückt daſſelbe

folglich das zweite und vollständige Integral der Differenzialgleichung (n) der zweiten Ordnung aus. Diese Form der partiellen Differenzialgleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen schließt sich an sehr interessante geometrische Untersuchungen an, welche wir bald kennen lernen werden.

§. 169. In §. 166 haben wir gesehen, daß die Elimination einer willkührlichen Function in einer Gleichung mit drei Veränderlichen auf eine partielle Differenzialgleichung der ersten Ordnung führt, woraus wir umgekehrt schließen, daß das allgemeine Integral einer partiellen Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit drei Veränderlichen eine willkührliche Function einer gewissen Größe α enthalten muß, welche selbst als Function der drei Veränderlichen bestimmt ist. Wenn die Anzahl der zu eliminirenden willkührlichen Functionen größer ist, so führt die Elimination im Allgemeinen auf eine Gleichung mit partiellen Differenzen von einer höhern Ordnung; aber es findet alsdann zwischen der Anzahl der eliminirten willkührlichen Functionen und der Ordnung der sich aus der Elimination ergebenden partiellen Differenzialgleichung kein bestimmtes Verhältniß mehr statt. Umgekehrt kann man nicht unmittelbar von der Ordnung einer partiellen Differenzialgleichung auf die Anzahl der willkührlichen Functionen schließen, welche ihr Integral enthalten muß, um allgemein oder vollständig zu sein, so wie man von der Ordnung einer Differenzialgleichung mit zwei Veränderlichen auf die Anzahl der willkührlichen Constanten schließt, welche ihr allgemeines Integral enthalten muß.

Es seien:

$$\alpha = f(x, y, z), \quad \beta = f_1(x, y, z)$$

zwei Functionen, deren Zusammensetzung aus x, y, z gegeben ist, und welche in der Gleichung:

$$F(x, y, z, \varphi\alpha, \psi\beta) = 0 \qquad (p)$$

unter den Zeichen der willkührlichen Functionen φ, ψ vorkommen; so werden, wenn man die Gleichungen:

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0 \qquad (q)$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2F}{dxdy} = 0, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = 0, \qquad (r)$$

bildet, die unbestimmten Functionen $\varphi'\alpha$, $\psi'\beta$, $\varphi''\alpha$, $\psi''\beta$ eingeführt, und wenn man sie mit $\varphi\alpha$, $\psi\beta$ verbindet, so hat man zwischen den sechs Gleichungen (p), (q), (r) sechs Größen zu eliminiren, was im Allgemeinen nicht auf eine partielle Differenzialgleichung führen kann, welche von der Form der Functionen φ, ψ unabhängig ist. Wenn man zu den Ableitungen der dritten Ordnung übergeht, so erhält man vier neue Gleichungen:

$$\frac{d^3F}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^3F}{dx^2dy} = 0, \quad \frac{d^3F}{dxdy^2} = 0, \quad \frac{d^3F}{dy^3} = 0,$$

und es werden nur zwei neue unbestimmte Functionen $\varphi'''\alpha$, $\psi'''\beta$ eingeführt. Man kann also, und zwar im Allgemeinen auf mehrere Arten, eine partielle Differenzialgleichung der dritten Ordnung bilden, welche von der Form der Functionen φ, ψ unabhängig ist, und von welcher die Gleichung (p) das allgemeine Integral ist. Aber es kann auch geschehen, daß sich die Functionen φ, ψ eliminiren lassen, ohne daß man zu den Ableitungen der dritten Ordnung überzugehen braucht, und daß also die Gleichung (p) das vollständige Integral einer partiellen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung ist, wovon wir weiter oben ein Beispiel an der Gleichung (k) gehabt haben.

Es ſei allgemein ν die Anzahl der in einer Gleichung mit drei Veränderlichen x, y, z vorkommenden willkührlichen Functionen und die Zuſammenſetzung jeder unter dem Zeichen der willkührlichen Function vorkommenden Größe in x, y, z gegeben; ſo hat man, wenn man mit dieſer Gleichung ihre partiellen Ableitungen bis zu der von der n^{ten} Ordnung incluſive verbindet, eine Anzahl von Gleichungen, welche durch:

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ausgedrückt wird, während die Anzahl der in dieſem Syſteme von Gleichungen vorkommenden willkührlichen Functionen und Ableitungen derſelben $= \nu(\nu+1)$ iſt. Die Elimination iſt in allen Fällen nur in ſo fern möglich, als:

$$\nu(\nu+1) < \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \text{ oder } n > 2\nu - 2,$$

d. h. man muß im Allgemeinen die Differenzirung bis zu der $(2\nu-1)^{ten}$ Ordnung fortſetzen, ſo daß die ſich aus der Elimination ergebende partielle Differenzialgleichung von der $(2\nu-1)^{ten}$ Ordnung iſt; allein ſie kann auch von einer höhern Ordnung ſein.

§. 170. Betrachten wir nun eine Gleichung mit vier Veränderlichen:

$$F[u, x, y, z, \varphi(\alpha, \beta)] = 0, \qquad (s)$$

worin φ eine willkührliche Function der beiden Größen α, β bezeichnet, deren Zuſammenſetzung aus u, x, y, z bekannt und durch die Hülfsgleichungen:

$$\alpha = f(u, x, y, z), \quad \beta = f_1(u, x, y, z)$$

gegeben iſt.

Wenn man die Gleichung (s) in Beziehung auf jede der drei Veränderlichen x, y, z differenzirt, ſo erhält man drei Gleichungen:

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0, \qquad (t)$$

worin außer der willkührlichen Function $\varphi(\alpha, \beta)$ ihre beiden partiellen Ableitungen $\frac{d\varphi}{d\alpha}$, $\frac{d\varphi}{d\beta}$ vorkommen. Nun hindert aber nichts, dieſe drei unbeſtimmten Größen zwiſchen den vier Gleichungen (s) und (t) zu eliminiren, wodurch man eine partielle Differenzialgleichung der erſten Ordnung erhält, welche von der Form der willkührlichen Function φ unabhängig iſt. Hieraus folgt umgekehrt, daß das vollſtändige Integral einer partiellen Differenzialgleichung der erſten Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen eine willkührliche Function von zwei Größen enthalten muß, wovon jede eine beſtimmte Zuſammenſetzung hat.

Wenn man das Vorhergehende verallgemeinert, ſo kann man ſagen, daß das vollſtändige Integral einer partiellen Differenzialgleichung der erſten Ordnung mit n unabhängigen Veränderlichen eine willkührliche Function von $n-1$ Größen enthalten muß, wovon jede auf eine beſtimmte Weiſe aus den $n+1$ Veränderlichen, wovon nur n unabhängig ſind, zuſammengeſetzt iſt.

Wenn man die Gleichung:

$$F[u, x, y, z, \varphi(\alpha, \beta), \psi(\gamma, \delta)] = 0$$

hätte, ſo müßte man mit der Differenzirung bis zu der vierten Ordnung fortgehen, um in allen Fällen die Elimination der willkührlichen Functionen φ, ψ und ihrer Ableitungen zu bewerkſtelligen, wo α, β, γ, δ wieder Größen bezeichnen, deren Zuſammenſetzung aus u, x, y, z bekannt iſt.

§. 171. Der einfachſte Fall iſt der, wo die Größen α, β, ... nur eine unabhängige Veränderliche, z. B. x enthalten, und in dieſem Falle kann man φx, ψx, ... ſtatt $\varphi\alpha$, $\psi\beta$, ... ſetzen, wo φ, ψ, ... wieder willkührliche Functionen bezeichnen.

Es ſei daher:

$$F(x, y, z, \varphi x, \psi x, ...) = 0$$

eine Gleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, worin n willkührliche Functionen, φx, ψx, ... vorkommen. Wenn man n mal in Beziehung auf die Veränderliche y differenzirt, ſo werden dadurch die Ableitungen der Functionen φ, ψ, ... nicht eingeführt, und man erhält folglich $n + 1$ Gleichungen, zwiſchen welchen man immer die n unbeſtimmten Functionen φx, ψx, ... eliminiren kann.

Desgleichen, wenn man die Gleichung hätte:

$$F[u, x, y, z, \varphi(x, y), \psi(x, y), ...] = 0,$$

worin wieder n willkührliche Functionen vorkommen; ſo brauchte man nur n mal in Beziehung auf die Veränderliche z zu differenziren, und man erhielte eine hinreichende Anzahl von Gleichungen, um die Elimination aller willkührlichen Functionen vornehmen zu können, welche Elimination alsdann auf dieſelbe Weiſe, wie die der willkührlichen Conſtanten in den Gleichungen mit zwei Veränderlichen bewerkſtelligt wird.

Viertes Buch.

Anwendungen der Differenzialrechnung auf die Theorie der krummen Linien und Flächen.

Erſtes Kapitel.

Von den Tangenten, den Normalen und den Aſymptoten ebener Curven. Anwendung der Polarcoordinaten.

---

1. Von den Tangenten und Normalen ebener Curven. — Differenzial des Curvenbogens.

§. 172. In allem Vorhergehenden haben wir uns der geometriſchen Conſtructionen blos zur Erläuterung der allgemeinen Principien der Theorie der Functionen bedient: aber in dem gegenwärtigen Buche wollen wir im Gegentheil die bereits erworbenen Kenntniſſe und Begriffe der Differenzialrechnung auf die geometriſche Theorie der krummen Linien und Flächen anwenden, wobei wir uns immer nur auf das Weſentlichſte dieſer Anwendungen der Differenzialrechnung auf Geometrie beſchränken müſſen. Denn die höhere Geometrie bildet ſchon an und für ſich eine ſelbſtſtändige Doctrin, welche nur in ſpeciell darüber handelnden Werken vollſtändig erörtert werden kann.

Die Aufgabe: *an Curven, deren Gleichung gegeben iſt, Tangenten zu ziehen*, wird durch die Differentialrechnung unmittelbar gelöſt, wie ſich dieſes aus dem im dritten Kapitel des erſten Buches über die Erzeugung und Bedeutung der abgeleiteten Functionen oder der Differentialquotienten Geſagten ergibt. In der That iſt dieſe Aufgabe der Conſtruction der Tangenten die erſte Veranlaſſung zur Erfindung der Differenzialrechnung geweſen, weshalb letztere auch anfangs die „*Methode der Tangenten*“ genannt wurde.

Das eleganteſte Verfahren zur Auflöſung der Aufgabe: *an eine Curve in einem gegebenen Punkte* (x, y) *eine Tangente zu ziehen*, beſteht darin, daß man die Gleichung dieſer Tangente ſucht. Es ſeien ξ, η die veränderlichen Coordinaten der geſuchten Tangente, auf dieſelben Axen und denſelben Anfangspunkt, wie die Coordinaten x, y der Curve bezogen; ſo iſt die geſuchte Gleichung der Tangente:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x),$$

denn ſie erfüllt die doppelte Bedingung: daß die durch ſie ausgedrückte gerade Linie durch den Punkt (x, y) geht und zugleich mit der Axe der x einen Winkel bildet, deſſen trigonometriſche Tangente durch $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt wird.

Die Gleichung der Normale einer Curve, d. h. der geraden Linie, welche im Punkte (x, y) auf der Tangente senkrecht ist, ist nach einem bekannten Principe der Geometrie:

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x),$$

und läßt sich auf folgende mehr symmetrische Form bringen:

$$(\eta - y)\,dy + (\xi - x)\,dx = 0.$$

Wenn man in der Gleichung der Tangente $\eta = 0$ setzt, so erhält man:

$$x - \xi = y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{y'},$$

und die Entfernung $\pm(x - \xi)$ des Fußpunktes der Ordinate von dem Punkte, worin die Tangente die Axe der Abscissen durchschneidet, wird die Subtangente genannt. Das doppelte Zeichen soll blos andeuten, daß nur die absolute Größe dieser Entfernung oder Länge in Betracht gezogen werden soll, was für ein Zeichen der aus der vorhergehenden Gleichung erhaltene Werth von $x - \xi$ auch haben mag.

Wenn man ebenso in der Gleichung der Normale $\eta = 0$ setzt, so findet man:

$$\xi - x = y\frac{dy}{dx} = yy',$$

und die Entfernung $\pm(\xi - x)$ des Punktes, worin die Normale die Axe der Abscissen schneidet, von dem Fußpunkte der entsprechenden Ordinate, wird die Subnormale genannt.

Die Ordinate y ist also die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und der Subnormale.

Zuweilen versteht man unter der Tangente und der Normale auch die zwischen der Curve und der Axe der Abscissen liegenden Stücke der Tangente und Normale, und diese Längen werden alsdann resp. ausgedrückt durch:

$$\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \pm y\sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}},$$

$$\pm\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \pm y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Für jede gegebene Curve muß man in die vorhergehenden Formeln die aus der Gleichung der Curve als Function von x abgeleiteten Werthe von y und von $y' = \frac{dy}{dx}$ substituiren.

Wenn diese Gleichung unter der Form:

$$f(x, y) = 0$$

gegeben ist, so hat man:

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0,$$

und die Gleichung der Tangente wird folglich:

$$(\eta - y)\frac{df}{dy} + (\xi - x)\frac{df}{dx} = 0, \qquad (b)$$

d. h. sie ergibt sich aus der Differenzialgleichung der Curve, wenn man darin die Differenzen $\xi - x$, $\eta - y$ für die Differenziale dx, dy setzt, was in der

That stattfinden muß, weil man die Tangente als die Verlängerung einer durch zwei einander unendlich nahe liegende Punkte gezogenen Sehne betrachten kann.

Die Gleichung der Normale ist in diesem Falle:

$$(\eta - y)\frac{df}{dx} - (\xi - x)\frac{df}{dy} = 0. \qquad (c)$$

Wenn man in den Gleichungen (b), (c) die Coordinaten ξ, η als Constanten und x, y als veränderliche Coordinaten betrachtet, so gehören diese Gleichungen zu zwei Linien, welche durch den Punkt (ξ, η) gehen und deren Durchschnittspunkte mit der Curve (a) die durch den Punkt (ξ, η) gezogenen Tangenten oder Normalen dieser Curve bestimmen.

Die Gleichungen (b) und (c) würden sich nicht ändern, wenn die Gleichung (a) die Form $f(x, y) = c$ hätte, wo c einen constanten Parameter bezeichnet, welcher durch Differenzirung verschwindet. Man kann also die Linien (b) und (c) auch als die geometrischen Oerter der Punkte betrachten, worin die von dem Punkte (ξ, η) ausgehenden geraden Linien die Curven, welche man erhält, wenn man dem Parameter c eine Reihe besonderer Werthe beilegt, berühren, oder rechtwinklich durchschneiden.

§. 173. Wenn man die Winkel, welche die Tangente mit den durch den Punkt (x, y) in dem Sinne der positiven Coordinaten zu den Axen der x und der y gezogenen Parallelen bildet, mit α, β bezeichnet, so hat man:

$$\cos.\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}},\quad \cos.\beta = \pm\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \qquad (d)$$

Wenn man die ähnlichen Winkel für die Normale mit λ, μ bezeichnet, so erhält man:

$$\cos.\lambda = \pm\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},\quad \cos.\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}. \qquad (\delta)$$

Die Zeichen dieser vier Werthe müssen so miteinander verbunden werden, daß sie der Gleichung:

$$\cos.\alpha \cos.\lambda + \cos.\beta \cos.\mu = 0$$

Genüge leisten, welche bekanntlich ausdrückt, daß die Tangente und Normale auf einander senkrecht sind.

Wenn die Gleichung der Curve unter der Form (a) gegeben ist, so hat man:

$$\frac{\cos.\alpha}{\frac{df}{dy}} = \frac{\cos.\beta}{\frac{df}{dx}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2}}.$$

§. 174. Unter der Länge eines zwischen zwei gegebenen Punkten liegenden Curvenbogens versteht man die Grenze, welcher sich die Länge einer in diesen Curvenbogen beschriebenen und von denselben Punkten begrenzten Polygonallinie ohne Ende nähert, wenn die Anzahl ihrer Seiten ohne Ende zunimmt. Wenn also die Länge des von dem Punkte (x_0, y_0), als Anfangspunkt, bis zu dem Punkte (x, y) gehenden Curvenbogens mit s bezeichnet wird, so ist s eine Function von x, welche nach der Definition der Differenzialgleichung:

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm\sqrt{1 + y'^2}\cdot dx \qquad (s)$$

Genüge leistet, wo das Zeichen + oder − genommen werden muß, je nachdem der Curvenbogen für zunehmende Werthe von x zu- oder abnimmt. Vermöge der Gleichung (s) verwandeln sich die Formeln (d), (δ) in folgende:

$$\cos.\alpha = \pm\frac{dx}{ds},\ \cos.\beta = \pm\frac{dy}{ds};\ \cos.\lambda = \pm\frac{dy}{ds},\ \cos.\mu = \pm\frac{dx}{ds}.$$

Man ſagt auch wohl: daß die Länge eines Curvenbogens die einer geraden Linie iſt, auf welche ſich der Curvenbogen genau legen ließe, wenn derſelbe einen vollkommen biegſamen und unausdehnbaren Faden bildete; allein dieſe Definition iſt, abgeſehen davon, daß ſie eigentlich einen logiſchen Zirkel enthält, mehr phyſiſch, als mathematiſch, und daſſelbe ließe ſich von jeder andern Definition der Größe s ſagen, wenn man dabei die Anwendung des Begriffes der Grenze oder des unendlich Kleinen vermeiden wollte.

Nicht ſo verhält es ſich hinſichtlich der von einer Curve eingeſchloſſenen Fläche; denn wenn man die Fläche A eines Polygones beſtimmt hat und man beſchreibt innerhalb deſſelben eine geſchloſſene krumme oder gebrochene Linie, ſo ſieht man ſofort ein, daß von A ein Theil B dieſer Größe hinweggenommen wird, ſo daß der Begriff der Grenze oder des unendlich Kleinen zur Beſtimmung oder Meſſung der Größe B nur dann erforderlich iſt, wenn der Umfang von B eine Curve iſt, und nicht vermöge der Definition dieſer Größe ſelbſt.

Wenn man die Gleichung (s) nicht zur Definition der Größe s ſelbſt nimmt, deren Begriff alsdann als a priori gegeben angeſehen wird; ſo wird die Gleichung (s) auf folgende Weiſe abgeleitet.

Es ſei mm_1 (Fig. 41) ein ſo kleiner Curvenbogen, daß die Curve innerhalb der Ausdehnung deſſelben ihre Convexität immer nach derſelben Seite kehrt, oder ihre Tangente zwiſchen m und t nicht ſchneidet; ſo nimmt man mit Archimedes als Grundſatz an, daß die Länge des Bogens mm_1 zwiſchen der der Sehne mm_1 und der der umſchließenden gebrochenen Linie mtm_1 liegt. Bezeichnet man alſo das Intervall $pp_1 = mr$ mit Δx, ſo hat man:

$$mt = \sqrt{1+y'^2}\cdot\Delta x,\quad m_1t = rt - rm_1 = y'\Delta x - \Delta y,$$

$$\text{Sehne } mm_1 = \sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}\cdot\Delta x.$$

Das Verhältniß der Länge der gebrochenen umſchließenden Linie zu der der Sehne wird folglich ausgedrückt durch:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}+y'-\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}},$$

und hat offenbar die Einheit zur Grenze. Folglich hat auch das Verhältniß:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x\sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}}$$

die Einheit zur Grenze, woraus ſich die Gleichung (s) ſofort ergibt.

§. 175. Wir wollen nun die vorhergehenden Formeln auf einige Beiſpiele anwenden. Da die Gleichung der auf ihren Mittelpunkt und auf ihre Hauptaxen bezogenen Ellipſe von der Form iſt:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (c)$$

ſo verwandelt ſich die Gleichung (b) in folgende:

$$\frac{(\xi - x)\,x}{a^2} + \frac{(\eta - y)\,y}{b^2} = 0,$$

oder vielmehr in:

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad (b_1)$$

oder endlich in:

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1. \qquad (b_2)$$

Die Gleichung (b_1) ist die einer andern Ellipse, welche durch den Punkt (ξ, η) geht und deren Durchschnittspunkte mit der Ellipse (e) die Berührungspunkte dieser Ellipse und der von dem Punkte (ξ, η) ausgehenden geraden Linien sind.

Wenn man für die Halbaxen a, b die Werthe ca, cb setzt und die Constante c sich ändern läßt, so erhält man eine Reihe ähnlicher concentrischer Ellipsen, und die Punkte, worin jede derselben von der Ellipse (b_1) geschnitten wird, sind diejenigen Punkte, worin sie von den vom Punkte (ξ, η) ausgehenden geraden Linien berührt würde.

Die Gleichung (b_2) ist die der Tangente der Ellipse (e) im Punkte (x, y), wenn man darin ξ, η als veränderliche Coordinaten betrachtet. Aber wenn man dagegen x, y als veränderlich und ξ, η als constant betrachtet, so wird diese Gleichung die einer geraden Linie, welche die Ellipse in zwei Punkten schneidet, worin sie von den vom Punkte (ξ, η) ausgehenden geraden Linien berührt wird.

Wenn man in der Gleichung (b_2) $\eta = 0$ setzt, so erhält man $\xi = \frac{a^2}{x}$ d. h. die Subtangente ist von der Axe 2b unabhängig und für die gegebene Ellipse dieselbe, als für den über der Axe 2a als Durchmesser beschriebenen Kreis. Hieraus ergibt sich eine in allen Elementarlehrbüchern der analytischen Geometrie angegebene, sehr einfache Construction der Tangente der Ellipse.

Die Gleichung der Normale der gegebenen Ellipse ist:

$$\frac{(\eta - y)\,x}{a^2} - \frac{(\xi - x)\,y}{b^2} = 0,$$

und wenn man darin $\eta = 0$ setzt, so ergibt sich daraus für den Ausdruck der Subnormale:

$$\xi - x = -\frac{b^2}{a^2}\,x,$$

d. h. ihr Zahlenwerth ist der Abscisse proportional.

Da die Gleichung der auf ihre Axe und ihren Scheitel bezogenen Parabel folgende ist:

$$y^2 = 2px,$$

so ist die Gleichung ihrer Tangente und Normale, resp.:

$$\eta y - p(\xi + x) = 0, \quad p(\eta - y) + y(\xi - x) = 0.$$

Die Subtangente der Parabel ist der doppelten Abscisse und die Subnormale dem Parameter oder der doppelten Entfernung des Scheitels vom Brennpunkte der Parabel gleich.

Die Gleichungen der Tangente und Normale der logarithmischen Curve:

$$y = \log. x$$

ſind reſp.:

$$\eta - y = \frac{1}{x}(\xi - x),\ y - y = x(x - \xi).$$

Durch die Vertauſchung der Axen verwandelt ſich die erſte Gleichung in folgende:

$$\xi - x = \frac{1}{y}(\eta - y),$$

und wenn man darin $\eta = 0$ ſetzt, ſo erhält man $x - \xi = 1$, d. h. die Subtangente hat einen conſtanten Werth. Dieſe Eigenſchaft gibt die wahre geometriſche Definition der Curve an die Hand, wovon nur eine arithmetiſche Definition gegeben wird, ſo lange man blos ſagt, daß die Abſciſſen die Logarithmen der zugehörigen Ordinaten ſind.

§. 176. Unter den Curven, welche man transcendente genannt hat, weil ihre Orthogonalgleichungen Exponential-logarithmiſche, oder Kreisfunctionen enthalten, iſt die Cycloide in der Geſchichte der Mathematik die berühmteſte, und zugleich wegen ihrer vielen intereſſanten Eigenſchaften die merkwürdigſte. So nennt man nämlich die Curve, welche ein beliebiger Punkt M (Fig. 42) eines Kreiſes NMN' beſchreibt, welcher ohne Gleiten auf einer unbegrenzten geraden Linie X'X, der Baſis der Cycloide fortrollt, d. h. ſo fortrollt, daß die Länge eines beliebigen Bogens MN der Länge des Stückes ON der geraden Linie, womit alle Punkte des Bogens MN ſucceſſive zuſammenfallen, gleich iſt. Wir wollen den Halbmeſſer CM = R, den veränderlichen Winkel MCN = φ, die Abſciſſe des Punktes M, nämlich OP = x und die rechtwinklige Ordinate PM = y ſetzen, indem der Anfangspunkt O der Punkt iſt, wo der Punkt M die Baſis X'X berührt, ſo haben wir nach der Definition der Cycloide:

$$ON = R\varphi,\ PN = MI = R \sin.\varphi,\ PM = IN = R(1 - \cos.\varphi),$$

woraus folgt:

$$x = R(\varphi - \sin.\varphi), \qquad (f)$$

$$y = R(1 - \cos.\varphi). \qquad (g)$$

Jede der Gleichungen (f) und (g) kann für die Gleichung der Cycloide genommen werden, indem die eine die Coordinaten x, φ und die andere die Coordinaten y, φ enthält. Nach der Beſchreibungsart der Curve kann der erzeugende Kreis auf der Baſis X'X zur Rechten und Linken des Punktes O eine unbegränzte Anzahl von Umwälzungen machen, und die geometriſche Continuität fordert folglich, daß man die Cycloide als aus unendlich vielen, einander gleichen Bogen, wie OMQR, beſtehend betrachte. Die gegenſeitige Entfernung OR der End- oder Fußpunkte eines ganzen Cycloidenbogens iſt der Länge des Umfanges des erzeugenden Kreiſes gleich und die der Mitte von OR entſprechende Ordinate SQ iſt dem Durchmeſſer des erzeugenden Kreiſes gleich, und theilt den Cycloidenbogen OQR in zwei ſymmetriſche Theile.

Um dieſe unbegrenzte Bewegung des Erzeugungskreiſes ausdrücken zu können, muß man annehmen, daß die Veränderliche φ ſowohl poſitiv, als negativ genommen werden, und ihre abſolute Größe eine beliebige Anzahl ganzer Umdrehungen erreichen und auch überſchreiten kann. Dieſes vorausgeſetzt, drückt jede der Gleichungen (f) und (g) die Cycloide wegen der Periodicität der Functionen sin. φ, cos. φ in der ganzen Ausdehnung ihres Laufes oder Zuges aus. Es findet daher zwiſchen der geometriſchen Erzeugung der Curve und der analytiſchen Unterſuchung ihrer Gleichung eine genaue Correlation ſtatt, was von

der durch die Beſchreibung der Curve gegebenen oder beſtimmten Wahl der unabhängigen Veränderlichen φ herrührt (§. 11).

Geſetzt nun, man wollte die Gleichung der Cycloide zwiſchen den rechtwinkligen Coordinaten x, y haben, ſo ergibt ſich aus der Gleichung (g):

$$\cos.\varphi = \frac{R-y}{R}, \text{ folglich } \sin.\varphi = \pm\frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{R},$$

wo die Wurzelgröße poſitiv, oder negativ genommen werden muß, jenachdem $\sin.\varphi$ einen poſitiven oder negativen Werth hat. Die Gleichung zwiſchen x und y iſt:

$$x = R \text{ arc. cos. } \left(\frac{R-y}{R}\right) \pm \sqrt{2Ry-y^2}; \qquad (h)$$

aber jedem Werthe von x entſpricht nur einer der unendlich vielen Werthe des Ausdruckes:

$$R \text{ arc. cos. } \left(\frac{R-y}{R}\right)$$

und außerdem dürfen die beiden Zeichen der Wurzelgröße nicht zugleich angewandt werden. Man muß das obere Zeichen nehmen, wenn der Punkt (x, y) dem Bogen OQ angehört, und das untere Zeichen, wenn dieſer Punkt zu dem Bogen QR gehört, indem man dieſelbe Vertauſchung der Zeichen vornimmt, ſo oft man durch den Scheitel, oder durch den Fußpunkt des Cycloidenbogens geht. Wenn man die beiden Zeichen zu gleicher Zeit anwendete, ſo würde die Gleichung (h) zwei Cycloiden von entgegengeſetzter Lage ausdrücken (Fig. 43), welche hinſichtlich ihrer geometriſchen Erzeugung in keiner Verbindung miteinander ſtehen, und die gewöhnliche Correlation zwiſchen der Geometrie und Analyſis, wie man ſie z. B. bei den Kegelſchnitten findet, würde hier nicht ſtattfinden. Später werden wir auf das Princip und auf die Einſchränkungen dieſes Zuſammenhanges zwiſchen den analytiſchen Formeln und den geometriſchen Geſetzen der Beſchreibung der Linien zurückkommen.

§. 177. Zur Beſtimmung der Tangente der Cycloide könnte man die Gleichung (h) differenziren; allein es iſt einfacher, die Veränderliche φ beizubehalten und mit den Gleichungen (f), (g) zu operiren, wodurch man erhält:

$$dx = R(1-\cos.\varphi)\,d\varphi, \quad dy = R\sin.\varphi\,d\varphi,$$

und folglich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin.\varphi}{1-\cos.\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{y} = \pm\sqrt{\frac{2R-y}{y}}.$$

Dieſer Werth wird $=0$, wenn $y=2R$ iſt, was an den Scheiteln der Cycloidenbogen ſtattfindet und er wird unendlich, wenn y verſchwindet. Die Fußpunkte der Cycloidenbogen ſind folglich Rückkehrpunkte, worin die Tangente auf der Baſis der Cycloide ſenkrecht wird. Für den Werth der Subnormale hat man:

$$\sqrt{2Ry-y^2} = R\sin.\varphi.$$

Die Normale MN der Cycloide durchſchneidet alſo die Baſis X′X in dem Punkte N, wo dieſe gerade Linie von dem Erzeugungskreiſe berührt wird, und die Tangente TM geht durch den andern Endpunkt N′ des auf der Baſis X′X ſenkrechten Durchmeſſers. Für die Länge der Normale MN hat man folglich den ſehr einfachen Ausdruck:

$$MN = \sqrt{2Ry},$$

wovon wir ſpäter Gebrauch machen werden. Bemerken kann man auch, daß die Länge MN in der Nähe des Punktes O immer mehr und mehr abnimmt, obgleich ſich die Normale immer mehr und mehr gegen die Axe der x neigt.

2. Von den Aſymptoten ebener Curven.

§. 178. Unter einer Aſymptote einer ebenen Curve verſteht man eine gerade Linie, welcher ſich ein auf der Curve bewegender Punkt ohne Ende nähert, ohne ſie jemals zu erreichen, ſo daß das von dieſem Punkte auf die gerade Linie gefällte Perpendikel δ kleiner werden kann, als jede endliche Größe, ohne jemals ganz zu verſchwinden, wozu erforderlich iſt, daß der Curvenzweig, worauf ſich der Punkt bewegt, in's Unendliche fortläuft.

Da der Unterſchied der derſelben Abſciſſe entſprechenden Ordinate der Curve und ihre Aſymptote dem Quotienten aus der Länge δ und dem Coſinus des Winkels, welchen die Aſymptote mit der Axe der x bildet, gleich iſt; ſo convergirt derſelbe gegen Null, wenn x unendlich groß wird. Zu gleicher Zeit convergirt der Winkel, welchen die Tangente der Curve mit der Axe der x bildet, gegen eine Grenze, welche nichts anders iſt, als der Winkel, den dieſelbe Axe mit der Aſymptote bildet.

Die Gleichung (b) wird die einer Aſymptote, wenn die Vorausſetzung von $x = \infty$ oder $y = \infty$ alle Glieder verſchwinden macht, worin dieſe Veränderlichen vorkommen, ſo daß die Gleichung nur noch die veränderlichen Coordinaten ξ, η und conſtante Parameter enthält. Man ſubſtituirt alſo in dieſe Gleichung den aus der Gleichung der Curve abgeleiteten Werth von y, durch x ausgedrückt, und ſetzt dann $x = \pm\infty$; ſo erhält man alle nicht zu der Axe der y parallelen Aſymptoten. Dieſe letztere findet man, wenn man den Werth von x als Function von y ſubſtituirt und dann $y = \pm\infty$ ſetzt.

Wenn wir die auf ihren Mittelpunkt und auf ihre Axen bezogene Hyperbel nehmen, deren Gleichung folgende iſt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ſo erhalten wir für die Gleichung der Tangente:

$$\frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} = 1.$$

Wenn man in dieſe letztere Gleichung den Werth von y als Function von x ſubſtituirt, ſo verwandelt ſie ſich in folgende:

$$\frac{\xi}{a^2} \pm \frac{\eta}{b}\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x},$$

und wenn man darin $x = \pm\infty$ ſetzt, ſo reducirt ſie ſich auf die Gleichung:

$$\eta = \pm\frac{b}{a}\xi$$

der beiden Aſymptoten der Hyperbel, wie aus der Lehre von den Kegelſchnitten bekannt iſt.

Wenn man in der Gleichung:

$$\eta - y = \frac{1}{x}(\xi - x)$$

der Tangente der logarithmiſchen Linie $y = \log. x$ die Abſciſſe $x = \pm\infty$ ſetzt, nachdem für y ſein Werth als Function von x ſubſtituirt iſt: ſo erhält

man keine Aſymptoten; aber wenn man dagegen den Werth von x als Function von y in dieſe Gleichung ſubſtituirt, ſo verwandelt ſie ſich in folgende:

$$(\eta - y + 1)\, e^{y} = \xi,$$

und wenn man hierin $y = -\infty$ ſetzt, ſo reducirt ſie ſich auf $\xi = 0$. Folglich iſt die Axe der y eine Aſymptote der Curve.

Die vorhergehende Methode bedarf in dem Falle einer Modification, wo ſich die Gleichung der Curve nicht in Beziehung auf y und auf x auflöſen läßt. Es ſei:

$$y = mx + n$$

die Gleichung einer nicht zu der Axe der y parallelen Aſymptote, ſo ergibt ſich daraus:

$$\frac{y}{x} = m + \frac{n}{x},$$

und wenn x unendlich groß wird; ſo convergirt der Werth des Verhältniſſes $\frac{y}{x}$ gegen die Conſtante m. Wenn man alſo in der Gleichung der Curve $y = \alpha x$ ſetzt, und die Grenze der neuen Veränderlichen α für $x = \pm\infty$ ſucht; ſo iſt dieſe Grenze, wenn ſie exiſtirt, ein Werth der Conſtanten m. Setzt man alsdann in der Gleichung der Curve:

$$y - mx = \beta$$

und ſucht ebenfalls die Grenze, gegen welche die Veränderliche β convergirt, wenn x gegen die Werthe $\pm\infty$ convergirt, ſo iſt dieſe Grenze ein Werth der Conſtanten n.

Eben ſo fände man die nicht zu der Axe der x parallelen und folglich die zu der Axe der y parallelen Aſymptoten.

Wir wollen z. B. die Curve betrachten, welche das Descartes'ſche Folium genannt wird (Fig. 44) und deren Gleichung:

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

bereits an einem andern Orte (§. 152) unterſucht iſt; ſo wird die Gleichung zwiſchen α und x:

$$\alpha + 1 = \frac{3a\alpha}{x},$$

woraus für die Grenze von α folgt $m = -1$. Setzt man alsdann $y + x = \beta$, ſo erhält man für die Gleichung zwiſchen β und x:

$$3(\beta + \alpha) - \frac{3(\beta^2 + a\beta)}{x} + \frac{\beta^3}{x^2} = 0,$$

woraus ſich $n = -a$ für die Grenze von β ergibt. Mithin iſt die gerade Linie $y + x + a = 0$ eine Aſymptote der gegebenen Curven.

3. Anwendung der Polarcoordinaten.

§. 179. Man geht von der Gleichung einer Curve zwiſchen rechtwinkligen Coordinaten zu ihrer Gleichung zwiſchen Polarcoordinaten über, wenn man ſetzt:

$$x = r\cos.\varphi,\quad y = r\sin.\varphi,$$

wo r alsdann den vom Anfangspunkte der Coordinaten, welcher jetzt der Pol genannt wird, nach dem Punkte (y, x) gezogenen Radiusvector und φ den Winkel bezeichnet, welchen dieſer Radiusvector mit der Halbaxe der poſitiven x bildet. Aus dieſen Gleichungen ergibt ſich:

$$dx = dr \cos.\varphi - r \sin.\varphi d\varphi, \quad dy = dr \sin.\varphi + r \cos.\varphi d\varphi, \qquad (i)$$

und folglich hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\varphi}\text{tang.}\varphi + r}{\frac{dr}{d\varphi} - r\,\text{tang.}\varphi}, \quad \frac{dr}{d\varphi} = r \cdot \frac{1 + \frac{dy}{dx}\text{tang.}\varphi}{\frac{dy}{dx} - \text{tang.}\varphi}.$$

Aber wenn man den Winkel, welchen die Tangente im Punkte (x, y) mit der Halbaxe der positiven x bildet, mit θ bezeichnet, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\theta, \quad \frac{dr}{rd\varphi} = \frac{1 + \text{tang.}\theta \cdot \text{tang.}\varphi}{\text{tang.}\theta - \text{tang.}\varphi} = \cot.(\theta - \varphi). \qquad (j)$$

Der Winkel, welchen die Tangente der Curve mit dem nach dem Berührungspunkte gehenden Radiusvector bildet, ist $= (\theta - \varphi)$. Man kann folglich diesen Winkel vermittelst der Formel (j) berechnen und die Tangente construiren, wenn die Gleichung der Curve zwischen Polarcoordinaten gegeben ist. Wenn man durch den Pol ein Perpendikel auf den Radiusvector zieht, so schneidet dasselbe die Tangente in einem Punkte, dessen Abstand vom Pole ausgedrückt wird durch:

$$p = r\,\text{tang.}(\theta - \varphi) = r^2 \frac{d\varphi}{dr}, \qquad (k)$$

und man nennt die Länge p nach der Analogie zuweilen die Polarsubtangente.

Die Formel (j) läßt sich durch eine sehr einfache Construction direct erhalten; denn es seien m, m, (Fig. 45) zwei einander unendlich nahe liegende Punkte einer Curve, so daß die gerade Linie mt, welche eine Tangente der Curve im Punkte m ist, als die Verlängerung des unendlich kleinen Bogens mm_1 betrachtet werden kann; O sei der Pol und OX die gerade Linie, von welcher aus die Winkel φ gezählt werden. Wenn man mit dem Halbmesser Om den unendlich kleinen Kreisbogen $m\mu$ beschreibt, so hat man $m\mu = rd\varphi$, $\mu m_1 = dr$, und man kann $m\mu m_1$ als ein geradliniges, in μ rechtwinkliges Dreieck betrachten, welches gibt:

$$\text{tang.}\,\mu m m_1 = \frac{dr}{rd\varphi}.$$

Man kann aber den unendlich kleinen Sector $Om\mu$ auch als ein in m rechtwinkliges Dreieck betrachten, und folglich ist:

$$\text{tang.}\,\mu m m_1 = \cot.(\theta - \varphi).$$

§. 180. Da die Länge eines Curvenbogens, von einem auf der Curve genommenen festen Punkte aus gezählt, eine Größe ist, welche nicht von dem angewandten Coordinatensysteme abhängt, so braucht man, um den Ausdruck von ds in Polarcoordinaten zu erhalten, für dx und dy nur ihre aus den Gleichungen (i) abgeleiteten Werthe in die Formel:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

zu substituiren, wodurch man erhält:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \qquad (l)$$

Die vorhergehende Construction gibt auch dieses Resultat sehr einfach, weil man mm_1 nur als die Hypotenuse des in μ rechtwinkligen Dreiecks $m\mu m_1$ zu betrachten braucht.

Unter der von einer auf Polarcoordinaten bezogenen Curve eingeſchloſſenen Fläche verſteht man die Fläche, welche zwiſchen der Curve, dem feſten und dem beweglichen Radiusvector Om liegt. Wenn alſo der bewegliche Radiusvector aus der Lage Om in die unendlich wenig davon verſchiedene Lage Om_1 übergeht, ſo nimmt die von der Curve eingeſchloſſene Fläche, welche wir mit u bezeichnen wollen, um die Fläche des unendlich kleinen Dreiecks, Omm_1, worin Om_1 als die Grundlinie $m\mu$ als die Höhe betrachtet werden kann, zu. Man hat alſo:

$$du = \frac{1}{2}(r + dr)\, r d\varphi,$$

und wenn man die unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung unberückſichtigt läßt:

$$du = \frac{1}{2} r^2 d\varphi. \qquad (m)$$

Das Differenzial derſelben Fläche, aber in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt, iſt:

$$du = \frac{1}{2}(x dy - y dx),$$

weil:

$$r^2 = x^2 + y^2,\ d\varphi = d\left(\text{arc.tg}\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \qquad (n)$$

iſt. Wegen der Wichtigkeit der Formeln (m), (n) in der Mechanik und Aſtronomie kann es wünſchenswerth erſcheinen, ſie durch die Methode der Grenzen abzuleiten. Wir wollen daher bemerken, daß, wenn der Radiusvector aus der Lage Om in die Lage Om_1 übergeht, die Veränderlichen r, φ reſp. um Δr, $\Delta\varphi$ und die Curvenfläche um den Sector $Omm_1 = \Delta u$ zunehmen. Nun liegt aber die Fläche dieſes Sectors zwiſchen den Flächen der beiden Kreisſectoren, welche denſelben Winkel am Mittelpunkte und die Halbmeſſer r, $r + \Delta r$ haben, d. h. man hat, wenn Δr als poſitiv betrachtet wird:

$$\Delta u > \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi,\ \Delta u < \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\varphi.$$

Aber das Verhältniß:

$$\frac{\frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\varphi}{\frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi}$$

hat die Einheit zur Grenze, wenn $\Delta\varphi$, Δr gegen Null convergiren, und folglich hat das Verhältniß:

$$\frac{\Delta u}{\frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi}$$

auch die Einheit zur Grenze, woraus ſich die Gleichung (m) ergibt.

§. 181. Wenn die Gleichung einer Curve zwiſchen Polarcoordinaten die Form $r = f\varphi$ hat, wo $f\varphi$ eine Function iſt, welche für alle reelle Werthe von φ reell bleibt, und mit φ ohne Ende zu- oder abnimmt; ſo wird die Curve eine Spirale genannt. Sie ſchneidet jede vom Pole aus gezogene un-

bestimmt verlängerte gerade Linie in unendlich vielen Punkten, und der Bogen, welcher zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchschnittspunkten der Curve mit demselben Radiusvector liegt, wird eine Windung genannt. Uebrigens haben die geometrischen Eigenschaften dieser Curven fast nur theoretisches Interesse.

Die sogenannte Archimedische Spirale, deren Gleichung folgende ist:

$$r = a\varphi,$$

hat die einfachste Form. Man kann sich vorstellen, daß sie von einem Punkte m (Fig. 46) beschrieben wird, welcher sich mit einer constanten Geschwindigkeit auf einer durch den Pol O gehenden geraden Linie MN fortbewegt, während sich diese gerade Linie selbst mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit um den Pol dreht. Auch muß man annehmen, daß, wenn der Punkt m durch den Pol geht, die bewegliche gerade Linie MN mit der festen geraden Linie OX, von welcher aus die Winkel φ gezählt werden, zusammenfällt.

Den Parameter a, welcher die Länge ausdrückt, die der Punkt m auf der geraden Linie MN durchläuft, während diese einen Winkel beschreibt, welcher sich zu der halben Umdrehung oder zu 180° wie 1 zu π verhält, kann man immer als positiv betrachten. Wenn die Constante a positiv ist, so wird r mit φ negativ, und nach dem Gesetze der Bewegung ist einleuchtend, daß die negativen Werthe des Radiusvectors nach einer der Richtung der positiven Werthe gerade entgegengesetzten Richtung genommen werden müssen. Wenn z. B. OM mit OX den positiven Winkel MOX bildet, so wird der Radiusvector von O nach m gemessen; aber vorher bildete OM mit OX den negativen Winkel M′OX und der bewegliche Punkt m befand sich in m′, so daß der Radiusvector Om′ in dem entgegengesetzten Sinne von OM′ genommen werden muß.

Die Archimedische Spirale enthält also zwei Systeme entgegengesetzter Windungen, welche sich im Anfangspunkte vereinigen. Wenn man eins dieser Systeme hinwegließe, so würde die Curve im Anfangspunkte plötzlich unterbrochen, und das Gesetz der Stetigkeit der zusammengesetzten Bewegung, wodurch die Curve beschrieben wird, bliebe unberücksichtigt.

Die Gleichung dieser Spirale gibt:

$$\text{tang.}\,(\theta - \varphi) = \frac{r}{a} = \varphi,$$

so daß die Curve die gerade Linie OX im Anfangspunkte berührt. Ferner hat man nach der Formel (k):

$$p = \frac{r^2}{a} = a\varphi^2.$$

Es sei $R = 2a\pi$, so daß der Radiusvector bei jeder Umdrehung des beschreibenden Punktes um R zunimmt, so erhält man:

$$r = \frac{a}{\varphi} \qquad (p)$$

woraus $\text{tang.}\,(\theta - \varphi) = -\varphi$ folgt. Diese Curve (Fig. 47) wird die hyperbolische Spirale genannt; sie macht um den Pol, welchem sie sich ohne Ende nähert, ohne denselben jemals zu erreichen, weil man der Größe φ einen unendlichen Werth beilegen müßte, wenn r verschwinden sollte, unendlich viele Windungen. Sie hat die gerade Linie, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten $y = a$ ist, zur Asymptote, indem der Winkel φ von der Halbaxe der positiven x aus gezählt wird. Denn die Gleichung (p) wird in diesem Coordinatensysteme:

$$y = a \frac{\sin. \varphi}{\varphi},$$

woraus $y = a$ für $\varphi = 0$ folgt.

Wenn man auch die negativen Werthe von φ berückſichtigt und die ihnen entſprechenden negativen Werthe von r conſtruirt, wie bereits bei der Archimed'ſchen Spirale bemerkt wurde, ſo bekommt die logarithmiſche Spirale zwei ſymmetriſche Zweige. Da aber zwiſchen den beiden ſo conſtruirten Zweigen immer eine Unterbrechung der Stetigkeit ſtattfindet, ſo bleibt dieſe Erweiterung der Conſtruction der Gleichung (p) rein conventionell, und entſpringt, wie bei der Archimed'ſchen Spirale, nicht aus der Nothwendigkeit der Erhaltung der Stetigkeit der Bewegung, durch welche die Curve beſchrieben wird.

Die logarithmiſche Spirale iſt diejenige, deren Gleichung folgende iſt:

$$\varphi = \frac{1}{m} \log. r, \quad \text{oder} \quad r = e^{m\varphi}.$$

Sie macht, wie die hyperboliſche Spirale, unendlich viele Windungen um den Pol, ohne ihn jemals zu erreichen; aber ſie hat keine Aſymptote. Die Formel (j) gibt für dieſe Curve:

$$\cot. (\theta - \varphi) = m,$$

woraus folgt, daß der Radiusvector mit der Tangente einen conſtanten Winkel bildet, welche merkwürdige Eigenſchaft man zur geometriſchen Definition der Curve nehmen kann.

Zweites Kapitel.

Theorie der ebenen Umhüllungslinien.

§. 182. Es ſei:

$$F(x, y, a) = 0, \qquad (a)$$

die Gleichung unendlich vieler Curven, welche ſich nur durch den Werth des Parameters a von einander unterſcheiden (§. 162), und:

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (b)$$

ſei die Differenzialgleichung, welche dieſer Reihe von Curven entſpricht und erhalten wird, wenn man die Conſtante a zwiſchen der Gleichung (a) und ihrer erſten Ableitung eliminirt; ſo kann es geſchehen, daß die in Rede ſtehenden Curven einander nicht ſchneiden, wie wenig die ſucceſſiven, dem Parameter a beigelegten Werthe auch von einander verſchieden ſein mögen. Dieſer Fall findet jedesmal ſtatt, wenn man aus der Gleichung (b) nur einen einzigen reellen Werth für y' ableiten kann, was für reelle Werthe x und y auch beigelegt ſein mögen, weil, wenn mehrere der Curven (a) ſich in einem Punkte (x_0, y_0) ſchnitten, die Werthe x_0, y_0 für y' eben ſo viele verſchiedene Werthe geben müßten, als ſich in dieſem Punkte Curven durchſchneiden, indem die Tangenten dieſer Curven im Durchſchnittspunkte verſchiedene Neigungen gegen die Abſciſſenaxe hätten.

Wenn man z. B. $x^2 + y^2 - a = 0$ ſetzt, ſo ſind die fraglichen Curven concentriſche Kreiſe, welche keinen gemeinſchaftlichen Punkt haben können, wel-

chen Werth der Unterſchied der Halbmeſſer auch haben mag. Die Gleichung (b) wird in dieſem Falle: $x + yy' = 0$ und ſie gibt für y' nur einen einzigen reellen Werth für alle reelle Werthe von x und y, wie es auch der Fall ſein muß. Für $x = 0$, $y = 0$ erſcheint zwar der Werth von y' unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$; aber wenn man zur Beſtimmung des wahren Werthes von y' die Methode in §. 142 anwendet, ſo kommt man auf die Gleichung $y'^2 = -1$, deren Wurzeln imaginär ſind.

Es kann auch geſchehen, daß die in der Gleichung (a) enthaltenen Linien ſich alle in demſelben Punkte ſchneiden, und dieſes muß ſtattfinden, wenn die Werthe der Coordinaten dieſes Punktes vermöge der Gleichung (b) für y' einen wirklich unbeſtimmten Werth geben. So gehört z. B. die Gleichung $y - ax = 0$ einer Reihe gerader Linien an, welche ſich alle im Anfangspunkte der Coordinaten durchſchneiden und da die Gleichung (b) in dieſem Falle $y'x - y = 0$ wird, ſo findet man, daß die Unbeſtimmtheit von y' für die Werthe $x = 0$, $y = 0$ nicht gehoben werden kann.

§. 183. Wenn dagegen die Gleichung (b) ſo beſchaffen iſt, daß ſie für unendliche Syſteme reeller Werthe von x und y mehrere reelle Werthe für y' gibt, ſo durchſchneiden ſich die Curven (a) in einem, oder in mehreren Punkten. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, daß zwei dieſer Curven nur einen einzigen Durchſchnittspunkt haben, wodurch in der Unterſuchung nichts geändert, der Vortrag aber erleichtert wird.

Es ſeien a und $a + \Delta a$ zwei verſchiedene Werthe des Parameters a, ſo ſind die Gleichungen der dieſen beſondern Werthen des Parameters a entſprechenden Curven:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (a)$$

$$F(x, y, a + \Delta a) = 0 \qquad (a_1)$$

und die Coordinaten des Durchſchnittspunktes ſind die aus dieſen beiden Gleichungen abgeleiteten Werthe von x, y. Dieſe Coordinaten ändern ſich, und der Punkt verrückt ſich auf der erſten Curve, wenn man Δa immer kleiner und kleiner nimmt. Geht man zu der Grenze über, indem man Δa unendlich klein nimmt; ſo verwandelt ſich die Gleichung (a_1) in folgende:

$$F(x, y, a) + \frac{dF}{dx} da = 0$$

ſo daß man ſtatt der Gleichungen (a), (a_1) die beiden folgenden hat:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (a)$$

$$\frac{dF}{da} = 0, \qquad (a')$$

und die aus dieſen letzten Gleichungen abgeleiteten Werthe von x, y ſind die Grenzen, welchen ſich die Werthe der aus den Gleichungen (a), (a_1) abgeleiteten Werthe derſelben Coordinaten ohne Ende nähern, wenn man Δa ohne Ende abnehmen läßt. Mit andern Worten: der ſo beſtimmte Punkt (x, y) iſt der Durchſchnittspunkt zweier einander unendlich naheliegender Curven, deren Gleichungen reſp. folgende ſind:

$$F(x, y, a) = 0,$$

$$F(x, y, a + da) = 0.$$

Dieſer Punkt verrückt ſich, wenn man den Werth des Parameters verändert; er beſchreibt in der Ebene der Curven eine ſtetige Linie, wenn man dieſen Parameter ſich ſtetig ändern läßt, und nach den erſten Begriffen der analytiſchen Geometrie wird die Gleichung dieſer Linie:

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (\alpha)$$

durch die Elimination von a zwiſchen den Gleichungen (a), (a') erhalten.

Die Linie (α) hat die merkwürdige Eigenſchaft, daß ſie alle Linien der Reihe (a) berührt; und in der That iſt die Gleichung (α) nichts anders, als die Gleichung (a), worin für a ſein aus der Gleichung (a') abgeleiteter Werth als Function von x, y geſetzt iſt. Man kann daher, ſtatt unmittelbar die Gleichung (α) zu differenziren, um die Tangente der durch dieſe Gleichung ausgedrückten Curve zu beſtimmen, die Gleichung (a) differenziren, indem man die Größe a nicht mehr als einen conſtanten Parameter, ſondern als eine Function der Veränderlichen x, y betrachtet, und man hat daher, weil y ſelbſt eine Function von x iſt:

$$\frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx} + y' \frac{da}{dy}\right) = 0,$$

oder blos:

$$\frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} = 0,$$

weil der für a zu ſubſtituirende Ausdruck mit x, y der Gleichung (a') Genüge leiſtet. Die Ableitung y' hat folglich für den gemeinſchaftlichen Punkt der beiden Curven (a), (α) denſelben Werth, welche der beiden Curven man auch betrachten mag, d. h. dieſe beiden Curven haben in dieſem Punkte eine gemeinſchaftliche Tangente, oder berühren einander.

Die Curven (a) werden die umhüllten Curven und die Curve (α) wird die Umhüllungscurve genannt, weil ſie die ſämmtlichen Curven (a) berührt oder umhüllt. Man nennt auch die Umhüllungscurve wohl die Berührungscurve, weil ſie der geometriſche Ort der Berührungspunkte je zweier einander unendlich nahe liegender umhüllter Curven iſt, oder was eben ſo viel heißt, weil der Durchſchnittspunkt zweier einander immer näher kommender umhüllter Linien ſich ohne Ende der Umhüllungslinie nähert, und zugleich die Tangenten der beiden umhüllten Linien im Durchſchnittspunkte ſich ohne Ende einander nähern.

§. 184. Um die Begriffe an einem Beiſpiele zu fixiren, wollen wir die Gleichung:

$$y = ax - \frac{1+a^2}{2p} x^2 \qquad (c)$$

nehmen, welche die Parabel ausdrückt, die ein ſchwerer materieller Punkt beſchreibt, der vom Anfangspunkte der Coordinaten aus unter einem Winkel aufwärts geworfen wird, deſſen trigonometriſche Tangente = a iſt, indem die Ordinaten y in verticaler Richtung von unten nach oben gemeſſen werden. *)

Wenn man den Wurfwinkel, und folglich den Parameter a ſich ſtetig ändern läßt, ſo erhält man unendlich viele Parabeln, deren Umhüllungslinie nach den obigen Formeln folgende Gleichung hat:

$$x^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - y\right), \text{ oder } p^2 - 2py - x^2 = 0, \qquad (\gamma)$$

ſo daß dieſe Umhüllungslinie eine andere Parabel iſt, deren Brennpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt (Fig. 48).

Es kann geſchehen, daß die Umhüllungslinie (α) einen Theil der Curven (a) berührt, und einen andern Theil dieſer Curven nicht. Wenn ſich z. B.

*) Traité de Mécanique par *Poisson*, T. I. p. 397.

der Mittelpunkt eines Kreiſes von veränderlichem Halbmeſſer auf der Abſciſſenaxe fortbewegt (Fig. 49), ſo daß die Abſciſſe OP des Mittelpunktes dieſes Kreiſes und ſein Halbmeſſer PM die Abſciſſe und Ordinate der Ellipſe AB A′B′ ſind, deren Gleichung folgende iſt:

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1;$$

ſo iſt die gemeinſchaftliche Gleichung der in Rede ſtehenden Reihe von Kreiſen:

$$(x - a)^2 + y^2 - \frac{n^2}{m^2}(m^2 - a^2) = 0,$$

wo a die Abſciſſe des Mittelpunktes bezeichnet, und hieraus ergibt ſich für die Gleichung der Umhüllungscurve:

$$\frac{x^2}{m^2 + n^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

welche folglich eine zweite zu der erſten concentriſche Ellipſe $\alpha B \alpha' B'$ iſt, die dieſelbe Axe BB′ und die Axe $\alpha\alpha' > AA'$ hat. Für alle zwiſchen $\frac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}}$ und m liegende Werthe von a berühren aber die einander unendlich nahe liegenden Kreiſe ſich unter ſich und auch die Umhüllungsellipſe nicht mehr, weil die Gleichungen (a), (a′) geben:

$$x = \frac{a(m^2+n^2)}{m^2}, \quad y = \pm n\sqrt{1 - \frac{(m^2+n^2)a^2}{m^4}},$$

woraus ſich für y ein imaginärer ergibt, ſobald a größer wird als $\frac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

§. 185. Wenn eine Linie durch eine Gleichung:

$$F(x, y, a, b) = 0$$

gegeben iſt, worin zwei Parameter a, b vorkommen, ſo kann man zwiſchen a, b einen ſolchen Zuſammenhang feſtſtellen, daß die durch die ſtetige Veränderung des Parameters a erzeugten umhüllten Linien eine gegebene Linie:

$$\varphi(x, y) = 0$$

zur Umhüllungslinie haben. Da in dieſem Falle die Ableitungen von F und φ für y′ denſelben Werth geben müſſen, ſo hat man, wenn man y′ zwiſchen dieſen Ableitungen eliminirt:

$$\frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

und die Elimination von x, y zwiſchen den drei vorhergehenden Gleichungen führt endlich auf die geſuchte Gleichung zwiſchen den Parametern a, b.

Es ſei z. B. die Gleichung:

$$y^2 + 2ax + b = 0$$

einer Parabel gegeben, deren Axe mit der Axe der x zuſammenfällt, und es ſei:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

die Gleichung eines Kreiſes, welcher die Berührungslinie aller durch die erſte Gleichung ausgedrückten Parabeln werden ſoll, wenn man darin a ſich ändern läßt, nachdem zwiſchen a und b ein ſchicklicher Zuſammenhang feſtgeſtellt iſt; ſo hat man, wenn man dieſe beiden Gleichungen differenzirt:

$$yy' + a = 0, \quad x + yy' = 0,$$

woraus $x = a$ folgt. Substituirt man dieſen Werth von x in die Gleichung der Parabel und in die des Kreiſes, ſo erhält man:

$$y^2 + 2a^2 + b = 0, \quad y^2 + a^2 - r^2 = 0,$$

und folglich:

$$b = -(a^2 + r^2),$$

ſo daß die Gleichung der umhüllten Linien, worin der Parameter a willkührlich bleibt, folgende Form annimmt:

$$y^2 + 2ax - (a^2 + r^2) = 0.$$

§. 186. Es kann geſchehen, daß die Umhüllungslinie eine der umhüllten Linien iſt, oder daß ſich die Gleichung der erſteren dadurch aus der allgemeinen Gleichung der letztern ergibt, daß man dem veränderlichen Parameter einen beſtimmten Werth beilegt. Dieſes findet ſtatt, wenn ſich der aus der Gleichung (a') als Function von x, y abgeleitete Werth von a vermöge der Gleichung (α) der Umhüllungslinie auf einen conſtanten Werth reducirt, welcher auch $= 0$, oder $= \infty$ ſein kann. Wir wollen z. B. für die Gleichung der umhüllten Linien folgende nehmen:

$$(x^2 + y^2 - r^2)(x^2 - 2ax) + (y^2 - r^2)a^2 = 0,$$

ſo ergibt ſich aus der Gleichung (a'):

$$a = \frac{x(x^2 + y^2 - r^2)}{y^2 - r^2},$$

und wenn man dieſen Werth von a in die gegebene Gleichung ſubſtituirt, ſo erhält man für die Gleichung der Umhüllungslinie:

$$\frac{x^4(x^2 + y^2 - r^2)}{y^2 - r^2} = 0.$$

Vermöge dieſer Gleichung iſt der durch die vorhergehende Gleichung gegebene Werth von $a = 0$, und in der That iſt einleuchtend, daß ſich in dieſem beſondern Falle die Gleichung der Umhüllungslinie aus der allgemeinen Gleichung der umhüllten Linien dadurch ergibt, daß man dem Parameter a den beſondern Werth Null beilegt. Aber im Allgemeinen machen die Veränderlichen x, y den aus der Gleichung (a') abgeleiteten Werth von a nicht verſchwinden, und die Umhüllungslinie gehört folglich nicht zu der Reihe der umhüllten Linien.

Hierdurch wird, wenigſtens für die Differenzialgleichungen der erſten Ordnung, die Exiſtenz der ſogenannten ſingulären Integrale oder Auflöſungen, wovon bereits in §. 164 die Rede geweſen iſt, gerechtfertigt. Es iſt einleuchtend, daß die Gleichung (a) das allgemeine Integral der Gleichung (b) iſt, daß die Reihe der umhüllten Curven der Reihe der partikulären Integrale entſpricht, und daß das ſinguläre Integrale der Gleichung (b) die Gleichung (α) der Umhüllungscurve iſt, welche im Allgemeinen nicht mit einer der umhüllten Linien zuſammenfällt, wenn gleich ihre Gleichung auch der Gleichung (b) genügt, weil ſich daraus für y' ein Werth von x, y ergibt, der mit dem identiſch iſt, welcher ſich aus der Gleichung (a) ergibt, nachdem man aus dieſer Gleichung den Parameter a fortgeſchafft hat.

§. 187. Die beiden Umhüllungslinien, welche man erhält, wenn man dem Parameter a die beiden Werthe a, $a + \Delta a$ beilegt, haben im Allgemeinen einen Durchſchnittspunkt (§. 183), und für die Werthe von x, y, welche einem Durchſchnittspunkte angehören, iſt der aus der Gleichung (a) als Function von x, y abgeleitete Werth von a wenigſtens ein doppelter, weil jeder der

ſich in dieſem Punkte ſchneidenden umhüllten Linien ein Werth von a entſprechen muß. Aber auf der Berührungslinie ſelbſt findet kein Durchſchnitt ſtatt, woraus man ſchließen muß, daß mehrere aus der Gleichung (a) als Function von x, y abgeleiteten Werthe von a für die Werthe von x, y einander gleich werden, welche der Gleichung der Berührungslinie genügen. So gibt z. B. die Gleichung (c):

$$a = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2py - x^2}}{x},$$

und die beiden Werthe von a werden für die auf der Umhüllungslinie (γ) liegenden Punkte einander gleich. Nun iſt aber aus der Theorie der algebraiſchen Gleichungen bekannt, daß die Gleichung (a') genau die Bedingung ausdrückt, unter welcher die als algebraiſch und in Beziehung auf die Unbekannte a als rational vorausgeſetzte Gleichung (a) gleiche Wurzeln hat.

Wenn die Gleichung (a) in Beziehung auf a aufgelöſt, und auf die Form:

$$a - f(x, y) = 0 \qquad (a)$$

gebracht iſt, ſo muß die Gleichung (a) wegen der darin vorkommenden Wurzelgrößen und deren doppelten Zeichen als vielförmig betrachtet werden, ſo daß ſie mit mehreren verſchiedenen Gleichungen:

$$a - f_1(x, y) = 0,\ a - f_2(x, y) = 0,\ \text{etc.} \qquad (a_1)$$

gleichbedeutend iſt.

So gibt z. B. die Gleichung (c) durch die Auflöſung dieſer beiden beſondern Gleichungen:

$$a = \frac{p + \sqrt{p^2 - 2py - x^2}}{x} \qquad (c_1)$$

$$a = \frac{p - \sqrt{p^2 - 2py - x^2}}{x} \qquad (c_2)$$

Die Gleichung (c_2) findet für alle Punkte der umſchloſſenen Parabel ſtatt, welche auf dem Theile mO (Fig. 48) der Curve liegen, und die Gleichung (c_1) findet für alle auf dem Stücke mn liegende Punkte ſtatt. Denn das Binom ax — p, deſſen erſtes Glied die veränderliche Ordinate der Tangente Ot ausdrückt, und deſſen zweites Glied eine dem Parameter der umſchließenden Parabel gleiche Conſtante iſt, wird offenbar negativ, wenn x verſchwindet, indem der Zahlenwerth dieſes Binomes für wachſende Werthe von x abnimmt, bis er verſchwindet, wenn x der Abſciſſe des Berührungspunktes der Umhüllungs- und der umhüllten Linie gleich wird, worauf dieſer Werth, wenn x fortwährend zunimmt, nothwendig negativ wird.

§. 188. Wenn die Gleichnng (a) auf die Form (a) gebracht iſt, ſo reducirt ſich die Gleichung (a') auf das abſurde Reſultat $1 = 0$, welches die Gleichung der Umhüllungslinie nicht geben kann. Dieſes rührt, wie wir eben geſehen haben, daher, daß die Theile der durch eine der Gleichungen (a_1) ausgedrückten Curven keinen Durchſchnittspunkt mehr haben. Allein man muß bemerken, daß die Gleichung (a), wenn man für a ſeinen Werth $f(x, y)$ ſubſtituirt, identiſch wird, ſowohl als jede ihrer Ableitungen in Beziehung auf x und y, ſo daß man identiſch hat:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{da} \cdot \frac{df}{dx} = 0,\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{da} \cdot \frac{df}{dy} = 0$$

folglich:

$$\frac{df}{dx} = -\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{da}, \quad \frac{df}{dy} = -\frac{dF}{dy} : \frac{dF}{da}$$

Nun macht aber die Relation zwiſchen x, y, welche die Gleichung der Umhüllungslinie iſt, die Größe $\frac{dF}{da}$ verſchwinden, wenn die Gleichung (a) von Wurzelgrößen befreit iſt, und folglich muß ſie die Ausdrücke $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ unendlich machen, was ein Mittel an die Hand gibt, die Gleichung der Umhüllungslinie zu finden, ſelbſt wenn die Gleichung der umhüllten Linien in Beziehung auf a aufgelöſt iſt. Wenn man z. B. für f den aus der Gleichung (a) abgeleiteten Werth nimmt, ſo kommt:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\mp p^2 \pm 2py - p\sqrt{p^2 - 2py - x^2}}{x^2\sqrt{p^2 - 2py - x^2}},$$

$$\frac{df}{dy} = \mp \frac{p}{x\sqrt{p^2 - 2py - x^2}},$$

und man findet die Gleichung der Umhüllungslinie (γ) durch die Bedingung wieder, daß dieſe Werthe unendlich werden.

Daſſelbe läßt ſich auch auf folgende Weiſe darthun:

Wenn man die Gleichung (a) differenzirt, indem man die Größe a ſucceſſive als eine Conſtante und dann als eine Function der Veränderlichen x, y betrachtet, ſo hat man nach §. 183:

$$\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} = 0,$$

$$\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx} + y'\frac{da}{dy}\right) = 0;$$

folglich:

$$y' = -\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy},$$

$$y' = -\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy} - \frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx} + y'\frac{da}{dy}\right) : \frac{dF}{dy},$$

und dieſe beiden Werthe von y' ſtimmen überein, wenn man a ſo als Function von x, y beſtimmt, daß der einen oder der andern der beiden Gleichungen:

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = \infty$$

Genüge geſchieht. Wenn die Function F eine von Wurzelgrößen und Nennern befreite algebraiſche Function iſt, ſo kann die zweite dieſer Gleichungen keine Auflöſungen haben. Aber die verſchiedenen Transformationen, vermittelſt welcher man die Gleichung (a) von Nennern, oder Wurzelgrößen frei macht, führen im Allgemeinen in die eine dieſer beiden Gleichungen die Auflöſungen ein, welche aus der andern verſchwinden. Uebrigens muß, wenn die Ableitung $\frac{dF}{dy}$ unendlich wird, im Allgemeinen auch die Ableitung $\frac{dF}{dx}$ unendlich werden, weil ſie ſonſt die Ableitung y' beſtändig Null wäre.

§. 189. Die Umhüllten Linien können auch gerade ſein, oder die Gleichung (a) kann in Beziehung auf die Veränderlichen x, y eine lineare Form

haben, und in dieſem Falle fällt das Syſtem der umhüllten Linien offenbar mit dem Syſteme der Tangenten der Umhüllungscurve zuſammen.

Wenn die Gleichung (a) in Beziehung auf x, y linear iſt, ſo hat ſie die Form:

$$y = x\varphi a - \varphi_1 a;$$

aber man kann die willkührliche Conſtante verändern, und $\varphi a = c$ ſetzen, wodurch die vorhergehende Gleichung die einfachere Form:

$$y = cx + \psi c$$

annimmt und die Gleichung (b) wird in dieſem Falle:

$$y = xy' + \psi y'.$$

Man kann für das Syſtem der umhüllten Linien das Syſtem der Normalen einer gegebenen Curve nehmen; aber alsdann führen die Relationen der Umhüllungscurve zu der urſprünglichen Curve auf eine ſehr wichtige Theorie, welche ein beſonderes Studium erfordert, und deren Auseinanderſetzung der Gegenſtand des folgenden Kapitels iſt.

Drittes Kapitel.

Theorie der Evoluten und der Krümmungshalbmeſſer ebener Curven. — Brennlinien. — Theorie der Berührungen der verſchiedenen Ordnungen zwiſchen ebenen Curven.

---

1. Theorie der Evoluten und der Krümmungshalbmeſſer ebener Curven.

§. 190. Wie im vorletzten Kapitel wollen wir die veränderlichen Coordinaten der Normale der Curve:

$$f(x, y) = 0 \qquad (f)$$

im Punkte (x, y) mit ξ, η bezeichnen, indem ſie wieder zu den Coordinaten x, y parallel ſind und von demſelben Anfangspunkte aus gezählt werden, ſo iſt die Gleichung der Normale:

$$\xi - x + (\eta - y)\, y' = 0. \qquad (1)$$

Wenn man in dieſe Gleichung die aus der Gleichung (f) abgeleiteten Werthe von y, y' als Functionen von x ſubſtituirte, ſo nähme ſie folgende Form an:

$$F(\xi, \eta, x) = 0, \qquad (2)$$

indem ſie in Beziehung auf die Veränderlichen ξ, η linear bliebe, und man könnte darin x als den veränderlichen Parameter betrachten, deſſen Werth jede der geraden Normalen beſtimmt, deren Umhüllungslinie geſucht wird. Die Gleichung dieſer Umhüllungslinie:

$$\varphi(\xi, \eta) = 0 \qquad (\varphi)$$

ergäbe ſich aus der Elimination von x zwiſchen der Gleichung (2) und ihrer Ableitung in Beziehung auf x, nämlich:

$$\frac{dF}{dx} = 0.$$

Um aber dieſe Subſtitution bewerkſtelligen zu können, müßte man die Function f particulariſiren, und da es für den Augenblick im Gegentheil darauf ankommt, die Reſultate unabhängig von der Form dieſer Function auszudrücken, ſo wollen wir unmittelbar mit der Gleichung (1) operiren, indem wir ſie in Beziehung auf x differenziren, und dabei y, y' als implicite Functionen von x betrachten, vermöge der Gleichung (f).

Dieſe Rechnung gibt:

$$-(1+y'^2)+(\eta-y)\,y''=0, \qquad (3)$$

woraus folgt:

$$\eta-y=\frac{1+y'^2}{y''},\quad \xi-x=-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

In dieſen Formeln bezeichnen ξ, η die Coordinaten des Durchſchnittspunktes der Normale im Punkte (x, y) mit einer unendlich nahe liegenden Normale (§. 183) oder die Coordinaten des Punktes, worin die Normale im Punkte (x, y) die Umhüllungscurve (φ) berührt. Wenn man folglich die Entfernung des Punktes (x, y) von dem erwähnten Punkte (ξ, η) mit ϱ bezeichnet, ſo iſt ϱ eine Function der unabhängigen Veränderlichen x, welche durch die Formel:

$$\varrho^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$$

oder:

$$\varrho=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\pm\left(\frac{ds}{dx}\right)^3:y'' \qquad (\varrho)$$

gegeben wird, wo der Werth von ϱ, wie alle nicht zu den Coordinatenaxen parallel gezählten Längen, mit dem doppelten Zeichen $\pm$ behaftet iſt. Wenn man die Wurzelgröße:

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{ds}{dx},$$

poſitiv nimmt, oder den Bogen s mit der Abſciſſe x zugleich wachſen läßt, ſo hat ϱ daſſelbe Zeichen, als y'' und ändert in allen Fällen das Zeichen mit y''.

§. 191. Da die Normale der Curve (f) im Punkte (x, y) die Umhüllungslinie (ϱ) im Punkte (ξ, η) berührt, ſo hat man, wenn λ den Winkel bezeichnet, welchen dieſe Normale auf der Seite der poſitiven Abſciſſen mit der Axe der x bildet:

$$\text{tang.}\,\lambda=\frac{d\eta}{d\xi},\quad\text{oder}\quad\frac{d\xi}{dx}\sin.\lambda-\frac{d\eta}{dx}\cos.\lambda=0. \qquad (4)$$

Ferner gibt die Gleichung:

$$\varrho^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2,$$

wenn man ſie in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche x differenzirt:

$$\varrho\,\frac{d\varrho}{dx}=(\xi-x)\left(\frac{d\xi}{dx}-1\right)+(\eta-y)\left(\frac{d\eta}{dx}-y'\right),$$

oder wegen der Gleichung (1) einfacher:

$$\varrho\,\frac{d\varrho}{dx}=(\xi-x)\,\frac{d\xi}{dx}+(\eta-y)\,\frac{d\eta}{dx}.$$

Wenn man für $\xi - x$, $\eta - y$ ihre Werthe $\varrho \cos.\lambda$, $\varrho \sin.\lambda$ ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\cos.\lambda + \frac{d\eta}{dx}\sin.\lambda, \qquad (5)$$

und wenn man beide Theile der Gleichungen (4), (5) zum Quadrate erhebt und die Reſultate zuſammen addirt, ſo findet man endlich:

$$\frac{d\varrho^2}{dx^2} = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{dx^2}.$$

Wenn man die Länge des zwiſchen dem feſten Punkte auf der Curve und dem beweglichen Punkte (ξ, η) liegenden Bogens der Curve (φ) mit σ bezeichnet, ſo hat man (§. 174):

$$\frac{d\sigma}{dx} = \pm\frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}{dx},$$

und folglich:

$$\frac{d\varrho}{dx} = \pm\frac{d\sigma}{dx}.$$

Wenn man alſo zwei Syſteme correſpondirender Werthe:

$$x_0, \varrho_0, \sigma_0; \; x_1, \varrho_1, \sigma_1$$

betrachtet und annimmt, daß die Ableitungen $\frac{d\varrho}{dx}$, $\frac{d\sigma}{dx}$ in dem Intervalle $x_1 - x_0$ daſſelbe Zeichen behalten, ohne unendlich zu werden; ſo ſind die Zahlenwerthe der Differenzen $\varrho_1 - \varrho_0$, $\sigma_1 - \sigma_0$ einander gleich, und haben gleiche, oder verſchiedene Zeichen, je nachdem die Größen ϱ, σ gleichzeitig zu- oder abnehmen, oder die eine zu- und die andere abnimmt.

§. 192. Es ſei $mm_1 m_2 m_3 \ldots$ (Fig. 50) die gegebene Curve, zu welcher die ſich auf der Ebene der xy bewegende gerade Linie ſtets normal bleiben muß, und $\mu\mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots$ ſei der geometriſche Ort zweier einander unendlich nahe liegender Normalen, oder die Curve, welche von der beweglichen geraden Linie fortwährend berührt wird, ſo folgt aus dem eben Bewieſenen, daß die erſte Curve durch eine ſtetige Bewegung des Endpunktes eines auf die zweite Curve gewickelten vollkommen biegſamen und ausdehnbaren Fadens beſchrieben werden kann, wenn dieſer Faden, indem er immer geſpannt bleibt, von der Curve abgewickelt wird; denn auf dieſe Weiſe bliebe die Differenz der Längen $m\mu$, $m_1\mu_1$ ſtets der Länge des Bogens $\mu\mu_1$ gleich, und der geradlinige Theil des Fadens, deſſen Endpunkt die Curve $mm_1m_2 \ldots$ beſchrieben, würde an ſeinem andern Ende die Curve $\mu\mu_1\mu_2 \ldots$ berühren.

Aus dieſem Grunde hat Huygens, der Erfinder dieſer Theorie, die Curve (φ) die Evolute der Curve (f) und dieſe die Evolvente der Curve (φ) genannt. Eine ebene Curve hat immer eine in ihrer Ebene liegende Evolute, und kann nur eine einzige haben; aber ſie hat unendlich viele Evolventen, weil bei der Abwickelung des über die Evolute gelegten Fadens jeder Punkt des geradlinigen Theiles dieſes Fadens, welchen man ſich unbeſtimmt verlängert denken kann, eine beſondere Curve beſchreibt.

Die Beſchreibung der ebenen Curven durch ihre Evoluten hat eine große Aehnlichkeit mit der Beſchreibung des Kreiſes. Für den Kreis, deſſen Gleichung folgende iſt:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

findet man:

$$\varrho^2 = r^2,\ \xi = \alpha,\ \eta = \beta,$$

so daß sich die Evolute des Kreises auf seinen Mittelpunkt reducirt. Umgekehrt, bei der Beschreibung einer beliebigen Curve vermittelst ihrer Evolute spielt jeder Punkt der Evolute successive die Rolle eines Mittelpunktes, und der Halbmesser bleibt nicht constant, sondern ändert sich von einem Punkte der beschriebenen Curve zum andern. Diese Beschreibung wird uns sogleich zu einer andern Ansicht über die zwischen den Curven und ihren Evoluten stattfindende gegenseitige Abhängigkeit führen.

§. 193. Um uns von der Krümmung einer ebenen Linie in jedem ihrer Punkte einen genauen Begriff zu bilden, wollen wir uns vorstellen, daß man dem Punkte m (Fig. 51) aus einen Bogen $mm_1 = \Delta s$ genommen, und dann in den Punkten m, m_1 die Tangenten mt, m_1t und die Normalen mn, mn_1 gezogen habe. Es bezeichne $\Delta\tau$ den Winkel, welchen diese Normalen mit einander bilden, oder den äußern von den beiden correspondirenden Tangenten gebildeten Winkel, so nimmt das Verhältniß:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} \qquad (\varkappa)$$

größere oder kleinere Werthe an, je nachdem die betrachtete Curve mehr oder weniger krumm ist, oder sich in der Nähe des Punktes m mehr oder weniger von der Tangente mt entfernt, wenn vorausgesetzt wird, daß der Curvenbogen in der unmittelbaren Nähe des betrachteten Punktes keine Biegungen darbietet, sondern in seiner ganzen Ausdehnung seine Convexität immer nach demselben Sinne kehrt, was man für jede stetige Curve erhalten kann, wenn man den Bogen Δs hinreichend klein nimmt. Wenn die Curve ein Kreis wäre, dessen Krümmung offenbar in allen Punkten dieselbe ist, so wäre das Verhältniß $(\varkappa)$ sowohl von der Länge des Bogens Δs, als von der Lage des Punktes m auf der Curve unabhängig, und sein Werth wäre $= \frac{1}{r}$, wo r den Halbmesser des Kreises bezeichnet. Man kann also das Verhältniß $\frac{1}{r}$ als das Maaß der Krümmung des Kreises von dem Halbmesser r nehmen.

Für eine beliebige Curve mm_1 ändert sich das Verhältniß $(\varkappa)$ nicht blos mit der Lage des Punktes m, sondern auch mit der Länge des Bogens Δs. Wenn jedoch die Größen Δs, $\Delta\tau$ beide immer kleiner und kleiner werden, so convergirt das Verhältniß $(\varkappa)$, vorausgesetzt, daß keine Stetigkeitsunterbrechung stattfindet, gegen eine bestimmte Grenze:

$$\frac{d\tau}{ds},$$

welche man nach der Analogie als Maaß der Krümmung der Linie im Punkte m betrachten muß (§. 30 u. 38), so daß auf diese Weise die Krümmung jeder Curve und in jedem ihrer Punkte eine mathematisch bestimmte Größe wird.

Wenn aber der Bogen mm_1 unendlich klein wird, so ist der Punkt n der weiter oben bestimmte Punkt (ξ, η), und da die Normalen mn, m_1n nur noch um eine unendlich kleine Größe von einander verschieden sind, so hat man bis auf unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung $ds = \varrho\, d\tau$, oder nach der Formel (ϱ):

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho} = \pm\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der unendlich kleine Winkel $d\tau$ wird der Contingenzwinkel genannt.

Ferner hat man unmittelbar, ohne daß man zu der Formel (ϱ) oder den Rechnungen, welche zu ihrer Ableitung gedient haben, zu recurriren braucht:

$$d\tau = \pm d \cdot \text{arc. tang. } y' = \pm \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} \cdot dx,$$

$$ds = \pm \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx,$$

folglich:

$$\frac{d\tau}{ds} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Verhältniß $\frac{1}{\varrho}$ iſt folglich das Maaß der Krümmung einer Curve im Punkte (x, y); der Punkt (ξ, η) wird der Krümmungsmittelpunkt genannt und iſt der Mittelpunkt des mit dem Halbmeſſer ϱ beſchriebenen Kreiſes, welcher im Punkte (x, y) dieſelbe Krümmung, als die gegebene Curve hat. Die Evolute iſt der geometriſche Ort aller Krümmungsmittelpunkte der Evolvente.

§. 194. Der Werth oder die Größe der Krümmung, welcher immer der umgekehrte Werth des Krümmungshalbmeſſers iſt, ändert ſich in jedem Punkte der Curve zu beiden Seiten des Punktes (x, y). Im Allgemeinen nimmt derſelbe in dem einen Sinne zu und in dem andern ab. Der aus dem Punkte (ξ, η) als Mittelpunkt mit dem Halbmeſſer ϱ beſchriebene Kreis muß folglich innerhalb der Curve auf der Seite des Punktes (x, y) liegen, wo die Krümmung abnimmt, und außerhalb der Curve auf der Seite dieſes Punktes, wo ſie zunimmt. Dieſer Kreis ſchneidet und berührt alſo die Curve zu gleicher Zeit im Punkte (x, y), ſo daß die Tangente der Curve auch Tangente des Kreiſes iſt, deſſen Mittelpunkt (ξ, η) auf der Normale liegt.

Jeder Kreis dagegen, welcher die Curve in demſelben Punkte berührt, aber mit einem größern, oder kleinern Halbmeſſer als ϱ beſchrieben iſt, liegt aus demſelben Grunde zu beiden Seiten des Berührungspunktes außerhalb oder innerhalb der Curve.

Außerdem iſt nach der geometriſchen Conſtruction, welche uns zur Definition der Krümmung geführt hat, einleuchtend, daß ſich der Kreis, welcher im Punkte (x, y) mit der Curve einerlei Krümmung hat, in der unmittelbaren Nähe dieſes Punktes weniger von ihr entfernt, als jeder andere mit einem größern, oder kleinern Halbmeſſer beſchriebene Berührungskreis. Huyghens hat daher dieſen Berührungskreis, welcher den Krümmungsmittelpunkt zum Mittelpunkte hat, den Osculations- oder Krümmungskreis genannt. Derſelbe liegt an der gemeinſchaftlichen Grenze der Kreiſe, welche die Curve innerhalb zu beiden Seiten des Berührungspunktes (x, y) und der, welche ſie außerhalb zu beiden Seiten deſſelben Punktes berühren. Es gibt jedoch Fälle, wo der Krümmungskreis die Curve nicht mehr ſchneidet, nämlich wenn der Krümmungshalbmeſſer im Punkte (x, y) durch ein Maximum, oder Minimum geht, und alsdann muß der Krümmungskreis aus demſelben Grunde in dem Falle des Maximums die Curve außerhalb zu beiden Seiten des Punktes (x, y) und in dem Falle des Minimums innerhalb zu beiden Seiten dieſes Punktes berühren. In der Ellipſe z. B. zeigt ſchon die Symmetrie der Figur, daß der Krümmungshalbmeſſer in den Endpunkten der großen Axe ein Minimum und in denen der kleinen Axe ein Maximum iſt. Im Allgemeinen hat der Krümmungshalbmeſſer in einer geſchloſſenen Curve ohne Rückkehr, oder Wendepunkte wenigſtens ein Maximum oder ein Minimum, und überhaupt ſo viele Maxima, als Minima.

§. 195. Alle in dem letzten Paragraphen angeführten Reſultate ſind aus rein geometriſchen Betrachtungen abgeleitet, und man kann ſie leicht, wenn es erfordert wird, rein analytiſch erhalten. Zur Vereinfachung der Rechnungen wollen wir die Function:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2,$$

oder das Quadrat der Entfernung des Punktes (ξ, η) von dem Punkte (x, y) auf der Curve mit u bezeichnen, ſo daß, wenn der erſte Punkt feſt bleibt, u blos eine Function der unabhängigen Veränderlichen x iſt. Wenn folglich die Entfernung des Punktes (ξ, η) von dem Punkte (x, y) unter allen geraden Linien, welche man von dem erſten Punkte nach den benachbarten Punkten des zweiten auf der Curve ziehen kann, ein Maximum, oder Minimum werden ſoll, ſo muß man haben:

$$-\frac{du}{dx} = \xi - x + (\eta - y)\,y' = 0, \qquad (1)$$

d. h. der Punkt (ξ, η) muß auf der Normale der Curve im Punkte (x, y) liegen.

Es findet ein Maximum, oder Minimum ſtatt, je nachdem:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 1 + y'^2 - (\eta - y)\,y'' \lessgtr 0$$

iſt. Der erſten Ungleichheit würde nicht genügt werden können, wenn die Factoren $\eta - y$, y'' entgegengeſetzte Zeichen haben, oder wenn die Curve und der Berührungskreis ihre Converität nach entgegengeſetztem Sinne kehren. Wir wollen daher annehmen, daß dieſe Factoren einerlei Zeichen haben, oder daß die Curve und der Berührungskreis ihre Converität nach derſelben Seite der Tangente kehren; ſo liegt der Berührungskreis in der Nähe des Punktes (x, y) zu beiden Seiten außerhalb, oder innerhalb der Curve, jenachdem die erſte, oder die zweite Ungleichheit erfüllt wird. Aber es findet weder ein Maximum, noch ein Minimum ſtatt, wenn man außer der Gleichung (1) noch die folgende hat:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = -(1 + y'^2) + (\eta - y)\,y'' = 0, \qquad (3)$$

d. h. (nach der Identität der Gleichungen (1), (2) mit denen, welche wir weiter oben durch dieſelben Zahlen bezeichnet haben), wenn der Punkt (ξ, η) der Mittelpunkt des Krümmungskreiſes iſt. Dieſer Kreis ſchneidet und berührt alſo die Curve zu gleicher Zeit, und er liegt außerhalb, oder innerhalb der Curve auf der Seite der zunehmenden x, jenachdem man hat:

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 3yy'' - (\eta - y)\,y''' \lessgtr 0.$$

Der Krümmungskreis liegt endlich wieder zu beiden Seiten des Berührungspunktes außerhalb, oder innerhalb der Curve, wenn man hat:

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 3\,yy'' - (\eta - y)\,y''' = 0,$$

oder wenn man den aus der Gleichung (3) abgeleiteten Werth von $\eta - y$ ſubſtituirt:

$$3y'y''^2 - (1 + y'^2)\,y''' = 0. \qquad (6)$$

Aber wenn man die Gleichung (ϱ) differenzirt, ſo findet man:

$$\frac{d\varrho}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y''^3}\left(3y'y''^2 - (1 + y'^2)\,y'''\right),$$

und folglich drückt die Gleichung (6) die Bedingung aus, daß der Krümmungshalbmeſſer durch ein Maximum, oder Minimum geht.

§. 196. Wenn man x nicht als unabhängige Veränderliche betrachten will, ſo nimmt der Ausdruck des Krümmungshalbmeſſers folgende ſymmetriſche Form an:

$$\varrho = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \pm \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}. \qquad (\varrho_1)$$

Nun gibt aber die Gleichung:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

durch Differenzirung:

$$d^2s = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{ds}, \qquad (7)$$

woraus folgt:

$$d^2s^2 = \frac{(dx\,d^2x + dy\,d^2y)^2}{ds^2} = \frac{(d^2x^2 + d^2y^2)(dx^2 + dy^2) - (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}{ds^2}$$

$$= d^2x^2 + d^2y^2 - \frac{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}{ds^2}, \qquad (8)$$

und mithin iſt:

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds} = \sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 - d^2s^2},$$

$$\varrho = \pm \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 - d^2s^2}}. \qquad (\varrho_2)$$

Die Gleichung (8) läßt ſich auch auf folgende Form bringen:

$$(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = (d^2x^2 + d^2y^2)\,ds^2 - (dx^2 + dy^2)\,d^2s^2,$$

welche vermöge der Gleichung (7) übergeht in:

$$(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = (ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2$$

$$= ds^4 \left\{ \left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 \right\},$$

und hieraus folgt:

$$\varrho = \pm \frac{ds}{\sqrt{\left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2}}. \qquad (\varrho_3)$$

Außerdem hat man nach §. 193:

$$ds = \varrho\,d\tau,$$

wo $d\tau$ den Winkel zweier unendlich nahe liegender Tangenten oder den Contingenzwinkel bezeichnet. Man hat folglich:

$$d\tau = \pm \sqrt{\left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2}. \qquad (\tau)$$

Die Formeln (ϱ_2), (ϱ_3) und (τ) werden in der Mechanik häufig angewandt.

Ferner hat man, wenn man Polarcoordinaten anwendet (§. 179) und den Winkel φ zur unabhängigen Veränderlichen nimmt:

$$dx = dr\cos.\varphi - r\sin.\varphi\, d\varphi,$$
$$dy = dr\sin.\varphi - r\cos.\varphi\, d\varphi,$$
$$d^2x = d^2r\cos.\varphi - 2\sin.\varphi\, dr d\varphi - r\cos.\varphi d\varphi^2,$$
$$d^2y = d^2r\sin.\varphi + 2\cos.\varphi\, dr d\varphi - r\sin.\varphi d\varphi^2,$$

und wenn man dieſe Werthe in den Ausdruck des Krümmungshalbmeſſers ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$\varrho = \pm \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\varphi^2} - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}. \qquad (\varrho_4)$$

§. 197. **Beiſpiel 1.** Es ſei die Gleichung der Ellipſe:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben, ſo findet man:

$$\xi = x^3 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^4},\quad \eta = y^3 \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^4},\quad \varrho = \pm \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

und als Gleichung der Evolute zwiſchen ξ, η erhält man:

$$\left(\frac{a\xi}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

oder von Wurzelgrößen befreit:

$$\left[1 - \frac{a^2\xi^2}{(a^2 - b^2)^2} - \frac{b^2\eta^2}{(a^2 - b^2)^2}\right]^3 = 27\,\frac{a^2b^2\xi^2\eta^2}{(a^2 - b^2)^4}.$$

Dieſe Evolute (Fig. 52) hat vier Rückkehrpunkte, welche den Endpunkten der Axen der Ellipſe (§. 194) entſprechen.

Dieſelbe Rechnung gibt die Evolute der Hyperbel, wenn man blos $b\sqrt{-1}$ für b ſetzt.

Beiſpiel 2. Für die Parabel $y^2 = 2px$ hat man:

$$\xi = p + 3x,\ \eta = \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}},\quad \varrho = \pm\frac{(p + 2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}},$$

und die Gleichung der Evolute wird:

$$\eta^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{(\xi - p)^3}{p}.$$

Dieſe Evolute (Fig. 53) iſt eine paraboliſche Curve, d. h. eine Curve, deren Gleichung auf die Form:

$$y^n = kx^m$$

gebracht werden kann, wo m und n ganz poſitive Zahlen ſind. Man nennt ſie die *Neil'ſchen Parabel*, weil dieſer Geometer ſie zuerſt mit unterſucht, und unter andern die merkwürdige Eigenſchaft derſelben gefunden hat, daß ſie *rectificabel* iſt, d. h. daß ſich der Bogen s dieſer Curve durch eine *algebraiſche* Function der Abſciſſe x ausdrücken läßt, auf welchen Gegenſtand wir bei der Rectification der Curven oder bei der Beſtimmung des Bogens s als Function von x zurückkommen werden.

§. 198. **Beiſpiel 3.** Für die Cycloide (§. 176):

$$x = R\,\text{arc. cos.}\,\frac{R - y}{R} \pm \sqrt{2Ry - y^2}$$

haben wir in §. 177 gefunden:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2R - y}{y}},$$

woraus folgt:

$$y'' = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{R}{y^2},\quad \varrho = \pm 2\sqrt{2Ry},$$

und aus der Vergleichung dieſer Formel mit der Gleichung (h') des angeführten §. folgt, daß der Krümmungshalbmeſſer das Doppelte der Normale iſt.

Wir wollen hier noch eine ſehr merkwürdige Eigenſchaft der Cycloide beweiſen, nämlich die: daß ihre Evolute ebenfalls eine Cycloide von denſelben Dimenſionen iſt, welche unter der Evolvente liegt (Fig. 54).

Zu dem Zwecke wollen wir zu XX' in einer dem Halbmeſſer des erzeugenden Kreiſes der gegebenen Cycloide (Evolvente) Omq gleichen Entfernung eine unbegrenzte Parallele ziehen. Von dieſem Kreiſe nmn' wollen wir den ſymmetriſch liegenden Kreis μμν conſtruiren, ſo iſt der Durchſchnittspunkt μ dieſes Kreiſes mit der verlängerten geraden Linie mn nach dem vorhin Bewieſenen der Krümmungsmittelpunkt der Evolvente. Die Länge On iſt dem Bogen mn und die Länge Os dem halben Umfange des Erzeugungskreiſes gleich. Folglich hat der Bogen mn, oder der ihm gleiche Bogen μν, dieſelbe Länge, als die gerade Linie sn, oder als die Parallele ov. Wenn alſo der Kreis nμν auf der geraden Linie ξξ' fortrollt, ſo beſchreibt der Punkt des Kreisumfanges, welcher dieſe feſte gerade Linie im Punkte o berührt, die Evolute der Cycloide, welche durch das Fortrollen des Kreiſes nmn' auf der geraden Linie erzeugt wird.

Dieſe Conſtruction zeigt, daß der Krümmungshalbmeſſer der Evolvente in dem Rückkehrpunkte O gleich Null iſt, und im Scheitel = oq, oder gleich dem doppelten Durchmeſſer des Erzeugungskreiſes. Aber oq iſt auch dem halben Bogen der Evolute gleich, welche mit der Evolvente identiſch iſt, und folglich iſt die Länge eines ganzen Cycloidenbogens dem vierfachen Durchmeſſer des Erzeugungskreiſes gleich.

Die in dieſem §. angeführten Eigenſchaften der Cycloide ſind von Huyghens bei Gelegenheit ſeiner Unterſuchungen über die Anwendung des Pendels auf Uhren entdeckt, und haben dieſen eminenten Geiſt theils auf die geometriſche Theorie der Evoluten und der Krümmungshalbmeſſer und theils auf andere in der rationellen Mechanik höchſt wichtige Lehrſätze geführt; und die Geſchichte der mathematiſchen Wiſſenſchaften bietet faſt kein anderes Beiſpiel ſo merkwürdiger Beziehungen dar.

§. 199. Beiſpiel 4. Als letztes Beiſpiel wollen wir die logarithmiſche Spirale:

$$r = e^{m\varphi}$$

nehmen (§. 181), ſo gibt die Formel (ϱ_4) für den Zahlenwerth des Krümmungshalbmeſſers:

$$\varrho = r\sqrt{1 + m^2}.$$

Aber da wir wiſſen, daß in dieſer Curve die Normale mit dem Radiusvector einen conſtanten Winkel α bildet, deſſen trigonometriſche Tangente = — m iſt, ſo iſt $r = \varrho \cos. \alpha$, und folglich iſt der Krümmungsmittelpunkt der Durchſchnittspunkt der Normale mit dem im Anfangspunkte auf dem Radiusvector errichteten Perpendikel.

Die Tangente der Evolute, welche nichts anders ist, als die Normale der Evolvente, bildet folglich mit dem Radiusvector der Evolute einen constanten Winkel, welcher dem von der Tangente und dem Radiusvector der Evolvente gebildeten Winkel gleich ist. Die Evolute ist also dieselbe Curve, als die Evolvente und auf denselben Fall bezogen, so daß die zweite Curve mit der ersten zusammenfallen würde, wenn sie sich um einen entsprechenden Winkel um den gemeinschaftlichen Pol drehte.

2. Brennlinien.

§. 200. Die Theorie der Umhüllungslinien, auf den Fall beschränkt, wo die umhüllten Linien gerade sind, bietet noch eine merkwürdige Anwendung dar, welche sich zu natürlich an die Theorie der Evolute anschließt, als daß wir sie hier ganz mit Stillschweigen übergehen könnten. Man kann nämlich annehmen, daß die umhüllten geraden Linien, statt auf der gegebenen Curve MN (Fig. 55) normal zu bleiben, vielmehr mit den Normalen mn einen Winkel rmn von solcher Beschaffenheit bilden, daß man die Gleichung hat:

$$\sin.\, rmn = k \sin.\, Fmn',$$

wo k eine gegebene Constante und F ein in der Ebene der Curve der Lage nach gegebener Punkt ist. Die Optik lehrt, daß, wenn MN der Durchschnitt einer cylindrischen Fläche ist, welche zwei verschieden brechende Mittel von einander trennt und deren Erzeugungslinien auf der Ebene der Curve senkrecht sind, die von dem leuchtenden Punkte F nach Fm ausgehenden Lichtstrahlen nach mr gebrochen werden, wo k den Brechungsinder bezeichnet, welcher sich auf den Uebergang des Lichtes aus dem einen Mittel in das andere bezieht. Die Umhüllungslinie aller der geraden Linien mr, wenn sie sich auf dem Wege des Lichtes befindet, kann sich auf der Ebene der Curve abbilden, weil die nahe an der Umhüllungslinie liegenden Punkte, worin die Lichtstrahlen fast parallel auffallen, mehr Licht erhalten, als die übrigen Punkte der Ebene. Man nennt diese Umhüllungslinie daher Brennlinie durch Brechung. Wenn die Constante $k = 0$ würde, so fiele die Brennlinie mit der Evolute zusammen. Wenn man $k = -1$ setzte, so ginge die Brechung in Zurückwerfung über, und die Umhüllungscurve würde eine Brennlinie durch Zurückwerfung genannt. Die Brennlinien ändern sich bei derselben Curve MN und demselben Werthe der Constante k mit der Lage des Punktes F. Wenn sich dieser Punkt in's Unendliche entfernte, oder wenn die einfallenden Lichtstrahlen parallel würden; so erhielte man Curven, welche man Hauptbrennlinien nennen könnte.

Es seien α, β die zu den Aren der x und der y parallelen Coordinaten des Punktes F; ξ, η die Coordinaten irgend eines Punktes des in m gebrochenen Lichtstrahles, x, y die Coordinaten des auf der brechenden Curve:

$$f(x, y) = 0 \qquad (f)$$

liegenden Einfallspunktes m und λ, λ' seien die Winkel, welche der einfallende und der gebrochene Lichtstrahl resp. mit der Halbare der positiven x bilden; so werden die Cosinus der Winkel, welche dieselben Lichtstrahlen mit der Tangente der Curve bilden, resp. ausgedrückt durch:

$$\cos.\lambda \frac{dx}{ds} + \sin.\lambda \frac{dy}{ds},\ \cos.\lambda' \frac{dx}{ds} + \sin.\lambda' \frac{dy}{ds}.$$

Aber diese Cosinus werden auch resp. ausgedrückt durch:

$$\pm \sin.\, Fmn',\ \pm \sin.\, rmn,$$

und folglich hat man:

$$\cos.\lambda' dx + \sin.\lambda' dy = k\,(\cos.\lambda dx + \sin.\lambda dy). \qquad (9)$$

Wir wollen der Kürze wegen ſetzen:

$$\rho = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2},\quad \rho' = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2},$$

ſo kommt:

$$\cos.\lambda = \frac{x-\alpha}{\rho},\ \sin.\lambda = \frac{y-\beta}{\rho};\ \cos.\lambda' = \frac{\xi - x}{\rho'},\ \sin.\lambda' = \frac{\eta - y}{\rho'},$$

und folglich iſt:

$$\frac{\xi - x + (\eta - y)y'}{\rho'} + k\cdot\frac{\alpha - x + (\beta - y)y'}{\rho'} = 0. \qquad (10)$$

Dieſes iſt die Gleichung des gebrochenen Strahles zwiſchen ξ, η oder der umhüllten geraden Linie, welche dem Punkte (x, y) auf der brechenden Curve (f) entſpricht. Wenn man dieſe Gleichung in Beziehung auf x differenzirt, indem man y, y' als implicite Functionen von x betrachtet, und dann x, y, y', y'' zwiſchen der Gleichung (10) und ihrer Ableitung, ſowie zwiſchen der Gleichung (f) und ihren Ableitungen der beiden erſten Ordnungen eliminirt; ſo erhält man die Gleichung der Umhüllungscurve oder der Brennlinie zwiſchen ξ, η.

§. 201. Wenn man in der Gleichung (10) die Coordinaten ξ, η als gegebene Conſtanten betrachtet, ſo nimmt ſie folgende Form an:

$$\frac{d(\rho' + k\rho)}{dx} = 0,$$

und drückt aus, daß die Function $\rho' + k\rho$ ein Maximum, oder Minimum wird, ſo daß man, wenn man nach irgend einem andern von m verſchiedenen Punkte der Curve die geraden Linien Fm, rm_1 zieht, beſtändig hat:

$$rm_1 + k\cdot Fm_1 > \text{oder} < rm + k\cdot Fm.$$

Der erſte Theil dieſer Ungleichheit geſtattet aber offenbar kein Maximum, und folglich zeigt die Gleichung (10) ein Minimum an.

Wenn man dagegen ξ, η als die veränderlichen Coordinaten der Umhüllungslinie betrachtet, woran jede umhüllte gerade Linie Tangente iſt, ſo hat man nach der Definition des Winkels λ':

$$\text{tang.}\,\lambda' = \frac{d\eta}{d\xi},\quad \text{oder}\ \frac{d\xi}{dx}\sin.\lambda' - \frac{d\eta}{dx}\cos.\lambda' = 0. \qquad (11)$$

Wenn man ferner die Gleichungen:

$$\rho^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2,\ \rho'^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2,$$

in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche x differenzirt und in das Reſultat für $x-\alpha$, $y-\beta$, $\xi - x$, $\eta - y$ ihre reſp. Werthe $\rho\cos.\lambda$, $\rho\sin.\lambda$, $\rho'\cos.\lambda'$, $\rho'\sin.\lambda'$ ſubſtituirt, ſo kommt:

$$\frac{d\rho}{dx} = \cos.\lambda + y'\sin.\lambda,$$

$$\frac{d\rho'}{dx} = \left(\frac{d\xi}{dx} - 1\right)\cos.\lambda' + \left(\frac{d\eta}{dx} - y'\right)\sin.\lambda',$$

woraus vermöge der Gleichung (9) folgt:

$$\frac{d\rho'}{dx} + k\frac{d\rho}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\cos.\lambda' + \frac{d\eta}{dx}\sin.\lambda'. \qquad (12)$$

Wenn man die beiden Theile der Gleichungen (11), (12) zum Quadrate erhebt, ſie dann zuſammen addirt und das Differenzial des Bogens der Brennlinie mit $d\sigma$ bezeichnet, ſo erhält man die Formel:

$$\frac{d\sigma^2}{dx^2} = \left(\frac{d\varrho'}{dx} + k\frac{d\varrho}{dx}\right)^2 \text{ oder } \frac{d\sigma}{dx} = \pm\left(\frac{d\varrho'}{dx} + k\frac{d\varrho}{dx}\right),$$

welche der im §. 191 für die Evoluten gefundenen analog ist, und woraus folgt:

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \pm[\varrho'_1 - \varrho'_0 + k(\varrho_1 - \varrho_0)],$$

wo σ_0, ϱ_0, ϱ'_0; σ_1, ϱ_1, ϱ'_1 zwei Systeme von Werthen der Größen σ, ϱ, ϱ' für Punkte bezeichnen, welche einander auf der brechenden Curve und auf der Brennlinie entsprechen.

§. 202. Um von diesen Formeln eine Anwendung zu geben, wollen wir annehmen, daß die brechende Linie eine gerade sei, welche wir zu der Axe der x nehmen wollen, und der strahlende Punkt liege auf der Axe der y, so wird die Gleichung (10):

$$(\xi - x)\cdot\sqrt{x^2+\beta^2} = -kx\cdot\sqrt{(\xi-x)^2+\eta^2},$$

woraus folgt:

$$\frac{\xi - x}{x}\cdot\sqrt{\beta^2+(1-k^2)x^2} = \pm k\eta. \qquad (13)$$

Die Gleichung zwischen ξ, η muß sich aus der Elimination von x zwischen dieser letzten Gleichung und ihrer Ableitung in Beziehung auf x nämlich:

$$\xi\beta^2 + (1-k^2)x^3 = 0 \qquad (14)$$

und woraus folgt:

$$(\xi - x)\beta^2 = -x[\beta^2 + (1-k^2)x^2], \qquad (15)$$

ergeben.

Aus der Vergleichung der Gleichungen (13) und (15) ergibt sich:

$$[\beta^2 + (1-k^2)x^2]^{\frac{1}{2}} = \mp k\beta^2\eta,$$

oder:

$$\beta^2 + (1-k^2)x^2 = (k\beta^2\eta)^{\frac{2}{3}}, \qquad (16)$$

und wenn man nun x zwischen den Gleichungen (14) und (16) eliminirt, so erhält man:

$$\beta^{\frac{2}{3}} + (\sqrt{1-k^2}\cdot\xi)^{\frac{2}{3}} = (k\eta)^{\frac{2}{3}}$$

oder die Gleichung der Evolute eines Kegelschnittes, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt und dessen Brennpunkt der strahlende Punkt ist.

3. Theorie der Berührungen der verschiedenen Ordnungen zwischen ebenen Curven.

§. 203. Es seien:

$$y = fx \ldots\ldots (f), \quad y = \varphi x \ldots\ldots \qquad (\varphi)$$

die Gleichungen zweier Curven, welche einen gemeinschaftlichen Punkt (x, y) haben, so daß die Bedingungsgleichung:

$$fx = \varphi x \qquad (m)$$

für den besondern Werth x stattfindet, so hat man nach §. 99:

$$f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x) = [f'(x+t\Delta x) - \varphi'(x+\theta\Delta x)]\cdot\Delta x, \quad (\delta)$$

wo t, θ Zahlen zwischen Null und der Einheit bezeichnen. Wenn die Functionen f, φ in dem Intervalle von x bis $x+\Delta x$ keine Stetigkeitsunterbrechung erfahren und wenn außerdem Δx eine sehr kleine Größe der ersten Ordnung bezeichnet (§. 45), so ist der erste Theil der vorhergehenden Gleichung oder die Differenz $m_1\mu_1$ (Fig. 56) der Ordinaten $p_1\mu_1$, $p_1 m_1$ im Allgemeinen auch eine sehr kleine Größe der ersten Ordnung.

Wenn aber die beiden Curven (f), (φ) sich im Punkte m berühren, d. h. eine gemeinschaftliche Tangente haben, und folglich die Bedingungsgleichung:

$$f'x = \varphi'x \qquad (m')$$

stattfindet, so hat man:

$$f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x) = [f''(x+t_1\Delta x) - \varphi''(x+\theta_1\Delta x)] \cdot \frac{\Delta x^2}{1\cdot 2}, \qquad (\delta')$$

wo die im Allgemeinen von t, θ verschiedenen Zahlen t_1, θ_1 wieder zwischen 0 und 1 liegen müssen, und alsdann ist die Entfernung $m_1\mu_1$ eine sehr kleine Größe von derselben Ordnung, wie Δx^2, d. h. von der zweiten Ordnung.

Man sieht leicht ein, daß der Abstand des Punktes m_1 von der Linie (φ) oder die vom Punkte m_1, welcher sehr nahe bei m liegt, auf die durch den Punkt m gehende Linie (φ) gefällte Normale m_1n_1 im Allgemeinen von derselben Größenordnung ist, als die Differenz $m_1\mu_1$. Dieser Abstand m_1n_1 ist also eine sehr kleine Größe der ersten Ordnung, wenn die Curve (φ) nur der Bedingung genügt, daß sie durch den Punkt m geht, und derselbe wird eine sehr kleine Größe der zweiten Ordnung, wenn die Curve (φ) die Curve (f) im Punkte m berührt.

Man kann also um so mehr den Punkt m_1 immer so nahe bei m nehmen, daß seine Entfernung von der Linie (φ) kleiner ist, als sein Abstand von jeder andern Curve, welche ebenfalls durch den Punkt m geht, aber die Curve (f) in diesem Punkte nicht berührt. Man sagt alsdann, es finde zwischen den Curven (f), (φ) eine Berührung der ersten Ordnung statt.

Man kann Δx immer so klein annehmen, daß die Differenzen:

$$f'(x+t\Delta x) - \varphi'(x+\theta\Delta x),\ f''(x+t_1\Delta x) - \varphi''(x+\theta_1\Delta x)$$

resp. dasselbe Zeichen haben als die Differenzen:

$$f'x - \varphi'x,\ f''x - \varphi''x,$$

und folglich ändert die Differenz:

$$f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x) \qquad (\Delta)$$

vermöge der Gleichung (δ) für hinreichend kleine Werthe von Δx das Zeichen mit Δx, und die Curve (φ) schneidet die Curve (f), wenn sie mit dieser blos den Punkt m gemein hat. Dagegen behält die durch die Gleichung (δ') ausgedrückte Differenz für hinreichend kleine Werthe mit entgegengesetzten Zeichen von Δx dasselbe Zeichen, so daß die Curve (φ), welche mit (f) im Punkte m eine Berührung der ersten Ordnung hat, die Curve (f) im Punkte m nicht mehr schneidet.

Statt der Gleichungen (m), (m') kann man folgende nehmen:

$$fx = \varphi x,\ f(x+dx) = \varphi(x+dx),$$

d. h. in der Sprache der Infinitesimalmethode: zwei Curven (f), (φ), zwischen welchen im Punkte (x, y) eine Berührung der ersten Ordnung stattfindet, haben zwei einander unendlich nahe liegende gemeinschaftliche Punkte (x, y), (x + dx, y + dy).

§. 204. Wir wollen nun annehmen, daß man außer den Gleichungen (m), (m') noch die Gleichung:

$$f''x = \varphi''x \qquad (m'')$$

habe; so wird die Differenz (Δ) durch die Gleichung:

$$f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x) = [f'''(x+t_2\Delta x) - \varphi'''(x+\theta_2\Delta x)] \cdot \frac{\Delta x^3}{1\cdot 2\cdot 3}, \qquad (\delta'')$$

gegeben, und wird eine sehr kleine Größe der dritten Ordnung, wenn Δx wieder eine sehr kleine Größe der ersten Ordnung bezeichnet. In diesem Falle haben die beiden Curven (f), (φ) nicht blos dieselbe Tangente, sondern auch denselben Krümmungskreis, und nach der Analogie sagt man, daß diese beiden Curven einander osculiren.

Der Abstand $m_1 n_1$ wird, wie die Differenz (Δ) eine sehr kleine Größe der dritten Ordnung, wenn sich die beiden Curven im Punkte m osculiren, während sie nur eine sehr kleine Größe der zweiten Ordnung war, wenn sich die beiden Curven in diesem Punkte nur berührten.

Man kann also um so mehr den Punkt m_1 so nahe bei m nehmen, daß sein Abstand von der die Curve (f) im Punkte m osculirenden Curve (φ) kleiner sei, als sein Abstand von jeder andern Curve, welche die Curve (f) im Punkte m berührt, aber nicht osculirt. Man sagt daher: die einander osculirenden Curven (f), (φ) haben im Punkte m eine Berührung der zweiten Ordnung.

Die Differenz (Δ), welche durch die Gleichung (δ'') gegeben wird, ändert für hinreichend kleine absolute Werthe von Δx das Zeichen mit Δx, und folglich schneidet und berührt die osculirende Curve (φ) die Curve (f) im Punkte m im Allgemeinen zu gleicher Zeit.

Statt der Gleichungen (m), (m'), (m'') kann man auch setzen:

$$fx - \varphi x = 0,\quad d(fx - \varphi x) = 0,\quad d^2(fx - \varphi x) = 0,$$

oder:

$$fx = \varphi x,\quad f(x + dx) = \varphi(x + dx),\quad f(x + 2dx) = \varphi(x + 2dx),$$

d. h.: wenn zwischen den beiden Curven (f), (φ) im Punkte (x, y) eine Berührung der zweiten Ordnung stattfindet, so haben sie drei einander unendlich nahe liegende gemeinschaftliche Punkte (x, y), (x + dx, y + dy), (x + 2dx, y + 2dy + d^2y).

§. 205. Wenn man diese Betrachtungen verallgemeinert, so erhält man für die Bedingung, daß die beiden Curven (f), (φ) im Punkte (x, y) eine Berührung der n^{ten} Ordnung miteinander eingehen, die (n + 1) Gleichungen:

$$fx = \varphi x,\quad f'x = \varphi' x,\quad f''x = \varphi'' x,\quad \ldots\ldots\quad f^{(n)}x = \varphi^{(n)}x.$$

Für sehr kleine Werthe der ersten Ordnung von Δx wird die Differenz (Δ) eine sehr kleine Größe der $(n+1)^{ten}$ Ordnung, wenn die Curven (f), (φ) im Punkte (x, y) eine Berührung der n^{ten} Ordnung mit einander eingehen, woraus umsomehr folgt, daß der Punkt ($x + \Delta x$, $y + \Delta y$) so nahe bei dem Punkte (x, y) auf der Curve (f) genommen werden kann, daß sein Abstand von der Curve (φ) kleiner wird, als von jeder andern Curve, welche ebenfalls durch den Punkt (x, y) geht, aber mit der Curve (f) in diesem Punkte nur eine Berührung von einer niedrigern Ordnung hat.

Die Curven (f), (φ) schneiden sich im Punkte (x, y) oder nicht, jenachdem sie in diesem Punkte eine Berührung von gerader, oder ungerader Ordnung haben.

In der Sprache der Infinitesimalmethode kann man daher sagen: daß zwei Curven, welche im Punkte (x, y) eine Berührung der n^{ten} Ordnung miteinander eingehen, n einander unendlich nahe liegende gemeinschaftliche Punkte haben.

Wenn zwei Curven (f), (φ) gegeben sind, wovon die erste völlig bestimmt ist, während in der Gleichung der zweiten n willkührliche Parameter vorkommen; so kann man die Werthe der Parameter so annehmen, daß zwischen den beiden Curven in einem gegebenen Punkte eine Berührung der $(n-1)^{ten}$ Ordnung stattfindet.

So kann man z. B. die beiden Parameter a, b, welche in der allgemeinen Gleichung einer geraden Linie:

$$y = ax + b$$

vorkommen, ſo annehmen, daß die gerade Linie eine Curve in einem gegebenen Punkte berührt, welche Berührung alsdann von der erſten Ordnung iſt.

Eben ſo kann man die in der allgemeinen Gleichung des Kreiſes:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

vorkommenden drei Conſtanten a, b, c ſo annehmen, daß der Kreis eine gegebene Curve in einem gegebenen Punkte osculirt oder eine Berührung der zweiten Ordnung mit ihr eingeht.

Viertes Kapitel.

Von den ſingulären Punkten ebener Curven und der gegenſeitigen Beziehung zwiſchen der Geometrie und Algebra.

§. 206. Unter ſingulären, beſonders merkwürdigen oder ausgezeichneten Punkten einer ebenen Curve ſind in geometriſchem Sinne alle diejenigen zu verſtehen, worin die Curve, abgeſehen von dem willkührlichen Coordinatenſyſteme, worauf ſie bezogen wird, irgend eine beſondere Eigenthümlichkeit darbietet, im Gegenſatze zu den übrigen unendlich vielen Punkten der Curve, welche ſich von den unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden durch kein geometriſches Merkmal unterſcheiden. So iſt z. B. der Punkt, worin die Curve eine Inflexion erfährt, ein ſingulärer Punkt, deſſen Exiſtenz weder von den willkührlichen Coordinatenaxen, noch ſelbſt von der Art der Coordinaten, welche man zur analytiſchen Beſtimmung der Curve anwendet, abhängt. Dagegen iſt der Punkt einer Curve, für welchen die Ordinate derſelben ein Maximum oder Minimum wird, darum allein noch kein ſingulärer Punkt; denn wenn man die Richtung der Axen veränderte, wodurch an der Curve ſelbſt nichts geändert würde, ſo würde die in Rede ſtehende Eigenſchaft einer größten oder kleinſten Ordinate nicht mehr dem frühern, ſondern einem ganz andern Punkte entſprechen, ſo daß jener erſte Punkt jetzt gar keine beſondere Eigenthümlichkeit mehr darbieten würde.

§. 207. Man muß die Curven, welche ſich durch eine Gleichung zwiſchen ihren Coordinaten ausdrücken laſſen, in ſogenannte algebraiſche Curven, deren Ordinate in einem Syſteme feſter Coordinatenaxen eine algebraiſche Function der Abſciſſe iſt, und in transcendente Curven unterſcheiden, deren Ordinate in dem erwähnten Coordinatenſyſteme eine transcendente Function der Abſciſſe iſt. So ſind z. B. die Kegelſchnitte algebraiſche Curven, während die Cycloide und die Spiralen transcendente Curven ſind.

Die Gleichung einer algebraiſchen Curve kann durch Fortſchaffung der Nenner und Wurzelgrößen immer auf folgende Form gebracht werden:

$$F(x, y) = 0, \qquad (a)$$

wo F ſowohl eine in Beziehung auf y, als auf x ganze und rationale Function bezeichnet. Der Grad dieſer Gleichung wird durch die Summe der Exponenten von x und y in dem Gliede, worin dieſe Summe am größten iſt,

bestimmt. Wenn man von einem Systeme paralleler Coordinaten zu einem andern übergeht, so wird der Grad der Gleichung dadurch nicht geändert, weil die in dem ersten Systeme genommenen Coordinaten lineare Functionen der in dem zweiten Systeme genommenen sind. Der Grad der Gleichungen algebraischer Curven ist folglich ein wesentliches Merkmal dieser Curven, wornach man sie klassificiren kann, ohne daß diese Klassification willkührlich wäre, obgleich sich die Form der Gleichungen mit der Lage des Anfangspunktes und mit der Richtung der Axen, welche einen beliebigen Winkel miteinander bilden können, ändert.

Eine gerade Linie kann mit einer algebraischen Curve nicht mehr Durchschnittspunkte haben, als der Grad der Gleichung der Curve Einheiten enthält, und die Anzahl der Durchschnittspunkte zweier Curven, wovon die eine vom m^{ten} und die andere vom m'^{ten} Grade ist, kann nicht größer sein, als das Product mm'. Diese sehr merkwürdigen geometrischen Merkmale folgen unmittelbar aus den Grundprincipien der Theorie der algebraischen Gleichungen.

§. 208. Eine algebraische Curve bricht in ihrem Laufe nicht plötzlich ab oder kann keine singulären Punkte der Art haben, welche wir Stillstands-, Schluß- oder Zerreißungspunkte genannt haben, und welche bei gewissen transcendenten Curven, z. B. bei der durch die Gleichung:

$$y + 1 = e^{-\frac{1}{x}} \qquad (1)$$

ausgedrückten Curven (§. 16) vorkommen. Dieses hat seinen Grund darin, daß eine algebraische Gleichung mit einer einzigen unbekannten Größe und mit reellen Coefficienten immer nur eine gerade Anzahl imaginärer Wurzeln hat, und nur eine gerade Anzahl reeller Wurzeln verlieren kann, wenn man eine der bei der Bildung ihrer Coefficienten vorkommenden Größen eine Reihe reeller Werthe durchlaufen läßt. Hieraus und aus der bekannten Form der imaginären Wurzeln folgt, daß wenn die Ordinate y einer algebraischen Curve für einen gewissen Werth von x vom Reellen zum Imaginären übergeht, immer eine gerade Anzahl reeller Werthe von y einander gleich werden.

Wenn dieser Werthe zwei sind, wie es gewöhnlich geschieht, so vereinigen sich zwei Theile der Curve in einem Punkte, welcher übrigens keine besondere Eigenthümlichkeit darbieten kann, wenn man die Richtung der Axen verändert, und welcher folglich im Allgemeinen kein singulärer Punkt ist.

Um also den vollständigen Ausdruck einer algebraischen Curve durch eine Gleichung zwischen ihren geradlinigen Coordinaten zu haben, muß man die Gleichung von Wurzelgrößen frei machen, oder alle doppelten Zeichen jeder Wurzelgröße von einem geraden Inder beibehalten, weil sonst willkührlich Stetigkeitsunterbrechungen eingeführt würden, die von der Richtung der Hülfslinien herrührten, welche man zu Coordinatenaxen nehmen könnte; aber zur Beschreibung der Curve an sich betrachtet, unzulässig sind.

Dieses ist die Grundlage des Zusammenhanges zwischen der Algebra und der Geometrie, indem die Algebra durch das doppelte Zeichen der Wurzelgrößen von geradem Inder Zweige oder Stücke von Curven vereinigt, welche in der That demselben geometrischen Orte angehören.

Uebrigens wird dieser gegenseitiger Zusammenhang zwischen der Geometrie und Algebra oft in einem zu absoluten Sinne genommen, weil derselbe besonders bei der Untersuchung der einfachsten, gewöhnlich beim Unterrichte gewählten algebraischen Curven sich herausstellt; aber im Allgemeinen bei transcendenten Curven nicht mehr stattfindet. So muß z. B. die in der Gleichung der Cycloide vorkommende Wurzelgröße des zweiten Grades (§. 176) entweder mit dem Zeichen $+$, oder mit dem Zeichen $-$ genommen werden, und wenn man beide

Zeichen zugleich anwendete, ſo würden zwei einzelne Cycloiden conſtruirt, welche nicht als denſelben geometriſchen Ort bildend oder als zwei Zweige derſelben Curve betrachtet werden können. Eben ſo kann man die negativen Werthe von r und φ bei der Conſtruction der hyperboliſchen Spirale $r = \frac{a}{\varphi}$ verwerfen, oder zulaſſen; denn wenn man ſie zuläßt, ſo wendet man nur eine erlaubte Convention an, und wenn man ſie verwirft, ſo wird weder eine geometriſche Analogie aufgehoben, noch eine mit den geometriſchen Bedingungen der Beſchreibung der Curve unverträgliche Stetigkeitsunterbrechung eingeführt.

Umgekehrt, wenn die Ordinate einer algebraiſchen Curve einen Ausdruck von transcendenter Form bekommt, und z. B. durch eine Reihe ausgedrückt wird, ſo bietet der transcendente Ausdruck gewöhnlich Stetigkeitsunterbrechungen dar, welche der Zeichnung der Curve fremd ſind. Dieſes findet z. B. bei der Gleichung (q) in §. 113 ſtatt, deren zweiter Theil die Ordinate einer geraden Linie ausdrückt; aber nur zwiſchen gewiſſen Grenzen, und wir werden ſpäter ſehen, daß ſich Beiſpiele derſelben Art beliebig viele anführen laſſen.

§. 209. Wenn alſo von der zwiſchen der Geometrie und Algebra ſtattfindenden gegenſeitigen Beziehung die Rede iſt, ſo muß der Ausdruck Algebra in einem engern Sinne genommen werden, indem man bemerkt, daß es ſich blos darum handelt, Linien durch eine algebraiſche Gleichung zwiſchen geradlinigen, zu feſten Axen parallelen Coordinaten auszudrücken. Dieſer gegenſeitige Zuſammenhang zwiſchen der Geometrie und Algebra hat in den weiter oben erwähnten Eigenſchaften der algebraiſchen Gleichungen und in dem Umſtande ſeinen Grund, daß in einem ſolchen Coordinatenſyſtem jede Gleichung des erſten Grades mit zwei Veränderlichen eine unbeſtimmt verlängerte gerade Linie ausdrückt.

Descartes nannte daher alle Curven, welche in einem Syſteme orthogonaler Coordinaten durch algebraiſche Gleichungen ausgedrückt werden, geometriſche Curven, und mechaniſche Curven dagegen diejenigen, welche in einem ſolchen Coordinatenſyſteme durch transcendente Gleichungen ausgedrückt werden, wie z. B. die Spiralen, oder die Cycloide; allein dieſe unrichtigen Benennungen ſind jetzt außer Gebrauch gekommen. Man kann ſehr wohl diejenigen Curven, welche Descartes geometriſche nannte, algebraiſche nennen; allein man kann den Charakter der geometriſchen Curven nicht durch eine genaue Definition fixiren, obgleich dieſe letzte Benennung auf gewiſſe Curven anwendbar iſt und auf andere nicht. So ſind z. B. die Cycloide und Ellipſe offenbar Curven, deren Entſtehung man ſich vorſtellen kann, und deren mannichfache Eigenſchaften nach der Methode der reinen Geometrie, unabhängig von der Anwendung der Algebra und von jeder Convention über ein Syſtem willkührlicher Coordinaten unterſucht werden können, und ſie ſind daher in dieſem Sinne geometriſche Curven. Wenn man dagegen ganz zufällig eine algebraiſche Gleichung eines beliebigen Grades mit zwei Veränderlichen, oder eine transcendente Gleichung von einer ſonderbaren Form bildete; ſo würde der geometriſche Ort einer ſolchen Gleichung nur höchſt ſelten geometriſche Eigenſchaften haben, vermöge welcher ſich die Erzeugung der Curve denken oder bewerkſtelligen ließe, wenn man ſie nicht auf beliebige Coordinatenaxen beziehen, und die durch die Gleichung ausgedrückte Relation zwiſchen den Zahlenwerthen ihrer Coordinaten anwenden wollte. Eine ſolche Curve könnte, wie die Ellipſe oder die Cycloide, noch eine algebraiſche oder transcendente ſein, allein ſie würde für keine geometriſche Curve gelten können.

§. 210. Die algebraiſchen Curven können ebenſowenig vorſpringende,

als **Zerreißungspunkte** haben. Denn wenn man y zwiſchen der Gleichung einer algebraiſchen Curve:

$$F(x, y) = 0, \qquad (a)$$

welche von Wurzelgrößen und Nennern befreit iſt, und ihrer erſten Ableitung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0 \qquad (a')$$

eliminirt, ſo erhält man eine ebenfalls von Wurzelgrößen und Nennern freie algebraiſche Gleichung zwiſchen x, y', ſo daß die abgeleitete Curve, deren Abſciſſe x und deren Ordinate y' iſt, keine Zerreißungspunkte haben kann, was nothwendig der Fall ſein würde, wenn die urſprüngliche Curve vorſpringende Punkte hätte.

Eine algebraiſche Curve kann auch keine ſingulären Punkte haben, worin der Krümmungshalbmeſſer plötzlich von einem endlichen zu einem andern endlichen Werthe überginge; denn der Krümmungshalbmeſſer iſt eine algebraiſche Function der Ableitungen y', y'', und die Ableitung y'' iſt ſowohl als y', eine algebraiſche Function von x. Daſſelbe gilt von der n^{ten} Ableitung $y^{(n)}$, wo n eine beliebige ganze Zahl iſt.

Die Stetigkeitsunterbrechungen von einer beliebigen Ordnung, welche eine algebraiſche Function erfahren kann, rühren alſo immer von dem Durchgange einer ihrer Ableitungen und der folgenden Ableitungen durch das Unendliche und niemals davon her, daß die abgeleiteten Functionen von einer gewiſſen Ordnung an plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern endlichen Werthe übergehen.

§. 211. Die Zerreißungs- und vorſpringenden Punkte der transcendenten Curven laſſen ſich durch eine, der Natur der in der Gleichung der Curve vorkommenden transcendenten Function ſpeciell entſprechende, Unterſuchung beſtimmen.

So erkennt man z. B. aus der Beſchaffenheit der Function $e^{-\frac{1}{x}}$, welche für $x = 0$ verſchwindet, oder unendlich groß wird, jenachdem x gegen Null convergirt, indem es poſitive oder negative Werthe durchläuft, daß der Zweig der Curve (1), deſſen Abſciſſe poſitiv iſt, im Punkte $x = 0$, $y = 1$ plötzlich abbricht. Betrachten wir ferner die Curve, deren Gleichung folgende iſt:

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}},$$

ſo verſchwindet die Function y für $x = 0$, man mag x eine Reihe poſitiver, oder eine Reihe negativer Werthe durchlaufen laſſen; denn der Ausdruck für y wird in beiden Fällen $\frac{0}{\infty} = 0$, $\frac{0}{1} = 0$. Die Curve geht alſo durch den Anfangspunkt und dehnt ſich ſowohl nach der Seite der negativen, als nach der der poſitiven Abſciſſen aus. Wenn man die Ableitung nimmt, ſo erhält man:

$$y' = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{x e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}.$$

Setzt man nun $x = 0$, ſo findet man $y' = 0$, oder $y' = 1$, jenachdem man x poſitive, oder negative Werthe durchlaufen läßt, um zu der Grenze Null zu gelangen. Der Anfangspunkt der Coordinaten iſt folglich ein vorſpringender Punkt der Curve und der Zweig, deſſen Abſciſſen poſitiv ſind, berührt die Axe

der x in dieſem Punkte, während die Tangente des andern Zweiges in dieſem Punkte unter einem Winkel von 45° gegen dieſe Axe geneigt iſt.

Eben ſo fände man, daß der Anfangspunkt der Coordinaten ein vorſpringender Punkt der Curve iſt, welche durch die Gleichung:

$$y = x \text{ arc. tang. } \frac{1}{x} \qquad (2)$$

ausgedrückt wird, deren Ableitung folgende iſt:

$$y' = \text{arc. tang.} \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

Denn jenachdem x gegen Null convergirt, indem es poſitive, oder negative Werthe durchläuft, hat man an der Grenze $y' = \frac{1}{2}\pi$, oder $y' = -\frac{1}{2}\pi$.

Uebrigens hat die Unterſuchung dieſer Arten von Curven aus den bereits früher angegebenen Gründen nur ein geringes Intereſſe für die Geometrie, weshalb wir uns auch dabei nicht länger aufhalten wollen.

§. 212. Die Curve, deren Ordinate y iſt, erfährt eine Inflexion, wenn die Ableitung y' durch ein Maximum, oder Minimum geht, es mag dieſes ein gewöhnliches Maximum, oder Minimum ſein, in welchem Falle das Kepplerſche Princip anwendbar iſt, oder ein einer Stetigkeitsunterbrechung der Function y' entſprechendes Maximum oder Minimum. Die Regeln zur Beſtimmung der Maxima und Minima der expliciten oder impliciten Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe, laſſen ſich folglich unmittelbar auf die Beſtimmung der Inflexionspunkte der Curve anwenden, ohne daß man zu dieſem Zwecke beſondere Verfahrungsarten zu ſuchen braucht. Der Inflexionspunkt wird gewöhnlich durch die Gleichung $y'' = 0$ und zufällig durch $y'' = \pm\infty$ charakteriſirt; allein es kann geſchehen, daß die eine, oder die andere dieſer Gleichungen erfüllt wird, ohne daß die Curve in dem entſprechenden Punkte eine Inflexion erfährt. Wenn die Curve durch eine von Wurzelgrößen und Nennern befreite algebraiſche Gleichung (a) gegeben iſt, ſo eliminirt man y zwiſchen dieſer Gleichung und ihrer unmittelbaren Ableitung (a'), und die reſultirende Gleichung, welche implicite y' als Function von x beſtimmt, dient alsdann zur Beſtimmung der Werthe von x, welche die Function y' zu einem Maximum, oder Minimum machen, und folglich auch zur Beſtimmung der Inflexionspunkte der gegebenen Curve.

Betrachten wir noch die durch die Gleichung:

$$y^2 = ax^2 + bx^3 \qquad (3)$$

ausgedrückte Curve, welche, jenachdem der Coefficient a poſitiv, Null, oder negativ iſt (indem b immer poſitiv bleibt) eine der drei in Figur 57, 58 und 59 angegebenen Formen annimmt. Aus der Gleichung (3) folgt:

$$y'^2 = \frac{(2a + 3bx)^2}{4(a + bx)}, \quad y''^2 = \frac{b^2(a + \frac{3}{4}bx)^2}{(a + bx)^3}, \quad y'''^2 = \frac{9b^6x^2}{64(a+bx)^5}.$$

Die Werthe von x, welche y' zu einem Maximum oder Minimum machen, werden durch die Gleichung $a + \frac{3}{4}bx = 0$ gegeben. Wenn a poſitiv iſt, ſo macht der ſich daraus ergebende Werth von x die Functionen y' und y imaginär, und folglich kann dieſer Werth keinem Inflexionspunkte der Curve entſprechen.

Wenn $a = 0$ iſt, ſo geht y'' für $x = 0$ durch das Unendliche, ſtatt zu verſchwinden, und die gegebene Curve, welche die Neil'ſche Parabel wird (§. 197), kann keine Inflexionspunkte haben, weil die negativen Werthe von x die Functionen y' und y imaginär machen.

Aber wenn der Coefficient a negativ iſt, ſo erfährt die Curve in den der gemeinſchaftlichen Abſciſſe $x = -\frac{4a}{3b}$ entſprechenden Punkten zwei Inflexionen.

Die Gleichung (1) gibt:

$$y' = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}, \quad y'' = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1-2x}{x}\right),$$

und die transcendente Curve, welche dieſe Gleichung ausdrückt, hat folglich einen der Abſciſſe $x = \frac{1}{2}$ entſprechenden Inflexionspunkt.

Die Beſtimmung der Punkte der größten oder kleinſten Krümmung kommt, wie wir in §. 194 geſehen haben, auf die Beſtimmung der Werthe von x, y zurück, welche den Krümmungshalbmeſſer ϱ zu einem Minimum oder Maximum machen, und zu gleicher Zeit der Gleichung der gegebenen Curve genügen. Wenn dieſe Gleichung eine algebraiſche iſt, ſo kann man durch Elimination immer eine andere algebraiſche Gleichung zwiſchen x, ϱ erhalten, und man hat alsdann nur noch die gewöhnlichen Regeln zur Beſtimmung der Werthe von x anzuwenden, welche die implicite Function ϱ zu einem Maximum oder Minimum machen.

§. 213. Die Punkte, worin ſich mehrere Zweige derſelben Curve begegnen, d. h. ſchneiden oder berühren, werden vielfache Punkte genannt. Wenn die Berührung von einer geraden oder ungeraden Ordnung iſt, ſo findet nach §. 205 zugleich ein Durchſchneiden ſtatt oder nicht. Ein einziger, in ſich ſelbſt zurücklaufender Curvenzweig kann ebenfalls vielfache Punkte darbieten. Der vielfache Punkt iſt ein doppelter, dreifacher, vierfacher, ..., jenachdem ein Zuſammentreffen von zwei, drei, vier ..... Zweigen oder Theilen derſelben Curve ſtattfindet, und alsdann hat die Ordinate in der unmittelbaren Nähe des vielfachen Punktes zwei, drei, vier ..... reelle Werthe, welche derſelben Abſciſſe entſprechen.

Die vielfachen Punkte, worin ein bloßes Durchſchneiden ohne Berühren ſtattfindet, ſind wohl von denen zu unterſcheiden, worin eine Berührung ſtattfindet, weil man, wenigſtens für alle algebraiſchen Curven, die Punkte der erſten Art immer durch ein allgemeines Verfahren beſtimmen kann, während ſich die Punkte der zweiten Art nur durch Verſuche von den conjugirten Punkten und den Rückkehr- oder Wendepunkten, wie wir bald ſehen werden, unterſcheiden laſſen.

Es ſei wieder:

$$F(x, y) = 0 \qquad (a)$$

die von Wurzelgrößen und Nennern befreite Gleichung einer algebraiſchen Curve, ſo gibt ihre Ableitung der erſten Ordnung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0 \qquad (a')$$

für y immer einen einzigen reellen Werth, wenn die Ableitungen $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ nicht zu gleicher Zeit verſchwinden. Soll alſo eine algebraiſche Curve einen vielfachen Durchſchnittspunkt haben können, ſo muß man zunächſt die beiden Gleichungen haben:

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \qquad (b)$$

und die Ableitung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy}y' + \frac{d^2F}{dy^2}y'^2 + \frac{dF}{dy}y'' = 0 \qquad (a'')$$

reducirt ſich folglich für die Werthe von x, y, welche den Gleichungen (a) und (b) gleichzeitig genügen, auf:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy}y' + \frac{d^2F}{dy^2}y'^2 = 0. \qquad (c)$$

Wenn man aus dieſer letzten Gleichung zwei reelle Werthe für y' ableiten kann, ſo hat die Curve einen doppelten Durchſchnittspunkt.

Es ſei z. B. die Gleichung gegeben:

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2}(a^2 - x^2), \qquad (4)$$

welche die unter dem Namen Lemniscate bekannte Curve ausdrückt (§. 60), ſo werden die Gleichungen (b) und (c):

$$x(a^2 - x^2) - x^3 = 0, \quad y = 0, \quad y'^2 = \frac{a^2 - 3x^2}{a^2}.$$

Hieraus folgt, daß der Anfangspunkt der Coordinaten ein doppelter Punkt iſt, worin ſich zwei Bogen der Curve rechtwinklig durchſchneiden, weil die beiden Tangenten unter einem Winkel von 45° gegen die Abſciſſenaxe geneigt ſind. Außerdem iſt dieſer doppelte Durchſchnittspunkt ein Inflexionspunkt; denn die Gleichungen zwiſchen y'', x und y''', x ſind:

$$y''^2 = \frac{x^2(2x^2 - 3a^2)^2}{a^2(a^2 - x^2)^3}, \quad y'''^2 = \frac{9a^6}{(a^2 - x^2)^5},$$

und geben $y'' = 0$ für $x = 0$, während y''' einen endlichen Werth behält.

Eben ſo fände man, daß der Anfangspunkt ein doppelter Punkt der Curve (3) iſt, weil die beiden Tangenten mit der Abſciſſenaxe Winkel bilden, deren trigonometriſche Tangenten durch $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$ ausgedrückt werden, indem der Parameter a als poſitiv vorausgeſetzt iſt (Fig. 57).

§. 214. Dieſe Regel kann zuweilen auch auf transcendente Curven angewandt werden, und zur Beſtimmung der vielfachen vorſpringenden Punkte dienen. Es ſei z. B. die Curve:

$$\left(y - x \text{ arc. tang.} \frac{1}{x}\right)^2 - x^2 \cos. x = 0 \qquad (5)$$

gegeben, ſo findet man, daß die Werthe $x = 0$, $y = 0$ den Gleichungen (a) und (b) genügen, und man hat:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^2F}{dxdy} = -2\left(\text{arc. tang.} \frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)}\right),$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 2\left(\text{arc. tang.} \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)^2 + \frac{4\left(y - x \text{ arc. tang.} \frac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^2}$$
$$+ (x^2 - 2)\cos. x + 4x \sin. x.$$

Die Gleichung (c) verwandelt ſich für die Werthe $x = 0$, $y = 0$ in:

$$y'^2 \mp \pi y' + \frac{\pi^2}{4} - 1 = 0,$$

und gibt für y' die vier verſchiedenen Werthe:

$$\frac{\pi}{2}+1,\ \frac{\pi}{2}-1,\ -\frac{\pi}{2}+1,\ -\frac{\pi}{2}-1.$$

Der Anfangspunkt der Coordinaten iſt alſo ein vorſpringender Punkt der Curve (5), worin ſich vier Curvenbogen unter endlichen Winkeln treffen. Der vorſpringende Punkt der Curve (2) könnte nicht auf dieſelbe Weiſe gefunden werden; denn obgleich y' für den Anfangspunkt zwei verſchiedene Werthe annimmt, ſo reducirt ſich doch $\frac{dF}{dy}$ auf die Conſtante 1 und kann nicht für die Werthe $x=0$, $y=0$ verſchwinden.

§. 215. Die Gleichung (c) wird illuſoriſch, wenn zu gleicher Zeit:

$$\frac{d^2F}{dx^2}=0,\ \frac{d^2F}{dxdy}=0,\ \frac{d^2F}{dy^2}=0 \qquad (d)$$

iſt, und alsdann nimmt man die Ableitung dieſer Gleichung, welche ſich auf:

$$\frac{d^3F}{dx^3}+3\frac{d^3F}{dx^2dy}y'+3\frac{d^3F}{dxdy^2}y'^2+\frac{d^3F}{dy^3}y'^3=0 \qquad (e)$$

reducirt. Wenn dieſe letzte Gleichung für die Werthe von x, y, welche den Gleichungen (a), (b), (d) genügen, drei reelle ungleiche Wurzeln hat, ſo hat die gegebene Curve einen dreifachen Durchſchnittspunkt, während dieſer Punkt nur einem einzigen Zweige der Curve angehört, wie die unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden, wenn die Gleichung (e) nur eine einzige reelle Wurzel hat.

Dieſer letzte Fall bietet ſich bei der Curve dar, deren Gleichung folgende iſt:

$$y^3-x(x-1)^3=0, \qquad (6)$$

welcher durch die Werthe $x=1$, $y=0$ Genüge geſchieht, die auch den Gleichungen (b) und (d) genügen; aber die Gleichung (e) reducirt ſich für dieſelben Werthe auf:

$$y'^3-1=0, \qquad (7)$$

und geſtattet nur eine einzige reelle Wurzel. Uebrigens iſt nach der Form der Gleichung (6) einleuchtend, daß y für alle reellen Werthe von x nur einen einzigen reellen Werth haben kann, und daß folglich die Curve keine vielfachen Punkte würde darbieten können.

In dem Falle, wo alle Coefficienten der Gleichung (e) ebenfalls verſchwänden, müßte man ebenſo zu einer Gleichung des vierten Grades mit y' übergehen. Wenn dieſe Gleichung vier ungleiche reelle Wurzeln hätte, ſo wäre der den Werthen von x, y, welche den Gleichungen (a) und (b) genügen, entſprechende Punkt ein vierfacher Durchſchnittspunkt. Wenn die in Rede ſtehende Gleichung nur zwei ungleiche reelle Wurzeln hätte, ſo wäre der fragliche Punkt ein doppelter, und wenn ſie endlich zwei ungleiche und zwei gleiche reelle Wurzeln hätte, ſo würden die beiden erſten wieder den Durchſchnitt zweier Curvenzweige in dem entſprechenden Punkte (x, y) andeuten, und wir werden ſogleich ſehen, welche Bedeutung die beiden gleichen reellen Wurzeln haben.

Offenbar kann man dieſe Unterſuchung beliebig weit fortſetzen, ſo daß man eine direkte und zuverläſſige Methode zur Beſtimmung der vielfachen Durchſchnittspunkte aller algebraiſchen Curven und des Grades ihrer Vielfachheit oder der Anzahl der Curvenzweige, welche ſich in dieſen Punkten durchſchneiden, hat.

§. 216. Wenn die Gleichung mit y', auf welche man durch Anwendung der vorhergehenden Methode kommt, von einem geraden Grade iſt und lauter

imaginäre Wurzeln hat, so ist der Punkt, dessen Coordinaten nach der Voraussetzung den Gleichungen (a) und (b) genügen, ein conjugirter Punkt, d. h. ein isolirter, aber dennoch mit in der Gleichung (a) begriffener Punkt, so daß der geometrische Ort dieser Gleichung aus dem Systeme einer stetigen Linie und eines isolirten Punkes besteht. Eine Linie kann mehrere, und sogar unendlich viele conjugirte Punkte haben, wenn ihre Gleichung eine transcendente ist. Eine Gleichung mit zwei Veränderlichen kann auch zuweilen nur einen Punkt, oder ein System isolirter Punkte ausdrücken; allein dieses ist nur der Fall, wenn sie sich in mehrere verschiedene Gleichungen zerlegen läßt, oder mit diesen gleichbedeutend ist. Dieses ist z. B. bei den Gleichungen von der Form:

$$[\varphi(x, y)]^2 + [\psi(x, y)]^2 = 0$$

der Fall, welche mit dem Systeme der beiden Gleichungen:

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0$$

gleichbedeutend ist.

Der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein conjugirter Punkt, der durch die Gleichung (3) ausgedrückten Curve, wenn man dem Parameter a einen negativen Werth beilegt. Die Gleichungen (b) und (c) werden in diesem Falle:

$$2y = 0, \quad 2ax + 3bx^2 = 0, \quad y'^2 - 3bx - a = 0,$$

wovon den beiden ersten durch die Werthe $x = 0$, $y = 0$ genügt wird, und wenn man in der dritten $x = 0$, $a < 0$ setzt, so ergeben sich daraus für y' nur imaginäre Werthe. Wenn man übrigens die Gleichung (3) auf folgende Form bringt:

$$y = \pm x \sqrt{bx + a},$$

so sieht man offenbar, daß ihr durch $x = 0$, $y = 0$ Genüge geschieht, und daß die Ordinate y, wenn a negativ und b positiv angenommen wird, für positive oder negative Werthe von x, wie wenig sie auch von Null verschieden sein mögen, imaginär bleibt, und nur dann reell wird, wenn x größer ist, als $-\frac{a}{b}$.

Man kann bemerken, daß der conjugirte Punkt O (Fig. 59) gewissermaßen die Stelle des Knotens Omn (Fig. 57) vertritt, welcher durch die Veränderung des Zeichens des Parameters a verschwunden ist, und man kann sich auf diese Weise, insoweit es der Gegenstand gestattet, von der geometrischen Bedeutung der conjugirten Punkte Rechenschaft geben.

Es ist leicht einzusehen, weshalb man die conjugirten Punkte mit den vielfachen zu gleicher Zeit erhält; denn ein conjugirter Punkt ist derjenige, worin zwei conjugirte imaginäre Wurzeln der Gleichung (a), nämlich:

$$y = \varphi x + \psi x \sqrt{-1}, \qquad (\alpha_1)$$

$$y = \varphi x - \psi x \sqrt{-1}, \qquad (\alpha_2)$$

durch das Verschwinden der Function ψx einander gleich reell und werden. Man kann also den conjugirten Punkt als den Durchschnittspunkt zweier imaginärer Zweige der Curve (a) betrachten. Für jeden dieser Zweige gibt die Gleichung (a') einen einzigen imaginären Werth von y', und man muß folglich zwei imaginäre Werthe von y' für das den beiden imaginären Curvenzweigen gemeinschaftliche Werthsystem von x, y oder für die reellen Coordinaten des conjugirten Punktes haben. Die Gleichung (a') kann also nicht mehr zur Bestimmung eines einzigen Werthes von y' dienen, und die Gleichungen (b) müssen durch die dem conjugirten Punkte entsprechenden Werthe von x, y erfüllt werden.

In algebraiſchem Sinne hat die Curve (6) einen den Coordinaten $x = 1$, $y = 0$ und den imaginären Wurzeln der Gleichung (7) entſprechenden conjugirten Punkt; allein dieſer conjugirte Punkt fällt zufällig mit einem Punkte des reellen Zweiges der Curve zuſammen. Einige Schriftſteller ſagen in dieſem Falle: der conjugirte Punkt ſei nicht mehr *ſichtbar*, d. h. er habe keine geometriſche Exiſtenz mehr.

§. 217. Man ſieht leicht ein, daß der Werth von x, welcher einem conjugirten Punkte der Curve (1) entſpricht, zufällig auch einem conjugirten Punkte der abgeleiteten Curve, deren Abſciſſe x und deren Ordinate y' iſt, und ſogar auch einem conjugirten Punkte der abgeleiteten Curve der zweiten Ordnung, deren Ordinate y'' iſt, u. ſ. f. entſprechen kann. So iſt z. B. der Anfangspunkt der Coordinaten offenbar ein conjugirter Punkt der Curve:

$$y^2 = ax^4 + bx^5, \text{ oder } y = \pm x^2\sqrt{bx + a},$$

wenn man, wie weiter oben, $b > 0$, $a < 0$ ſetzt, und er iſt auch ein conjugirter Punkt der abgeleiteten Curve:

$$y' = \pm \frac{x(5bx + ba)}{2\sqrt{bx + a}};$$

denn die Gleichung (c) reducirt ſich in dieſem Falle auf $y'^2 = 0$ und hat keine imaginären, ſondern gleiche reelle Wurzeln. Allgemein, wenn die Coordinaten x, y eines conjugirten Punktes nicht imaginären Wurzeln der Endgleichung mit y', auf welche die obige Methode führt, entſprechen; ſo entſprechen ſie gleichen reellen Wurzeln derſelben Gleichung von einer *geraden* Anzahl. Um dieſes zu beweiſen, wollen wir bemerken, daß, wenn zwei Curvenzweige einander in dem Punkte (x, y) nicht durchſchneiden, ſondern ſich berühren, die correſpondirenden Werthe von y', welche in dem Falle des Durchſchnittes der Curvenzweige *ungleich* waren, einander *gleich* werden müſſen, ohne imaginär zu werden, und da alsdann die beiden Curvenzweige eine gemeinſchaftliche Tangente bekommen, ſo kann man auch ſagen, daß ſie zwei einander unendlich nahe liegende gemeinſchaftliche Punkte haben. Ebenſo, wenn den Coordinaten des conjugirten Punktes ein reeller Werth von y' entſpricht, ſo kann man ſagen, daß die imaginären Curvenzweige (α_1), (α_2) zwei einander unendlich nahe liegende gemeinſchaftliche reelle Punkte haben, oder daß dieſe Zweige einander berühren, und folglich muß die Gleichung mit y' gleiche Wurzeln bekommen. Dieſes erhellet übrigens aus der Form der Gleichungen (α_1), (α_2), weil, wenn der aus der Gleichung (α_1) abgeleitete Werth von y' für die Abſciſſe x des conjugirten Punktes reell iſt, der Werth von x nicht blos die Function ψx, ſondern auch ihre Ableitung $\psi' x$ verſchwinden macht, und alsdann iſt der aus der Gleichung (α_2) abgeleitete Werth von y' derſelbe, als der, welcher ſich aus der Gleichung (α_1) ergibt. Die Function y' bekommt alſo in dem conjugirten Punkte *zwei* gleiche Werthe, und ſie könnte deren auch *vier*, oder *ſechs*, oder eine *beliebige gerade* Anzahl bekommen, je nach der Anzahl der paarweiſe conjugirten Curvenzweige, welche den conjugirten Punkt zum gemeinſchaftlichen Berührungspunkte haben.

§. 218. Wir werden ſagen: daß zwiſchen zwei Curvenzweigen eine *Berührung der erſten Art* ſtattfindet, wenn dieſe beiden Curvenzweige auf *beiden Seiten* der gemeinſchaftlichen Tangente liegen (Fig. 61), und eine *Berührung der zweiten Art*, wenn die beiden Curvenzweige auf *derſelben Seite* der gemeinſchaftlichen Tangente liegen (Fig. 62). Wenn ſich die beiden Curvenzweige in dem Berührungspunkte vereinigen, ohne darüber hinaus zu gehen, ſo verwandelt ſich der vielfache Berührungspunkt in einen *Rückkehrpunkt* (eine *Spitze*) der *erſten* oder *zweiten Art* (Fig. 63 und 64),

jenachdem die gemeinſchaftliche Tangente zwiſchen die beiden Curvenzweige fällt, oder beide Curvenzweige auf derſelben Seite der Tangente liegen. Die Cycloïde und die Evoluten der Kegelſchnitte haben uns bereits Beiſpiele von Rückkehrpunkten der erſten Art dargeboten. Die Curve:

$$(y - ax^2)^2 = b^2x^5, \text{ oder } y = ax^2 \pm bx^2\sqrt{x}$$

hat im Anfangspunkte der Coordinaten einen Rückkehrpunkt der zweiten Art; denn ihre Gleichung gibt:

$$y' = 2ax \pm \frac{5}{2} bx\sqrt{x},\ y'' = 2a \pm \frac{15}{4} b\sqrt{x},$$

und wenn man $x = 0$ ſetzt, ſo iſt $y = 0$, $y' = 0$ und die beiden Werthe von y'' werden einander gleich, nämlich $= 2a$. Die Werthe von y'' haben folglich für beide Curvenzweige daſſelbe Zeichen, welche daher ihre Concavität nach demſelben Sinne kehren (Fig. 65).

Wenn man ſich vorſtellt, daß eine gerade Linie ſich in der Ebene einer Curve ſo bewegt, daß ſie dieſe Curve beſtändig berührt, ſo kann der Berührungspunkt als ein ſich auf der beweglichen geraden Linie bewegender Punkt betrachtet werden. Der Sinn der Geſchwindigkeit dieſes Punktes ändert ſich oder er nimmt auf der beweglichen geraden Linie eine entgegengeſetzte Bewegung an, wenn dieſe gerade Linie die Curve in einem Rückkehrpunkte der erſten, oder der zweiten Art berührt, und wenn der Rückkehrpunkt von der zweiten Art iſt, ſo ändert ſich auch der Sinn der Rotation der beweglichen geraden Linie auf der Ebene, wie bei den Inflexionspunkten.

§. 219. Kurz, wenn die Gleichung mit y', wovon bisher die Rede geweſen iſt, gleiche reelle Wurzeln hat, ſo können dieſe Wurzeln entweder vielfachen Berührungspunkten, oder Rückkehrpunkten, oder endlich conjugirten Punkten entſprechen. Derſelbe analytiſche Charakter muß dieſen drei Arten ſingulärer Punkte zukommen; denn man kann durch (α_1), (α_2) immer zwei Zweige der Curve (a) bezeichnen, welche reell, oder imaginär ſind, jenachdem die Function ψx imaginär, oder reell iſt. Es bezeichne φx eine reelle Function und wird in dem gegenwärtigen Falle angenommen, daß der Werth, welcher ψx verſchwinden macht, auch $\psi' x$ zu Null macht. Es ſei ξ dieſer Werth, ſo findet zwiſchen den beiden Curvenzweigen eine gewöhnliche Berührung der erſten, oder zweiten Art ſtatt, wenn ψx imaginär bleibt, wie wenig die Werthe von x auch größer, oder kleiner ſein mögen als ξ. Wenn ψx imaginär iſt für Werthe von x, welche beliebig wenig kleiner ſind, als ξ und reell für Werthe von x, welche beliebig wenig größer ſind, als ξ, oder umgekehrt; ſo iſt der ſinguläre Punkt ein Rückkehrpunkt der erſten, oder zweiten Art. Wenn endlich der Werth von ψx für die Werthe von x, welche unmittelbar größer, oder kleiner ſind, als ξ, reell bleibt, ſo ſind die beiden Curvenzweige imaginär, und der ſinguläre Punkt wird ein conjugirter. Nichts iſt leichter, als die Unterſcheidung dieſer drei Fälle, wenn die Function ψx explicite durch die Auflöſung der gegebenen Gleichung gegeben iſt, und wenn dieſes nicht der Fall iſt, ſo muß man zu Verſuchen ſeine Zuflucht nehmen, oder die Curve in der Nähe des ſingulären Punktes, deſſen Beſchaffenheit man wiſſen will, durch Punkte conſtruiren. Durch das vorhin angegebene Verfahren werden die zweifelhaften Fälle ſo viel als möglich beſeitigt, und in den Fällen, wo dieſe Unbeſtimmtheit dem Gegenſtande nothwendig inhärirt, wird der Grund derſelben angegeben.

§. 220. Die Berührungs- oder Rückkehrpunkte der erſten Art unterſcheiden ſich auch von denen der zweiten Art noch durch ein anderes Merkmal. Denn es ſeien ξ, η' die Werthe von x und y', welche den Berührungs- oder Rückkehrpunkten der erſten Art entſprechen, ſo hat y' für die dem Werthe ξ

benachbarten Werthe von x zwei Werthe, wovon der eine etwas größer und der andere etwas kleiner, als η' ist, und hieraus erhellet leicht, daß die abgeleitete Curve, deren veränderliche Coordinaten x, y' sind, im Punkte (ξ, η') eine auf der Axe der x senkrechte Tangente hat, wofern der Punkt (ξ, η') nicht zufällig selbst ein Berührungs- oder Rückkehrpunkt der ersten Art und die Tangente in diesem Punkte (ξ, η') nicht zu der Axe der x parallel ist. Die Ableitung y'' ist also für die einem Berührungs- oder Rückkehrpunkte der ersten Art entsprechenden Werthe von x gewöhnlich unendlich, oder zuweilen auch Null. Es findet in dieser Beziehung zwischen den in Rede stehenden Punkten und den Inflexionspunkten, für welche die Ableitung y'' gewöhnlich Null und zuweilen unendlich ist, die Reciprocität statt.

Der Punkt, welchem auf der abgeleiteten Curve ein Rückkehrpunkt der ersten, oder der zweiten Art entspricht, kann selbst ein Rückkehrpunkt der ersten oder zweiten Art sein, und es gibt kein Mittel mehr, auf eine allgemeine Weise eine Ableitungsordnung n von solcher Beschaffenheit anzugeben, daß die Ableitung $y^{(n)}$ nothwendig unendlich, oder Null sein muß.

§. 221. Wir wollen dieses Kapitel mit der Angabe des zwischen den singulären Punkten einer ebenen Curve und denen ihrer Evolute stattfindenden Zusammenhanges beschließen. Die Formel:

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

zeigt, daß ϱ unendlich oder die Krümmung Null wird, wenn y'' verschwindet, was im Allgemeinen in den Inflexionspunkten der Evolvente stattfindet. Die Normalen der Evolvente in den Inflexionspunkten sind also im Allgemeinen Asymptoten der Evolute (Fig. 66), wogegen die Inflexionspunkte der Evolute Rückkehrpunkten der zweiten Art der Evolvente entsprechen (Fig. 67).

Die singulären Punkte der Evolvente, worin der Krümmungshalbmesser durch ein Maximum, oder Minimum geht, entsprechen im Allgemeinen Rückkehrpunkten der ersten Art der Evolute (Fig. 52 und 53). Ausnahmsweise kann es auch geschehen, daß diese Punkte der Evolvente Punkte sind, für welche y'' verschwindet, ohne daß eine Inflexion stattfindet, und alsdann sind die Normalen in diesen Punkten Asymptoten der Evolute.

In den Punkten, worin die Evolvente Rückkehrpunkte der ersten Art hat, wird y'' gewöhnlich unendlich, ϱ ist Null und die Evolute schneidet die Evolvente unter rechten Winkeln (Fig. 54 und 69). Aber es kann zufällig auch geschehen, daß y'' verschwindet und ϱ unendlich wird oder daß das Perpendikel auf der Tangente im Rückkehrpunkte der Evolvente eine Asymptote der Evolute ist. Wenn die Evolvente keine algebraische Curve ist, so entsprechen ihren Stillstands- oder Zerreißungspunkten eben solche Punkte der Evolute und den vorspringenden Punkten der ersten Curve entsprechen Zerreißungspunkte der zweiten. Die Evolute bietet ebenfalls eine Zerreißung dar, oder ihre als Functionen der Abscisse x der Evolvente betrachteten veränderlichen Coordinaten erfahren eine Stetigkeitsunterbrechung der ersten Ordnung (§. 36), wenn die in dem Ausdrucke der Werthe dieser Coordinaten vorkommende Function y'' eine Stetigkeitsunterbrechung derselben Ordnung, oder wenn die Ordinate y der Evolvente eine Stetigkeitsunterbrechung der dritten Ordnung erfährt, so daß die Evolute so viele Zerreißungspunkte darbietet, als die Function y, welche die Ordinate der Evolvente ausdrückt, Stetigkeitsunterbrechungen der ersten, zweiten und dritten Ordnung erfährt. Die Stetigkeitsunterbrechung der dritten Ordnung einer beliebigen Function y wird also geometrisch durch eine Stetigkeitsunterbrechung der ersten Ordnung der Function dargestellt, welche die Krümmung der Linie mißt, wovon y die Ordinate ist, oder durch eine Zerreißung

der Evolute dieſer Linie. Da man die Evolute der Evolute, u. ſ. f. ins Unendliche beſchreiben kann, ſo folgt, daß ſich die Stetigkeitsunterbrechung einer beliebigen Ordnung geometriſch definiren läßt, oder zur Anſchauung gebracht werden kann.

Die Evolvente jeder geſchloſſenen Curve ohne Biegungen, wie die des Kreiſes oder der Ellipſe, iſt eine ſpiralartige, aus einem doppelten Syſteme von Windungen gebildete Curve (Fig. 68); denn die Rotationsbewegung der Tangente der Evolute, vermöge welcher jeder Punkt der beweglichen Tangente mit der Evolute in Berührung kommt, wird weder in dem einen, noch in dem andern Sinne durch etwas beſchränkt. Es ſei m der Punkt der Evolute, mit welchem der Punkt der beweglichen Tangente, welcher die betrachtete Evolvente beſchreibt, bei der ſtetigen Rotationsbewegung der Tangente zuſammenfällt; ſo iſt klar, daß die beiden entgegengeſetzten Syſteme von Windungen, woraus die Evolvente beſteht, ſich im Punkte m vereinigen und daſelbſt einen Rückkehrpunkt der erſten Art haben.

Die Evolvente einer Curve, welche eine Aſymptote, aber keinen Inflexionspunkt hat, wie die logarithmiſche Curve, oder ein Hyperbelzweig, bietet einen Rückkehrpunkt der erſten Art und einen Zerreißungspunkt dar. Es ſei MN (Fig. 69) die Evolute, AS ihre Aſymptote und m der Punkt der Evolute, mit welchem der die Evolvente $\mu m \nu$ beſchreibende Punkt der beweglichen Tangente zuſammenfällt; ſo hat dieſe letzte Curve offenbar in m einen Rückkehrpunkt der erſten Art. Wenn ſich ferner die bewegliche Tangente in dem Sinne mM an der Evolute verrückt, ſo nähert ſie ſich ohne Ende der Lage SA, ohne dieſe jemals zu erreichen. Es gibt alſo auf AS einen Punkt μ, welchem ſich der beſchreibende Punkt mit einer immer mehr und mehr verzögerten Bewegung nähert, ohne ihn jemals zu erreichen, und welcher folglich ein wahrer Schlußpunkt der Evolvente iſt.

Die Schluß- oder Stillſtandspunkte können folglich Curven angehören, deren Beſchreibung nach geometriſchen Bedingungen beſtimmt iſt, ſo daß die Exiſtenz dieſer ſingulären Punkte nicht blos eine Folge der Eigenthümlichkeiten des Verlaufes einer urſprünglich rein analytiſchen Function iſt (§. 209).

Fünftes Kapitel.

Grundbegriffe der Theorie der Curven von doppelter Krümmung.

§. 222. Eine Linie wird im Raume beſtimmt durch zwei Gleichungen zwiſchen den Coordinaten x, y, z, welche die Entfernungen eines beliebigen Punktes der Linie von drei aufeinander ſenkrechten feſten Ebenen ausdrücken, und umgekehrt kann das Syſtem zweier ſolcher Gleichungen durch eine im Raume beſchriebene Linie, deren rechtwinklige Coordinaten x, y, z ſind, dargeſtellt werden. Die fragliche Linie im Raume wird auch graphiſch durch die beiden ebenen Curven beſtimmt, welche ihre Projectionen auf zwei der Coordinatenebenen, z. B. auf den Ebenen der xy und xz ſind. Die Gleichungen der Projectionslinien werden erhalten, wenn man abwechſelnd z und y zwiſchen den Gleichungen:

$$f(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

welche die Linie im Raume beſtimmen, eliminirt.

Man kann dieſe Linie als den Durchſchnitt zweier cylindriſcher Flächen betrachten, deren Baſen die Projectionslinien auf den Ebenen der xy und der xz und deren gerade Erzeugungslinien reſp. zu den Axen der z und der y parallel ſind.

Im Allgemeinen ſind die auf dieſe Weiſe im Raume beſtimmten Linien nicht eben, d. h. es liegen nicht blos alle ihre Punkte nicht in derſelben Ebene, ſondern jeder noch ſo kleine Bogen derſelben kann nicht in einer Ebene liegen, und man nennt ſie daher Linien oder Curven von doppelter Krümmung, welche Benennung die Folge erklären und rechtfertigen wird. Vermöge der beiden Gleichungen der Curve kann nur eine der drei Veränderlichen x, y, z als unabhängig betrachtet werden, und die beiden andern, ſowie ihre Ableitungen aller Ordnungen, ſind entwickelte oder unentwickelte Functionen derſelben. Allein der Symmetrie der Formeln wegen, welche hier um ſo werthvoller iſt, da dieſe Formeln ziemlich zuſammengeſetzt ſind, wird es zweckmäßig ſein, x, y, z als drei Functionen derſelben unabhängigen Veränderlichen t zu behandeln. Zur Fixirung der Begriffe kann man ſich vorſtellen, daß t die Zeit bezeichnet, und daß die Curve durch einen beweglichen Punkt beſchrieben wird, deſſen Bewegung durch drei Gleichungen zwiſchen x, y, z, t beſtimmt wird. Wenn man zwei Verbindungen dieſer zu je zwei genommenen Gleichungen bildet, und t zwiſchen den beiden Gleichungen jeder Gruppe eliminirt, ſo erhält man die beiden Gleichungen der Curve wieder.

§. 223. Wenn man die beiden auf der Curve liegenden Punkte (x, y, z), $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ durch eine Sehne verbindet, ſo wird bekanntlich die Länge derſelben ausgedrückt durch:

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

und die Gleichungen ihrer Projectionen auf die Ebenen der xy und xz ſind:

$$\eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot (\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{\Delta z}{\Delta x} \cdot (\xi - x),$$

wo ξ, η, ζ die veränderlichen Coordinaten bezeichnen. Endlich bildet dieſe Sehne mit den durch den Punkt (x, y, z) in dem Sinne der poſitiven Coordinaten zu den Axen der x, der y und der z gezogenen Parallelen, Winkel, deren Coſinus reſp. ausgedrückt werden durch:

$$\frac{\pm \Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad \frac{\pm \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad \frac{\pm \Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

Wenn ſich der zweite Punkt dem erſten ohne Ende nähert, ſo nähert ſich die Sehne ohne Ende einer beſtimmten Lage, welche die der Tangente der Curve im Raume iſt. Zu gleicher Zeit nähern ſich die Projectionen des zweiten Punktes auf denſelben Ebenen, und die Projection der Sehne nähert ſich einer beſtimmten Lage, welche die der Tangente der Projectionslinie iſt. Folglich ſind die Tangenten der Projectionslinien die Projectionen der geraden Linie, welche im Raume die projectirte Linie berührt, und dieſe Tangente wird folglich durch das Syſtem der beiden Gleichungen:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx} \cdot (\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{dz}{dx} \cdot (\xi - x),$$

beſtimmt, welche die Gleichung:

$$\eta - y = \frac{dy}{dz} \cdot (\zeta - z).$$

zur Folge haben. Es ist symmetrischer und folglich eleganter, diese drei Gleichungen in die eine Formel:

$$\frac{dx}{\xi - x} = \frac{dy}{\eta - y} = \frac{dz}{\zeta - z} \qquad (2).$$

zusammenzufassen, welche sich nach Belieben wieder in zwei besondere Gleichungen auf so viele verschiedene Weisen zerlegen läßt, als man aus drei Dingen Combinationen zu je zwei bilden kann. Die Formeln dieser Art kommen besonders bei den Anwendungen der Analysis auf die Geometrie in drei Dimensionen häufig vor.

Wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Tangente der Curve im Raume mit den Axen der x, y, z in dem Sinne der positiven Coordinaten bildet, so hat man:

$$\cos.\alpha = \frac{\pm dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \cos.\beta = \frac{\pm dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$\cos.\gamma = \frac{\pm dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \qquad (3)$$

oder wegen:

$$\cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma = 1$$

auch:

$$\frac{dx}{\cos.\alpha} = \frac{dy}{\cos.\beta} = \frac{dz}{\cos.\gamma} = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

Unter der Länge des Bogens einer Curve von doppelter Krümmung versteht man die Grenze, welcher sich die Länge eines in den Curvenbogen beschriebenen windschiefen Polygonstückes ohne Ende nähert, wenn die Anzahl der Seiten desselben ohne Ende zu- und jede Seite ohne Ende abnimmt, indem die Endpunkte des Curvenbogens mit denen des Polygonstückes zusammen fallen. Wenn demnach s die Länge des Bogens einer Curve von doppelter Krümmung bezeichnet, indem diese Länge von einem auf der Curve willkührlich genommenen Punkte aus gezählt wird, so hat man:

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \qquad (a)$$

je nachdem der Bogen mit der Abscisse zu- oder abnimmt, und das Differenzial ds positiv oder negativ ist. Ferner hat man auch:

$$\cos.\alpha = \pm\frac{dx}{ds}, \quad \cos.\beta = \pm\frac{dy}{ds}, \quad \cos.\gamma = \pm\frac{dz}{ds}.$$

Wir betrachten die Gleichung (a) als die analytische Definition der Größe s (§. 174). Man gelangt dazu auch, wenn man sich vorstellt, daß der Theil der cylindrischen Fläche, welche den Bogen s enthält und seine Projection u auf der Ebene der xy auf der durch die Tangente an dem einen Endpunkte des Bogens s und durch die Tangente an dem entsprechendenden Endpunkte des Bogens u gelegten Ebene ausgebreitet wird, wodurch der Bogen s, ohne daß seine Länge sich ändert, ein ebener Curvenbogen und der Bogen u, ebenfalls ohne Aenderung seiner Länge, ein Stück einer geraden Linie wird, und nach dem für ebene Curven Gesagten, hat man:

$$du^2 = dx^2 + dy^2, \quad ds^2 = du^2 + dz,$$

folglich:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

§. 224. Unter der Berührungsebene einer Curve von doppelter Krümmung versteht man jede Ebene, welche die Tangente dieser Curve enthält; und folglich hat jede Curve von doppelter Krümmung in jedem ihrer Punkte unendlich viele Berührungsebenen. Auch hat jede Curve von doppelter Krümmung in jedem ihrer Punkte unendlich viele Normalen oder gerade Linien, welche im Berührungspunkte auf der Tangente senkrecht sind, und die Ebene, welche alle diese Normalen enthält, ist die Normalebene der Curve in demselben Punkte. Wenn man die veränderlichen Coordinaten der Normalebene im Punkte (x, y, z) mit ξ, η, ζ bezeichnet, so ist ihre Gleichung nach den Principien der analytischen Geometrie, und vermöge der Gleichungen (2):

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0. \qquad (b)$$

Die Differenzirung der Gleichungen (1) gibt:

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0, \quad \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0,$$

woraus vermöge der Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx}(\xi - x) + \frac{df}{dy}(\eta - y) + \frac{df}{dz}(\zeta - z) &= 0, \\ \frac{df}{dx}(\xi - x) + \frac{df}{dy}(\eta - y) + \frac{df}{dz}(\zeta - z) &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx}\cos.\alpha + \frac{df}{dy}\cos.\beta + \frac{df}{dz}\cos.\gamma &= 0, \\ \frac{df}{dx}\cos.\alpha + \frac{df}{dy}\cos.\beta + \frac{df}{dz}\cos.\gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\frac{df}{dy}\cdot\frac{df}{dz} - \frac{df}{dz}\cdot\frac{df}{dy} = L,$$

$$\frac{df}{dz}\cdot\frac{df}{dx} - \frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dz} = M,$$

$$\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dy} - \frac{df}{dy}\cdot\frac{df}{dx} = N,$$

so geben die Gleichungen (5):

$$\frac{\cos.\alpha}{L} = \frac{\cos.\beta}{M} = \frac{\cos.\gamma}{N} = \pm\frac{1}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Die Gleichungen der Tangente sind auch vermöge der Gleichungen (4):

$$\frac{\xi - x}{L} = \frac{\eta - y}{M} = \frac{\zeta - z}{N},$$

und die der Normalebene wird:

$$L(\xi - x) + M(\eta - y) + N(\zeta - z) = 0.$$

§. 225. Wir wollen uns vorstellen, daß von dem Punkte (x, y, z) aus, welcher in der Figur durch m (Fig. 70) bezeichnet ist, auf der Curve eine Reihe einander sehr nahe liegender Punkte $m_1, m_2, m_3, \ldots$ genommen und durch Sehnen verbunden seien, so daß ein windschiefes Vieleck entsteht, dessen Umfang sich der Curve desto mehr nähert, je näher die Winkelspitzen desselben aneinander liegen. Zwei aufeinander folgende Seiten mm_1, m_1m_2

dieſes Vieleckes beſtimmen eine Ebene, deren Lage im Raume etwas verändert wird, wenn ſich die Punkte m_1, m_2 dem Punkte m immer mehr und mehr nähern, und welche ſich umſoweniger verrückt, vorausgeſetzt, daß keine Stetigkeitsunterbrechung ſtattfindet, jemehr die Punkte m, m_1, m_2 einander ſchon genähert ſind. Dieſe Ebene nähert ſich im Allgemeinen einer beſtimmten Lage, welche man durch Rechnung finden kann, wenn man die Gleichung der Ebene aufſtellt und dabei die Längen mm_1, m_1m_2 als unendlich kleine Größen behandelt. Man ſagt alsdann, daß die Ebene durch drei einander unendlich nahe liegende Punkte gehe, und es iſt gleichgültig, wofern die Curve im Punkte m keine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten oder dritten Ordnung erfährt, ob man die Punkte m_1, m_2 beide dieſſeits, oder beide jenſeits, oder den einen dieſſeits und den andern jenſeits des Punktes m nimmt.

Unter Stetigkeitsunterbrechungen der Curve verſtehen wir die Stetigkeitsunterbrechungen der als Functionen einer unabhängigen Veränderlichen t betrachteten Coordinaten x, y, z, wenn dieſe Stetigkeitsunterbrechungen nicht von der willkührlichen Richtung der Coordinatenaxen abhängig ſind.

Die Ebene, welche durch *zwei* einander unendlichnahe liegende Punkte m, m_1 geht, geht durch die Tangente oder befindet ſich unter den Berührungsebenen der Curve im Punkte m. Die Ebene dagegen, welche durch *drei* einander unendlich nahe liegende Punkte m, m_1, m_2 geht, wird die *Osculations-* oder *Krümmungsebene* der Curve im Punkte m genannt, nach der Analogie mit dem Krümmungskreiſe einer ebenen Curve, und dieſe Ebene kann als durch die Bedingung beſtimmt, angeſehen werden, daß ſie drei einander unendlich nahe liegende Punkte mit der Curve gemein hat (§. 204).

Es ſei **A** eine beliebige durch den Punkt m gelegte Ebene und m_1 ein Punkt der Curve, welcher von dem Punkte m um eine ſehr kleine Größe der erſten Ordnung entfernt iſt (§. 45), ſo iſt der Abſtand des Punktes m_1 von der Ebene **A** im Allgemeinen eine Größe von derſelben Ordnung, als die Sehne mm_1, d. h. eine ſehr kleine Größe der *erſten* Ordnung. Es ſei **B** eine Berührungsebene der Curve mm_1, ſo iſt der Abſtand des Punktes m_1 von der Ebene **B** eine ſehr kleine Größe der *zweiten* Ordnung. Endlich bezeichne **C** die Krümmungsebene im Punkte m, ſo wird der Abſtand des Punktes m_1 von der Ebene **C** eine ſehr kleine Größe der *dritten* Ordnung. Man kann alſo immer den Punkt m_1 ſo nahe bei dem Punkte m annehmen, daß er einer beliebigen Berührungsebene näher iſt, als jeder andern Ebene, und der Krümmungsebene näher, als jeder andern Berührungsebene. Der Kürze wegen übergehen wir den ſtrengen Beweis dieſer verſchiedenen Sätze, welcher ſich aus ähnlichen Rechnungen, wie die in §. 203 u. fgg., deren wir aber in der Folge nicht bedürfen, ergibt.

§. 226. Wenn man die veränderlichen Coordinaten der Krümmungsebene im Punkte (x, y, z) mit ξ, η, ζ bezeichnet, ſo iſt ihre Gleichung von der Form:

$$\mathbf{X}(\xi - x) + \mathbf{Y}(\eta - y) + \mathbf{Z}(\zeta - z) = 0, \qquad (c)$$

wo **X**, **Y**, **Z** noch unbekannte und zu beſtimmende Coefficienten ſind. Dieſe Gleichung muß auch ſtattfinden, wenn man darin $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ reſp. für x, y, z ſetzt, und man hat folglich:

$$\mathbf{X}dx + \mathbf{Y}dy + \mathbf{Z}dz = 0. \qquad (c')$$

Endlich müſſen dieſe beiden Gleichungen noch ſtattfinden, wenn man darin für:

$$x, y, z; \quad dx, dy, dz$$

reſp. ſetzt:

$$x + dx, y + dy, z + dz; \quad dx + d^2x, dy + d^2y, dz + d^2z,$$

welches gibt:

$$Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = 0. \qquad (c'')$$

Wenn man dieſe drei Gleichungen ſo miteinander verbindet, daß zwei der drei Unbekannten X, Y, Z eliminirt werden, ſo verſchwindet die dritte zu gleicher Zeit und man erhält für die Gleichung der Krümmungsebene:

$$(dyd^2z - dzd^2y)(\xi - x) + (dzd^2x - dxd^2z)(\eta - y)$$
$$+ (dxd^2y - dyd^2x)(\zeta - z) = 0;$$

aber der Kürze wegen kann man die Gleichung der Krümmungslinie auch unter der Form (c) beibehalten, indem man ſetzt:

$$X = dyd^2z - dzd^2y,\ Y = dzd^2x - dxd^2z,\ Z = dxd^2y - dyd^2x. \qquad (\gamma)$$

§. 227. Für die Gleichung der Normalebene im Punkte (x, y, z) haben wir gefunden:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \qquad (b)$$

und wenn man die Gleichung der durch einen unendlich nahe liegenden Punkt gehenden Normalebene haben will; ſo muß man zu dem erſten Theile der vorhergehenden Gleichung ihr Differenzial in Beziehung auf alle Veränderlichen addiren. Für die auf der geraden Durchſchnittslinie der beiden einander unendlich nahe liegenden Normalebenen liegenden Punkte hat man folglich außer der vorhergehenden Gleichung noch die ſich durch Differenzirung daraus ergebende Gleichung:

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)d^2z - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0,$$

oder:

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0. \qquad (b')$$

Dieſe Durchſchnittslinie der beiden Normalebenen trifft die Krümmungsebene in einem Punkte (ξ, η, ζ), deſſen Coordinaten den drei Gleichungen (b), (b'), (c) genügen müſſen. Dieſer Punkt iſt der Mittelpunkt eines Kreiſes, welcher durch drei einander unendlich nahe liegende Punkte der Curve geht, oder der Mittelpunkt des Krümmungskreiſes. In der That iſt die Conſtruction des Krümmungskreiſes, da bei der geometriſchen Beſtimmung des Krümmungskreiſes einer ebenen Curve nur zwei aufeinanderfolgende unendlich kleine Elemente der Curve in Betracht kommen, und zwei aufeinanderfolgende Elemente einer beliebigen Curve von doppelter Krümmung auch in derſelben Ebene liegen, oder dieſe Ebene, welche die Krümmungsebene iſt, beſtimmen, ſowohl auf Curven von doppelter Krümmung, als auf ebene Curven anwendbar. Setzt man:

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

ſo bildet der Halbmeſſer ρ des Krümmungskreiſes mit den Parallelen zu den Axen der x, y, z die Winkel λ, μ, ν, welche durch folgende Gleichungen beſtimmt werden:

$$\pm\rho\cos.\lambda = \xi - x,\ \pm\rho\cos.\mu = \eta - y,\ \pm\rho\cos.\nu = \zeta - z.$$

Die Krümmung der Curve in ihrer Krümmungsebene hat den Ausdruck $\frac{1}{\rho}$ zum Maße, und der Contingenzwinkel $d\tau$ (§. 193) iſt mit ρ durch folgende Gleichung verbunden:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds} \qquad (d)$$

§. 228. Die Gleichungen (b), (b'), (c) geben unmittelbar durch Elimination der Binome $\xi - x$, $\eta - y$:

$$\zeta - z = \frac{ds^2 (Xdy - Ydx)}{X(dyd^2z - dzd^2y) + Y(dzd^2x - dxd^2z) + Z(dxd^2y - dyd^2x)}$$
$$= \frac{ds^2 (Xdy - Ydx)}{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

und hieraus ergibt sich durch bloße Vertauschung der Buchstaben:

$$\eta - y = \frac{ds^2 (Zdx - Xdz)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\xi - x = \frac{ds^2 (Ydz - Zdy)}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Ferner erhält man:

$$\varrho = \pm \frac{ds \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2) ds^2 - (Xdx + Ydy + Zdz)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

oder wegen der Gleichung (c'):

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \qquad (\varrho_1)$$

Durch eine ähnliche Rechnung, wie die in §. 196 findet man:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^2 (d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2),$$

und:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^4 \left\{ \left(d \cdot \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy^2}{ds} \right) \right\}.$$

Man kann also dem Ausdrucke des Krümmungshalbmessers die beiden folgenden Formen geben:

$$\varrho = \pm \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z - d^2s^2}}, \qquad (\varrho_2)$$

und:

$$\varrho = \pm \frac{ds}{\sqrt{\left(d \cdot \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds} \right)^2}}. \qquad (\varrho_3)$$

Ferner fände man unmittelbar:

$$Xdy - Ydx = d^2z (dx^2 + dy^2) - dz (dxd^2x + dyd^2y) = d^2z (ds^2 - dz^2)$$
$$- dz (dsd^2s - dzd^2z) = d^2z ds^2 - dzdsd^2s = ds^3 d \cdot \frac{dz}{ds},$$

und folglich:

$$\xi - x = \varrho^2 \cdot \frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \eta - y = \varrho^2 \cdot \frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \zeta - z = \varrho^2 \cdot \frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Man hat also:

$$\cos.\lambda = \pm\rho\frac{d\cdot\frac{dx}{ds}}{ds},\quad \cos.\mu = \pm\rho\frac{d\cdot\frac{dy}{ds}}{ds},\quad \cos.\nu = \pm\rho\frac{d\cdot\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Endlich gibt die Formel (d) für den Werth des Contingenzwinkels $d\tau$:

$$d\tau = \pm\sqrt{\left(d\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2}. \qquad (\tau)$$

Dieſe letzte Formel, und mithin die Formel (ϱ_2) erhält man direkt durch eine ſehr einfache Rechnung. Denn es ſeien:

$$\cos.\alpha,\ \cos.\beta,\ \cos.\gamma;$$

$$\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha,\ \cos.\beta + \Delta\cos.\beta,\ \cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma,$$

die Coſinus der Winkel, welche die durch den Anfangspunkt parallel zu den Tangenten der Curve in den Punkten:

$$(x, y, z),\ (x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z),$$

gezogenen geraden Linien, reſp. mit den Axen der x, y, z bilden und τ bezeichne den zwiſchen dieſen beiden geraden Linien liegenden endlichen Winkel; ſo hat man nach den bekannten Formeln der analytiſchen Geometrie:

$$\cos.\tau = \cos.\alpha(\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha) + \cos.\beta(\cos.\beta + \Delta\cos.\beta) + \cos.\gamma(\cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma),$$

$$1 = \cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma,$$

$$1 = (\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha)^2 + (\cos.\beta + \Delta\cos.\beta)^2 + (\cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma)^2;$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} 2(1-\cos.\tau) = {} & \cos.^2\alpha - 2\cos.\alpha(\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha) + (\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha)^2 \\ & + \cos.^2\beta - 2\cos.\beta(\cos.\beta + \Delta\cos.\beta) + (\cos.\beta + \Delta\cos.\beta)^2 \\ & + \cos.^2\gamma - 2\cos.\gamma(\cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma) + (\cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma)^2 \end{aligned}$$

oder vielmehr:

$$\left(2\sin.\frac{\tau}{2}\right)^2 = (\Delta\cos.\alpha)^2 + (\Delta\cos.\beta)^2 + (\Delta\cos.\gamma)^2$$

$$= \left(\Delta\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\Delta\cdot\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\Delta\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2.$$

Wenn nun der Winkel τ unendlich klein wird, was wir ausdrücken, wenn wir $d\tau$ für τ ſetzen; ſo muß auch in der vorhergehenden Gleichung d für Δ geſetzt werden, und da der Sinus eines unendlich kleinen Bogens mit dieſem Bogen zuſammenfällt, ſo kommt man wieder auf die Formel (τ).

§. 229. Wir wollen nun annehmen, was immer geſtattet iſt, daß die Krümmungsebene zu der der xy parallel ſei, ſo hat man $dz = 0$, $d^2z = 0$, folglich $X = 0$, $Y = 0$ und:

$$\varrho = \pm\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

aber dieſes iſt der Ausdruck des Krümmungshalbmeſſers der Projection der Curve von doppelter Krümmung auf die Ebene der xy (§. 196), und für $\xi - x$, $\eta - y$ fände man ebenfalls Werthe, welche mit den Werthen der Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes einer ebenen Curve übereinſtimmen. Hieraus folgt: daß der Krümmungshalbmeſſer einer beliebigen im Raume beſchriebenen Curve der Größe und Richtung nach mit

dem Krümmungshalbmeſſer der Projection dieſer Curve auf die Krümmungsebene übereinſtimmt.

§. 230. Wenn λ', μ', ν' die Winkel bezeichnen, welche die Normale auf der Krümmungsebene, reſp. mit den Parallelen zu der Axe der x, der y und z bilden, ſo hat man:

$$\cos.\lambda' = \pm\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \cos.\mu' = \pm\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos.\nu' = \pm\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Bezeichnet ferner $d\theta$ den unendlich kleinen Winkel, welchen die Normalen der einander unendlich naheliegenden beiden Krümmungsebenen, wovon ſich die eine auf den Punkt (x, y, z) und die andern auf den Punkt (x + dx, y + dy, z + dz) bezieht, miteinander bilden; ſo hat man nach dem vorhin Bewieſenen:

$$d\theta^2 = (d\cdot\cos.\lambda')^2 + (d\cdot\cos.\mu')^2 + (d\cdot\cos.\nu')^2$$

$$= \left(d\cdot\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2$$

$$= \frac{(X^2+Y^2+Z^2)(dX^2+dY^2+dZ^2)-(XdX+YdY+ZdZ)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}$$

$$= \frac{(XdY-YdX)^2 + (ZdX-XdZ)^2 + (YdZ-ZdY)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}.$$

Ferner findet man:

$$dX = dyd^2z - dzd^2y,\quad dY = dzd^2x - dxd^2z,\quad dZ = dxd^2y - dyd^2x,$$

$$\frac{XdY-YdX}{dz} = \frac{ZdX-XdZ}{dy} = \frac{YdZ-ZdY}{dx}$$

$$= dz(d^2xd^2y - d^2yd^2x) + dy(d^2zd^2x - d^2xd^2z) + dx(d^2yd^2z - d^2zd^2y),$$

und folglich:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{dz(d^2xd^2y-d^2yd^2x)+dy(d^2zd^2x-d^2xd^2z)+dx(d^2yd^2z-d^2zd^2y)}{(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2}.$$

Sowie nun der Ausdruck:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

worin $d\tau$ den von zwei einander unendlich nahe liegenden Tangenten gebildeter Contingenzwinkel bezeichnet, die Krümmung der Curve in ihrer Krümmungsebene oder ihre erſte Krümmung mißt, ebenſo iſt der Ausdruck:

$$\frac{d\theta}{ds},$$

worin $d\theta$ den von zwei aufeinander folgenden Krümmungsebenen gebildeten Flexionswinkel bezeichnet, das Maß der zweiten Krümmung der Curve, wodurch die Benennung „Linien von doppelter Krümmung", welche man den nicht in derſelben Ebene liegenden Curven beilegt, gerechtfertigt wird.

Um ſich die Rectification einer Curve von doppelter Krümmung vorzuſtellen, kann man ſich denken, daß die erſte Krümmungsebene auf die zweite, dieſe auf die dritte, u. ſ. f. niedergeſchlagen werde, ſo daß die Linie in eine ebene Curve verwandelt wird, und dann, daß die erſte Tangente auf die zweite, dieſe auf die dritte, u. ſ. f. ebenfalls niedergeſchlagen werde, ſo daß die ebene Curve in eine gerade Linie verwandelt wird, ohne daß die Länge der Elemente der urſprünglichen Curve durch dieſe doppelte Operation verändert iſt.

Durch eine umgekehrte Operation oder durch zwei aufeinander folgende Biegungen könnte man alſo auch von der geraden Linie zu einer beliebigen im Raume beſchriebenen Curve übergehen.

Man ſieht, daß der Ausdruck der zweiten Krümmung von den Differenzialen der dritten Ordnung der Coordinaten x, y, z abhängt, während der Ausdruck der erſten Krümmung blos von den Differenzialen der erſten und zweiten Ordnung abhängig iſt.

§. 231. Die zweite Biegung (Krümmung) verſchwindet und ändert im Allgemeinen das Zeichen, wenn man hat:

$$dz(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x) + dy(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) + dx(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y) = 0, \quad (e)$$

und man ſagt alsdann, die Curve erfahre eine einfache Inflexion. Wenn dieſe Bedingungsgleichung für alle Werthe von x, y, z erfüllt wird, ſo iſt die Curve eine ebene.

Wenn man x zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, ſo wird die Gleichung (e) auf die ſehr einfache Form:

$$y''z''' - z''y''' = 0$$

reducirt. Nach den Gleichungen (d) und (ϱ_1) verſchwindet die erſte Biegung, wenn man zu gleicher Zeit hat:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2y}{dy} = \frac{d^2z}{dz}. \quad (f)$$

Dieſe Bedingungsgleichungen reduciren ſich auf $y'' = 0$, $z'' = 0$, wenn x zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird. Hiernach iſt klar, daß, wenn die Gleichungen (f) erfüllt werden, es die Gleichung (e) ebenfalls wird; aber man darf daraus nicht mit einigen Schriftſtellern ſchließen, daß die durch die Gleichungen (f) charakteriſirte Inflexion der erſten Krümmung nothwendig die Exiſtenz einer doppelten Inflexion zur Folge habe. Es folgt daraus blos, daß der weiter oben angegebene Ausdruck von $\frac{d\theta}{ds}$ unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$ erſcheint, und um den wahren Werth deſſelben bequemer zu beſtimmen, wollen wir x zur unabhängigen Veränderlichen nehmen; ſo haben wir

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{y''z''' - z''y'''}{(y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Der Zähler und Nenner dieſes Bruches verſchwinden für $y'' = 0$, $z'' = 0$, und daſſelbe würde mit ihren Ableitungen der erſten Ordnung in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche x der Fall ſein. Aber wenn man zu den Ableitungen der zweiten Ordnung übergeht, ſo erhält man:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{y'''z^{IV} - z'''y^{IV}}{(y'z''' - z'y''')^2 + y'''^2 + z'''^2}.$$

welcher Werth nur unbeſtimmt werden könnte, wenn man zu gleicher Zeit $y''' = 0$, $z''' = 0$ hätte, und welcher im Allgemeinen von Null verſchieden iſt.

Daſſelbe erhellet auch aus der Figur; denn es ſeien $_1m$, m, m_1, m_2 (Fig. 70) vier aufeinander folgende Winkelſpitzen des windſchiefen Vieleckes mit unendlich kleinen Seiten, welches man für die Curven von doppelter Krümmung ſubſtituirt; ſo kann man die durch die Punkte $_1m$, m, m_1 gehende Ebene als die Krümmungsebene im Punkte m und die durch die Punkte m, m_1, m_2 gehende Ebene als die Krümmungsebene im Punkte m_1 betrachten (§. 225). Dieſe beiden Ebenen ſchneiden ſich nach einer geraden Linie mO. Nun kann man aber, ohne die gegenſeitige Neigung der beiden Ebenen zu verändern, indem man blos ihre Durchſchnittslinie verrückt, die Seite mm_1 in die Verlängerung der Seite $_1mm$ bringen, wodurch der Contingenzwinkel in m verſchwindet, wobei aber der Werth des Winkels der zweiten Biegung ganz ungeändert bleibt.

Wenn jedoch den Gleichungen (f) für alle Werthe von x, y, z genügt wird, ſo iſt die Linie eine gerade, und folglich verſchwindet der Winkel der zweiten Biegung ebenſowohl, als der Contingenzwinkel.

§. 232. Eine im Raume beſchriebene Curve kann als die Umhüllungslinie aller ihrer Tangenten, oder aller geraden Linien, womit ihre Tangente ſucceſſive zuſammenfällt, indem ſie ſich nach einem durch die Form der Curve gegebenen Geſetze im Raume bewegt, betrachtet werden (§. 189). Aber das Umgekehrte findet nicht ſtatt, und eine gerade Linie, welche ſich willkührlich im Raume bewegt, kann nicht haben, und hat auch im Allgemeinen nicht eine Umhüllungslinie, welche ſie in ihren verſchiedenen Bogen ſucceſſive in verſchiedenen Punkten berührt. Es ſeien, größerer Allgemeinheit wegen, die Gleichungen einer beliebigen Linie folgende:

$$f(\xi, \eta, \zeta, \alpha) = 0, f(\xi, \eta, \zeta, \alpha) = 0, \qquad (\alpha)$$

worin ξ, η, ζ die veränderlichen Coordinaten und α einen willkührlichen Parameter bezeichnen, deſſen ſtetige Veränderung die ſtetige Veränderungen beſtimmen, welche die Linie in ihrer Form und Lage erfahren kann; ſo werden die Gleichungen der Umhüllungslinie zwiſchen ξ, η, ζ, wenn ſie exiſtirt, durch die Elimination von α zwiſchen den beiden vorhergehenden Gleichungen und ihren Ableitungen in Beziehung auf α, nämlich:

$$\frac{df}{d\alpha} = 0, \frac{df}{d\alpha} = 0 \qquad (\alpha')$$

gegeben. Allein man hätte auf dieſe Weiſe mehr Gleichungen, als zur Beſtimmung der beiden Gleichungen der geſuchten Umhüllungslinie erforderlich ſind, wofern der aus den erſten Gleichungen (α), (α') als Function von ξ, η, ζ abgeleitete Werth von α nicht für alle Werthe der Coordinaten dem Werthe gleich wäre, welchen man erhielte, wenn man α zwiſchen den beiden letzten Gleichungen derſelben Gruppen eliminirte.

Wir wollen dieſes auch auf die geraden Durchſchnittslinien zweier einander unendlich nahe liegender Normalebenen einer gegebenen Curve anwenden. Dieſe geraden Linien ſind offenbar auf den entſprechenden Krümmungsebenen ſenkrecht und der Winkel, welchen ſie miteinander bilden, wenn ſie einander unendlich nahe kommen, iſt genau der weiter oben mit $d\theta$ bezeichnete Winkel. Für die Gleichungen dieſer dem Punkte (x, y, z) entſprechenden geraden Linien zwiſchen ξ, η, ζ haben wir in §. 227 gefunden:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \qquad (b)$$

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0. \qquad (b')$$

Die unabhängige Veränderliche t, wovon x, y, z Functionen ſind (§. 222), hängt von dem vorhin mit α bezeichneten veränderlichen Parameter ab, oder

was daſſelbe iſt, man kann annehmen, daß ſich α mit t ändert. Nun wollen wir aber bemerken, daß die Gleichung (b′) aus der Gleichung (b) bereits durch eine Differenzirung in Beziehung auf die als Functionen von t betrachteten Veränderlichen x, y, z abgeleitet iſt. Wenn man folglich die Gleichungen (b), (b′) nochmals in Beziehung auf t differenzirt, ſo wird nur noch eine neue Gleichung, nämlich:

$$(\xi-x)d^3x+(\eta-y)d^3y+(\zeta-z)d^3z-3(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)=0 \quad (b'')$$

eingeführt, und wir kommen folglich auf den Ausnahmefall der Exiſtenz einer Umhüllungslinie. Es gibt alſo eine Curve, deren Tangenten die Normalen auf den Krümmungsebenen der erſten Curve ſind, indem jede dieſer Normalen der Durchſchnitt zweier aufeinanderfolgender Normalebenen iſt. Nach Fourier's Bemerkung iſt der Contingenzwinkel oder der Winkel der erſten Biegung auf der zweiten Curve, dem Winkel der zweiten Biegung in dem entſprechenden Punkte der erſten Curve gleich. Um von dieſem umgekehrten Satze, welcher allein des Beweiſes bedarf, einen ſolchen zu geben, wollen wir bemerken, daß die Tangenten der erſten Curve Winkel miteinander bilden, welche den von den Normalebenen gebildeten Winkeln gleich ſind, und daß die Normalebene der erſten Curve die Krümmungsebene der zweiten iſt. Denn die Gleichung (b) iſt die der Normalebene, und dieſe Gleichung findet vermöge der Gleichungen (b′), (b″) noch ſtatt, wenn man darin ſucceſſive $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ und dann $x+2dx+d^2x$, $y+2dy+d^2y$, $z+2dz+d^2z$ reſp. für x, y, z ſetzt, ſo daß dieſe Ebene drei einander unendlich nahe liegende Punkte der Curve enthält, deren veränderliche Coordinaten ξ, η, ζ ſind.

§. 233. Wenn man die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes mit ξ, η, ζ bezeichnet, ſo hat man zur Beſtimmung dieſer drei Coordinaten die Gleichungen (b), (b′) und außerdem die Gleichung der Krümmungsebene:

$$X(\xi-x)+Y(\eta-y)+Z(\zeta-z)=0. \qquad (c)$$

Wenn man ſich alſo die Coordinaten x, y, z und ihre Differenziale der beiden erſten Ordnungen als Functionen einer unabhängigen Veränderlichen t ausgedrückt denkt, ſo braucht man nur noch t zwiſchen dieſen drei Gleichungen zu eliminiren, um zwei Gleichungen zwiſchen ξ, η, ζ zu erhalten, welche die Gleichungen der Linie ſind, worauf alle Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Curve liegen.

Da ξ, η, ζ Functionen von t ſind, ſo können wir die Gleichung (b) differenziren, indem wir alle darin vorkommenden Größen ſich ändern laſſen, und alsdann erhalten wir wegen der Gleichung (b′):

$$d\xi dx+d\eta dy+d\zeta dz=0, \qquad (g)$$

woraus folgt, daß die durch den Punkt (ξ, η, ζ) gezogene Tangente der neuen Curve auf der Tangente der gegebenen Curve im Punkte (x, y, z) ſenkrecht iſt und in ihrer Normalebene liegt.

Ebenſo gibt die Gleichung:

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=\varrho^2,$$

wenn man darin alle Größen ſich ändern läßt, und die Gleichung (b) berückſichtigt:

$$(\xi-x)\,d\xi+(\eta-y)\,d\eta+(\zeta-z)\,d\zeta=\varrho d\varrho,$$

woraus folgt, wenn man $d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=d\sigma^2$ ſetzt:

$$\pm\frac{d\varrho}{d\sigma}=\frac{\xi-x}{\varrho}\cdot\frac{d\xi}{d\sigma}+\frac{\eta-y}{\varrho}\cdot\frac{d\eta}{d\sigma}+\frac{\zeta-z}{\varrho}\cdot\frac{d\zeta}{d\sigma}. \qquad (g_1)$$

Der zweite Theil dieſer letzten Gleichung drückt den Coſinus des Winkels aus, welchen der Krümmungshalbmeſſer ϱ mit der Tangente der Curve bildet, die der geometriſche Ort der Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Curve iſt. Wenn die gegebene Curve eine ebene iſt, ſo verſchwindet dieſer Winkel, und man hat $d\varrho = + d\sigma$. Aus dieſem Reſultate, verglichen mit der Gleichung $(\varkappa)$, folgt, daß der geometriſche Ort der Krümmungspunkte zu gleicher Zeit die Evolute der gegebenen Curve iſt.

Um zu zeigen, daß dieſes nicht mehr ſtattfindet, wenn die gegebene Curve keine ebene iſt, oder daß die Richtung des Krümmungshalbmeſſers nicht mehr mit der Richtung der Tangente an der Linie der Krümmungsmittelpunkte zuſammenfällt, braucht man nur zu zeigen, daß das Syſtem der Krümmungshalbmeſſer keine Umhüllungslinie hat, oder daß man im Raume keine Linie beſchreiben kann, welche alle dieſe Krümmungshalbmeſſer berührt.

Zu dieſem Zwecke wollen wir bemerken, daß die Richtung der geraden Linie ϱ mittelſt des Durchſchnittes der Normalebene und der Krümmungsebene beſtimmt wird, und daß folglich die Gleichungen dieſer geraden Linie zwiſchen ξ, η, ζ folgende ſind:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \qquad (b)$$

$$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0. \qquad (c)$$

Um die Gleichung der Umhüllungscurve der geraden Linien ϱ zu erhalten, wenn ſie exiſtirt, muß man mit dieſen Gleichungen ihre Ableitungen in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche t verbinden, und auf dieſe Weiſe erhält man unter Berückſichtigung der Gleichung (c'):

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0, \qquad (b')$$

$$(\xi - x)\,dX + (\eta - y)\,dY + (\zeta - z)\,dZ = 0. \qquad (c'_1)$$

Aus den vier Gleichungen (b), (c), (b') und (c'_1) ergibt ſich durch Elimination der Binome $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ eine Bedingungsgleichung, welcher die Coordinaten x, y, z und ihre Differenziale genügen müſſen, damit die geraden Linien ϱ eine Umhüllungscurve haben können. So geben z. B. die Gleichungen (b), (c), (b') die bereits in §. 228 angeführten Werthe von $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, und wenn dieſe Werthe in die Gleichung (c'_1) ſubſtituirt werden, ſo wird ſie mit der Gleichung (ε) identiſch, welche, wie wir geſehen haben, ausdrückt, daß die gegebene Curve eine ebene iſt, wenn ſie für alle Werthe von x, y, z erfüllt wird.

Zu demſelben Reſultate würde man auch gelangen, aber nicht ſo einfach, wenn man ausdrückte, daß ſich der zweite Theil der Gleichung $(\varkappa_1)$ für alle Werthe von x, y, z auf die Einheit reduciren muß.

Daraus, daß die Linie der Krümmungsmittelpunkte keine Evolute mehr iſt, wenn die gegebene Curve keine ebene iſt, darf man jedoch nicht ſchließen, daß die Linien von doppelter Krümmung keine Evoluten haben können. Da ſich aber die Conſtruction der Evoluten für Linien von doppelter Krümmung an die Theorie der krummen Flächen ſchließt, ſo ſoll ſpäter die Rede davon ſein.

§. 234. Wir wollen die in dieſem Kapitel mitgetheilten Formeln auf die ſogenannte Schraubenlinie anwenden, welche auf der Oberfläche eines geraden Cylinders mit kreisförmiger Baſis ſo beſchrieben iſt, daß die Tangente der Curve mit den Erzeugungslinien des Cylinders einen conſtanten Winkel bildet, oder ſo, daß ſich die Curve in eine gerade Linie verwandelt, wenn die cylindriſche Fläche in eine Ebene ausgebreitet wird. Es ſei R der Halbmeſſer des Cylinders, deſſen Axe mit der der z zuſammenfalle, φ ſei der Winkel zwiſchen der Ebene der xz und der durch die Axe des Cylinders gelegten Ebene, worin der Punkt (x, y, z) der Curve liegt und a bezeichne die trigo-

nometriſche Tangente des conſtanten Winkels, welchen die Tangente der Curve mit der Erzeugungslinie des Cylinders bildet; ſo gibt die Definition der Schraubenlinie unmittelbar:

$$x = R \cos. \varphi, \quad y = R \sin. \varphi, \quad z = aR\varphi, \qquad (h)$$

wenigſtens wenn man annimmt, daß die Axe der x durch den Punkt geht, worin die Schraubenlinie die Ebene der xy trifft. Die Gleichungen der Projectionen der Curve auf die Ebenen der xz und der yz ſind folglich zwiſchen rechtwinkligen Coordinaten:

$$x = R \cos. \frac{z}{aR}, \quad y = R \sin. \frac{z}{aR}, \qquad (h_1)$$

und die Gleichung der Projection der Curve auf die Ebene der xy ſtimmt offenbar mit der des Durchſchnittes des Cylinders mit dieſer Ebene überein, und iſt folgende:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (h_2)$$

Auch hat man die Gleichung:

$$\frac{y}{x} = \text{tang.} \frac{z}{aR}, \qquad (h_3)$$

welches die Gleichung der Fläche iſt, welche durch eine gerade Linie erzeugt wird, die ſich, indem ſie ſtets zu der Ebene der xy parallel bleibt, ſo bewegt, daß ſie ſich fortwährend auf die Schraubenlinie und auf die Axe des Cylinders ſtützt.

Es iſt wohl zu bemerken, daß das Syſtem der Gleichungen (h_1) nur eine einzige Schraubenlinie ausdrückt, nämlich die, welche vermittelſt des Winkels φ durch die Gleichungen (h) ausgedrückt wird, während das Syſtem der Gleichungen (h_2), (h_3) oder das Syſtem, welches aus der Verbindung der Gleichung (h_2) mit einer der Gleichungen (h_1) gebildet wird, außerdem noch eine andere Schraubenlinie ausdrücken könnte, welche man erhielte, wenn man $\pi + \varphi$ für φ in die Gleichungen (h) ſetzte. Dieſer Ueberfluß, welcher für gewiſſe Projectionsſyſteme ſtattfindet und für andere nicht, iſt dem bereits in §. 176 bei Gelegenheit der Cycloide angeführten, analog.

Die Gleichungen der Tangente der Schraubenlinie ſind:

$$-\frac{\xi - x}{\sin. \varphi} = \frac{\eta - y}{\cos. \varphi} = \frac{\zeta - z}{a},$$

und die der Normalebene iſt:

$$(\xi - x) \sin. \varphi - (\eta - y) \cos. \varphi - a(\zeta - z) = 0.$$

Hieraus folgt, daß die Normalebene mit der Ebene der xy einen conſtanten Winkel bildet, was übrigens auch aus der Definition der Curve hervorgeht.

Die Coordinaten ξ, η des Punktes, worin die Tangenten im Punkte (x, y, z) der Schraubenlinie die Ebene der xy trifft, werden durch folgende Gleichungen beſtimmt:

$$\xi - x = \frac{z}{a} \sin. \varphi = R\varphi \sin. \varphi, \quad \eta - y = -\frac{z}{a} \cos. \varphi = -R\varphi \cos. \varphi,$$

woraus folgt:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = R^2\varphi^2.$$

Es ſei AmBA (Fig. 71) der Durchſchnitt des Cylinders mit der Ebene der xy, A der Punkt, worin die Schraubenlinie dieſe Ebene trifft, $m\mu$ die Projection der Tangente der Schraubenlinie in dem Punkte, welcher ſich auf

die Ebene der xy nach m projeccirt und μ der Punkt, wo dieſe Tangente dieſelbe Ebene trifft; ſo berührt die gerade Linie $m\mu$ den Kreis in m, und aus der vorhergehenden Gleichung folgt; daß die gerade Linie $m\mu$ dieſelbe Länge hat, wie der Bogen Am. Wenn alſo die Tangente der Schraubenlinie ſich fortbewegt, indem ſie dieſe Curve beſtändig berührt, ſo beſchreibt der Punkt μ, worin ſie die Ebene der xy trifft, auf dieſer Ebene eine Evolvente des Kreiſes, welcher der Durchſchnitt des Cylinders mit derſelben Ebene iſt, und dieſe Evolvente hat in dem Punkte, worin die Schraubenlinie dieſelbe Ebene trifft, einen Rückkehrpunkt (§. 221).

§. 235. Wenn man, wie es der Natur der Curve entſpricht, den Winkel φ zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, ſo hat man:

$$dx = R \sin.\varphi d\varphi,\quad dy = R\cos.\varphi d\varphi,\quad dz = aRd\varphi;$$

$$d^2x = -R\cos.\varphi d\varphi^2,\quad d^2y = -R\sin.\varphi d\varphi^2,\quad d^2z = 0;$$

$$d^3x = R\sin.\varphi d\varphi^3,\quad d^3y = -R\cos.\varphi d\varphi^3,\quad d^3z = 0.$$

Bezeichnet man ferner den conſtanten Winkel, deſſen Tangente $= a$ iſt, mit i, ſo erhält man:

$$ds = \frac{R}{\cos.i} d\varphi,\quad d^2s = 0;$$

Bei Berückſichtigung dieſer Werthe gibt die Formel (ϱ_2) für das Maas der erſten Krümmung:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos.^2 i}{R};$$

und für das der zweiten Krümmung hat man nach den Formeln in §. 230:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin.i\cos.i}{R}.$$

Die Gleichung der Krümmungsebene wird:

$$\text{tang.}\, i\,[(\xi - x)\sin.\varphi - (\eta - y)\cos.\varphi] + \zeta - z = 0,$$

oder vermöge der Gleichungen (h) einfacher:

$$\zeta - z = a(\eta\cos.\varphi - \xi\sin.\varphi);$$

und man ſieht, daß ſie gegen die Ebene der xy eine conſtante Neigung hat.

Für die Coordinaten ξ, η, ζ des Krümmungsmittelpunktes hat man die Werthe:

$$\xi = -a^2R\cos.\varphi,\quad \eta = -a^2R\sin.\varphi,\quad \zeta = aR\varphi, \qquad (\eta)$$

welche denen von x, y, z als Functionen von φ ganz analog ſind, und zeigen, daß die Linie der Krümmungsmittelpunkte eine zweite Schraubenlinie iſt, die auf einem Cylinder beſchrieben iſt, welcher die Axe z ebenfalls zur Axe und einen Halbmeſſer $= a^2R$ hat. Uebrigens befindet ſich dieſe Linie, wie die erſte Schraubenlinie, auf der durch die Gleichung (h_3) ausgedrückten Fläche, und da die Gleichungen (h), (η) für z und ζ dieſelben Werthe geben, ſo folgt, daß die beiden Schraubenlinien dieſelbe Schraubenweite haben, oder daß die Veränderlichen z, ζ denſelben Zuwachs bekommen, wenn der Bogen φ um einen ganzen Kreisumfang zunimmt.

Ferner folgt aus der Vergleichung der Gleichungen (h), (η), daß der Krümmungshalbmeſſer ϱ nach dem Halbmeſſer des Cylinders (h_2), oder nach der beweglichen geraden Linie, welche die Fläche (h_3) beſchreibt, gerichtet iſt, und folglich die Axe der Schraubenlinie rechtwinklig durchſchneidet. Da man ferner hat:

$$d\sigma = \pm R \sin. i \cdot d\varphi, \quad \rho = \text{const.},$$

ſo folgt aus der Formel (g_1) auch, daß der Krümmungshalbmeſſer ρ die Tangente an der Linie der Krümmungsmittelpunkte unter einem rechten Winkel durchſchneidet, was auch ohne alle Rechnung daraus folgt, daß ρ nach dem Halbmeſſer des Cylinders gerichtet iſt, worauf die zweite Schraubenlinie oder der geometriſche Ort der Krümmungsmittelpunkte liegt.

Endlich fällt in dem gegenwärtigen Falle die Linie der Krümmungsmittelpunkte mit der Umhüllungscurve der geraden Durchſchnittslinien der ſucceſſiven Normalebenen oder mit der Linie zuſammen, deren zweite Biegung der erſten Biegung der gegebenen Curve gleich iſt, und umgekehrt.

Sechstes Kapitel.

Ueber die Berührungsebenen der krummen Flächen.

§. 236. Wir wollen nun zu den Anwendungen der Differenzialrechnung auf die Theorie der krummen Flächen übergehen, welche auch in praktiſcher Hinſicht von Wichtigkeit ſind. Die Entwickelung dieſer Theorie verdanken wir beſonders Monge und ſeinen Schülern, und ſie bildet eine der weſentlichſten Vervollkommnungen, welche die höhere Geometrie ſeit dem Alterthume erhalten hat.

Wenn die Gleichung einer auf geradlinige Coordinaten x, y, z, welche wir der Einfachheit wegen als rechtwinklig vorausſetzen wollen, bezogenen krummen Fläche gegeben iſt, ſo kann man auch zwei dieſer Veränderlichen, z. B. x, y, als unabhängig betrachten, und die dritte Veränderliche z, welche eine Function der beiden erſten iſt, hat zwei partielle Ableitungen der erſten Ordnung p, q, und das Totaldifferenzial derſelben wird folglich ausgedrückt durch:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

wo die unendlich kleinen Incremente dx, dy von einander unabhängig bleiben.

Aber wenn man ſich auf der krummen Fläche irgend eine durch den Punkt (x, y, z) gehende Linie beſchrieben denkt, ſo findet für die auf dieſer Linie liegenden Punkte zwiſchen y und x und folglich zwiſchen dy und dx eine gegenſeitige Abhängigkeit ſtatt, ſo daß man ſetzen kann:

$$dy = y'dx, \quad dz = (p + qy')\,dx,$$

wo z' eine Function von x bezeichnet, welche durch die Geſtalt der erwähnten Curve beſtimmt wird.

Es ſeien ξ, η, ζ die veränderlichen Coordinaten der Tangente der in Rede ſtehenden Curve im Punkte (x, y, z), ſo ſind die Gleichungen dieſer Tangente nach §. 223:

$$\eta - y = y'(\xi - x), \quad \zeta - z = (p + qy')(\xi - x). \qquad (1)$$

Wenn man alſo zwiſchen dieſen Gleichungen y' eliminirt, ſo gehört die reſultirende Gleichung der krummen Fläche an, worauf alle die Tangenten liegen, welche man im Punkte (x, y, z) an alle auf der gegebenen Fläche beſchriebene und durch dieſen Punkt gehende Curven ziehen kann. Die Elimination gibt:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y), \qquad (2)$$

welches die Gleichung einer Ebene iſt, deren veränderliche Coordinaten ξ, η, ζ ſind, und welche man die Berührungsebene nennt, weil ſie der geometriſche Ort aller Tangenten der auf der gegebenen Fläche beſchriebenen und durch den Berührungspunkt gehenden Curven iſt.

Der vorhergehende Satz würde im Allgemeinen nicht mehr richtig ſein, wenn die beiden Functionen p, q, oder blos eine derſelben, nachdem ſie blos zu Functionen von x und y gemacht ſind, indem man für z ſeinen aus der Gleichung der krummen Fläche abgeleiteten Werth als Function von x und y ſubſtituirt, unter einer der unbeſtimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ erſchiene; denn alsdann ſind die Werthe von p, q im Allgemeinen von dem zwiſchen y und x ſtattfindenden Zuſammenhange abhängig, oder ſie ſind Functionen von y' (§. 139). Man kann alſo y' nicht mehr zwiſchen den Gleichungen (1) eliminiren, ſo lange die Zuſammenſetzung der Functionen p, q aus y' nicht gegeben iſt, und wenn dieſes der Fall iſt, ſo führt die Elimination im Allgemeinen nicht mehr auf eine lineare Gleichung zwiſchen ξ, η, ζ. Der Punkt (x, y, z) iſt alsdann ein vorſpringender Punkt der gegebenen Fläche und der Ort der Tangenten in dieſem Punkte wird eine Kegelfläche, d. h. eine Fläche, welche eine gerade Linie beſchreibt, die ſich auf eine beliebige Weiſe um einen feſten Punkt dreht.

Wenn man z. B. einen Kreisbogen, welcher kleiner iſt, als der Halbkreis, ſich um ſeine Sehne drehen läßt, ſo ſind die beiden Endpunkte des Bogens vorſpringende Punkte der durch dieſe Rotationsbewegung erzeugten Fläche, und der geometriſche Ort der Tangenten aller auf dieſer Fläche von jedem der beiden erwähnten Punkte aus beſchriebenen Curven iſt die Oberfläche eines geraden Kegels.

Zuweilen kann die Berührungsebene nur einen einzigen Punkt mit der krummen Fläche gemein haben, welches eine Eigenſchaft der in allen ihren Punkten converen krummen Flächen iſt, wie z. B. bei der Kugel und dem Ellipſoide. Aber im Allgemeinen kann dieſe Ebene die krumme Fläche ſchneiden, und ſogar nach einer durch den Berührungspunkt gehenden Linie, weshalb ſie doch ſehr wohl der geometriſche Ort der Tangenten aller auf der gegebenen krummen Fläche durch dieſen Punkt beſchriebenen Curven ſein kann. Dieſe Durchſchnittslinie trennt auf der krummen Fläche die über der Berührungsebene liegenden Linien von den unter dieſer Ebene liegenden.

Wenn ſich z. B. der Kreis $MNM'N'$ (Fig. 73) um die in ſeiner Ebene liegende gerade Linie dreht, ſo erzeugt er eine krumme Fläche, welche eine ringförmige Fläche genannt wird. In dem durch die Umdrehung des Halbkreiſes MNM' erzeugten Theile der krummen Fläche hat die Berührungsebene nur einen Punkt mit dieſer Fläche gemein, während in dem andern durch die Umdrehung des Halbkreiſes $MN'M'$ erzeugten Theile die krumme Fläche von ihrer Berührungsebene geſchnitten wird.

§. 237. Es ſei $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der krummen Fläche, ſo iſt die Gleichung ihrer Berührungsebene, wenn die Ableitungen p, q durch die partiellen Ableitungen der Function F ausgedrückt werden:

$$(\xi - x)\frac{dF}{dx} + (\eta - y)\frac{dF}{dy} + (\zeta - z)\frac{dF}{dz} = 0;$$

d. h. ſie ergibt ſich aus $dF = 0$, wenn man für die Differenziale dx, dy, dz die Differenzen $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ ſetzt (§. 172).

Das im Berührungspunkte auf der Berührungsebene errichtete Perpendikel iſt die Normale der krummen Fläche, und alle durch dieſe Normale gelegten Ebenen heißen Normalebenen. Der Durchſchnitt der krummen Fläche mit

irgend einer dieſer Normalebenen wird ein Normalſchnitt genannt, wogegen ihre Durchſchnitte mit andern Ebenen ſchiefe Durchſchnitte genannt werden.

Die beiden Gleichungen der Normale ergeben ſich aus der Formel:

$$\frac{\xi - x}{\frac{dF}{dx}} = \frac{\eta - y}{\frac{dF}{dy}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dF}{dz}},$$

oder:

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = -(\zeta - z).$$

Wenn λ, μ, ν die Winkel bezeichnen, welche die Normale mit den Axen der x, y, z bildet, indem dieſe Winkel von der Seite der poſitiven Coordinaten ausgezählt werden, und man ſetzt:

$$R = \pm\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2};$$

ſo hat man:

$$\cos.\lambda = \frac{1}{R} \cdot \frac{dF}{dx},\quad \cos.\mu = \frac{1}{R} \cdot \frac{dF}{dy},\quad \cos.\nu = \frac{1}{R} \cdot \frac{dF}{dz},$$

oder vielmehr:

$$\cos.\lambda = \frac{\mp p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos.\mu = \frac{\mp q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos.\nu = \frac{\mp 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \qquad (3)$$

Die Buchſtaben λ, μ, ν bezeichnen auch die Winkel, welche die Berührungsebene, reſp. mit den Ebenen der yz, der xz und der xy bildet, und alle dieſe Formeln werden häufig angewandt.

§. 238. Es ſei:

$$dF = Xdx + Ydy + Zdz = 0 \qquad (4)$$

die gemeinſchaftliche Differenzialgleichung einer Reihe krummer Flächen:

$$F(x, y, z) = a, \qquad (5)$$

welche ſich nur durch den Werth des Parameters a von einander unterſcheiden, ſo laſſen ſich die Gleichungen der Normalen auf folgende Form bringen:

$$Y(\xi - x) - X(\eta - y) = 0,\quad Z(\xi - x) - X(\zeta - z) = 0,$$

und dieſes ſind die Gleichungen der geraden Linien, welche die im Raume beſchriebenen Linien in dem Punkte (x, y, z) berühren, welche die Eigenſchaft haben, daß ſie den Differenzialgleichungen:

$$Y - X\frac{dy}{dx} = 0,\quad Z - X\frac{dz}{dx} = 0.$$

genügen, und folglich haben dieſe Linien nach dem im §. 129 und 151 Geſagten auch die Eigenſchaft, daß ſie alle durch die Gleichung (5) oder durch die Gleichung (4) ausgedrückten krummen Flächen unter rechten Winkeln treffen.

§. 239. Wir wollen die vorhergehenden Formeln auf die Gleichung:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (6)$$

anwenden, welche, wie leicht aus ihrer Form erhellet, der durch die Umdrehung einer Hyperbel um ihre nicht ſchneidende Axe erzeugten krummen Fläche angehört, welche das Rotationshyperboloid mit einem Fache genannt wird, um ſie von dem Rotationshyperboloide mit zwei Fächern, welches durch die Umdrehung einer Hyperbel um ihre ſchneidende Axe erzeugt wird, zu unterſcheiden.

Für die Gleichung der Berührungsebene findet man:

$$\frac{x\xi + y\eta}{a^2} - \frac{z\zeta}{b^2} = 1, \qquad (7)$$

und wenn man darin ξ, η, ζ als Conſtanten und x, y, z als die veränderlichen Coordinaten betrachtet, ſo gehört dieſe Gleichung zu einer Ebene, welche das Hyperboloid nach einer Curve durchſchneidet, die der geometriſche Ort der Berührungspunkte des Hyperboloides mit allen durch den Punkt (ξ, η, ζ) gehenden Ebenen iſt. Wenn man eine ähnliche Rechnung auf die allgemeine Gleichung der Fläche des zweiten Grades anwendet, ſo ergibt ſich, daß, wenn man an irgend eine dieſer Flächen von einem außerhalb gegebenen Punkte Berührungsebenen legt, der geometriſche Ort aller Berührungspunkte eine ebene Curve des zweiten Grades iſt. Hieraus folgt, daß die um eine Fläche des zweiten Grades beſchriebene Kegelfläche vom zweiten Grade iſt.

Wenn die Berührungsebene (7) das Hyperboloid zu gleicher Zeit ſchneidet und berührt, ſo werden die Gleichungen der Durchſchnittslinie zwiſchen ξ, η, ζ durch die Verbindung der Gleichung (7) mit der folgenden:

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} - \frac{\zeta^2}{b^2} = 1. \qquad (8)$$

erhalten. Die Verbindung der Gleichungen (6), (7), (8) gibt aber:

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2}\right) - \left(\frac{x\xi + y\eta}{a^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right)\left(1 + \frac{\zeta^2}{b^2}\right) - \left(1 + \frac{z\zeta}{b^2}\right)^2,$$

oder vielmehr:

$$\left(\frac{x\eta - y\xi}{a^2}\right)^2 = \left(\frac{z - \zeta}{b}\right)^2,$$

und dieſe letzte Gleichung zerfällt in die beiden folgenden:

$$\frac{x\eta - y\xi}{a^2} = \frac{z - \zeta}{b}, \quad \frac{x\eta - y\xi}{a^2} = -\frac{z - \xi}{b},$$

Die eine oder die andere dieſer Gleichungen drückt in Verbindung mit der Gleichung (7) eine gerade Linie aus. Die Berührungsebene ſchneidet alſo die krumme Fläche nach zwei durch den Berührungspunkt gehenden geraden Linien, wovon ſich jede mit dem Punkte (x, y, z) verrückt, und folglich kann das Hyperboloid durch jede dieſer beweglichen geraden Linien beſchrieben werden.

Man kann in den Gleichungen (6) und (7) auch $z = 0$ ſetzen, d. h. einen der Punkte des Kreiſes $x^2 + y^2 = a^2$, nach welchem das Hyperboloid von der Ebene der xy geſchritten wird, zum Berührungspunkte nehmen. Die Gleichung (7) reducirt ſich alsdann auf $x\xi + y\eta = a^2$ und drückt offenbar aus, daß die Projectionen der eben erwähnten beweglichen geraden Linien auf der Ebene der xy Tangenten des Kreiſes ſind, welcher durch die Umdrehung des einen oder andern der Scheitel der Hyperbel erzeugt und der Kehlkreis genannt wird.

§. 240. Wenn man die Gleichung einer krummen Fläche auf die Form $z = f(x, y)$ bringt, ſo hat man nach §. 157:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) = f(x,\ y) + p\Delta x + q\Delta y$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^2f(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{dx^2}\Delta x^2 + 2\frac{d^2f(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{dxdy}\Delta x\Delta y\right.$$
$$\left. + \frac{d^2f(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{dy^2}\,dy^2\right],$$

wo θ eine zwiſchen Null und der Einheit liegende Zahl bezeichnet. Es ſei:

$$\zeta - z = m(\xi - x) + n(\eta - y) \qquad (2')$$

die Gleichung einer durch den Punkt (x, y, z) gehenden Ebene, ſo wird ihre den Abſciſſen $\xi = x + \Delta x$, $\eta = y + \Delta y$ entſprechende Ordinate ζ ausgedrückt durch:

$$\zeta = z + m\Delta x + n\Delta y = f(x, y) + m\Delta x + n\Delta y.$$

Folglich iſt:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - \zeta = (p-m)\,\Delta x + (q-n)\,\Delta y$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^2fx+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{dx^2}\Delta x^2 + 2\frac{d^2f(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{dxdy}\Delta x\Delta y\right.$$
$$\left. + \frac{d^2f(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}{dy^2}\,\Delta y^2\right].$$

wo Δx, Δy ſehr kleine Größen der erſten Ordnung ſind, und folglich die Differenz:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - \zeta \qquad (\Delta)$$

zwiſchen den Ordinaten der krummen Fläche und der Ebene ebenfalls eine ſehr kleine Größe der erſten Ordnung iſt, ſo lange die Glieder:

$$(p-m)\,\Delta x + (q-n)\,\Delta y,$$

gegen welche man den zweiten Theil des Werthes von (Δ) vernachläſſigen kann, nicht verſchwinden. Aber wenn $m = p$, $n = q$ iſt, oder wenn die Ebene $(2')$ mit der Berührungsebene (2) zuſammenfällt, ſo reducirt ſich die Differenz (Δ) auf eine ſehr kleine Größe der zweiten Ordnung. Ferner ſieht man leicht ein, daß das vom Punkte $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ auf die Ebene $(2')$ gefällte Perpendikel im Allgemeinen eine Größe von derſelben Ordnung wie (Δ) iſt. Man kann alſo die Berührungsebene als eine Ebene betrachten, welche ſich der krummen Fläche in der Nähe des Berührungspunktes mehr nähert, als jede andere durch denſelben Punkt gehende Ebene (§. 203).

Siebentes Kapitel.

Analytiſche Merkmale der Hauptfamilien der krummen Flächen.

§. 241. Bekanntlich führt jeder mathematiſche oder empiriſche Zuſammenhang zwiſchen den Veränderlichen x, y, z, welcher allgemein durch:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

ausgedrückt wird, auf die Conſtruction einer krummen Fläche, wenn man x, y, z als die drei Coordinaten betrachtet, welche die Lage eines Punktes im

Raume bestimmen. Allein die so construirte Fläche wird im Allgemeinen nicht geometrisch bestimmt sein, und es kommt jetzt nicht blos mehr darauf an, analytische Begriffe räumlich darzustellen, sondern die Analysis auf die Theorie der Ausdehnung anzuwenden, und wir haben daher hier nur diejenigen Flächen zu betrachten, welche durch geometrische Eigenschaften charakterisirt werden.

Zuweilen läßt sich die geometrische Definition einer krummen Fläche unmittelbar durch eine Gleichung zwischen ihren veränderlichen Coordinaten ausdrücken. So drückt z. B. die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

unmittelbar das geometrische Merkmal aus, wodurch man die Oberfläche einer Kugel definiren kann, nämlich, daß alle ihre Punkte von einem andern Punkte, welcher hier zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen ist, gleich weit entfernt sind. Aber gewöhnlicher besteht die geometrische Definition einer Fläche in der Angabe des Gesetzes der Beschreibung derselben durch eine Linie, welche sich blos im Raume bewegt, ohne ihre Form zu verändern, oder während der Bewegung auch zugleich ihre Form verändert. In diesem Falle wird die Gleichung (1), als durch die Elimination des Parameters α zwischen den Gleichungen:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad (2)$$

welche die einer im Raume beschriebenen Linie sind, gegeben angesehen, und diese Linie, welche die Erzeugungslinie genannt wird, ändert entweder ihre Lage und Form, oder wenigstens ihre Lage mit dem Parameter α.

Man sagt auch: die Fläche (1) sei der geometrische Ort aller Linien, welche das System der Gleichungen (2) gibt, wenn man den Parameter α sich stetig ändern läßt.

So ist z. B. die Oberfläche des in den Elementen der Geometrie betrachteten geraden Kegels die Fläche, welche durch eine gerade Linie beschrieben wird, die beständig durch einen festen Punkt geht und sich so bewegt, daß sie mit einer andern durch denselben Punkt gehenden geraden Linie einen constanten Winkel bildet. Man könnte sich die Kegelfläche aber auch als durch einen Kreis beschrieben denken, dessen Mittelpunkt sich auf der Axe des Kegels fortbewegt, indem seine Ebene stets auf dieser Axe senkrecht bleibt und sein veränderlicher Halbmesser der Entfernung der Spitze des Kegels von dem Mittelpunkte des beweglichen Kreises proportional ist.

§. 242. Dieses führt uns auf die Eintheilung der krummen Flächen in Familien, nach den geometrischen Analogieen ihrer Beschreibungsarten, und diese schon an und für sich für die Einsicht der Operationen in den Künsten und Gewerben so merkwürdige und nützliche Eintheilung hat für uns noch das besondere Interesse, daß sie sich unmittelbar an die Theorie der Functionen, so wie wir sie betrachtet haben, anschließt. Man darf diese Eintheilungsart nicht mit der der algebraischen Linien oder Flächen nach dem Grade ihrer Gleichungen verwechseln, obgleich sich vermöge des zwischen der Geometrie und der Algebra stattfindenden Zusammenhanges oft Analogieen zwischen den Linien und Flächen, welche durch Gleichungen von demselben Grade ausgedrückt werden, herausstellen (§. 207).

So gehört z. B. der vorhin erwähnte gerade Kegel zu der Familie der Kegelflächen, deren gemeinschaftliches Merkmal darin besteht, daß sie durch eine gerade Linie beschrieben werden, welche beständig durch einen festen Punkt geht. Ebenso gehört der gerade Cylinder, welchen man in den Elementen betrachtet, zu der Familie der cylindrischen Flächen, welche durch eine sich bewegende gerade Linie erzeugt werden, die stets zu sich selbst parallel bleibt. In beiden Fällen kann man für den Kreis, welcher bei dem gewöhnlichen Cylinder und

Kegel als Richtlinie der Erzeugungslinie bei ihrer Bewegung dient, eine beliebige algebraiſche, oder tranſcendente, oder auch eine ganz willkührliche, im Raume beſchriebene Curve ſubſtituiren. Im Allgemeinen nennt man nämlich die Linien, auf welche ſich die Erzeugungslinie bei der Beſchreibung einer beſtimmten Fläche ſtützt, Richtlinien.

Die Eintheilung der Flächen in Familien unterſcheidet ſich von einer eigentlichen Klaſſification (§. 18) dadurch, daß dieſelbe Fläche nach den verſchiedenen Analogieen, welche ihre Beſchreibungsart darbietet, zu verſchiedenen Familien gezählt werden kann. So kann man z. B. den gewöhnlichen Kegel und Cylinder auch als zu der Familie der Rotationsflächen gehörig betrachten, deren gemeinſchaftliches Merkmal darin beſteht, daß ſie durch eine ebene Linie, die Meridianlinie, welche ſich um eine in ihrer Ebene liegende Axe dreht, erzeugt werden. Dieſe Meridianlinie reducirt ſich in dem Falle des Cylinders oder Kegels auf eine zu der Rotationsaxe parallele oder ſchiefe gerade Linie; aber ſie kann auch eine beliebige, in der Meridianebene beſchriebene Curve ſein.

Man begreift hiernach, daß die Flächen, deren Gleichungen nicht algebraiſch ſind, und ſich nicht einmal durch mathematiſche Zeichen ausdrücken laſſen, dennoch gemeinſchaftliche Eigenſchaften haben und hinſichtlich der gemeinſchaftlichen Gruppirungsmerkmale geometriſch unterſucht werden können.

Regelflächen.

§. 243. Unter Regelflächen werden alle diejenigen verſtanden, welche eine ſich auf eine beliebige Weiſe im Raume bewegende gerade Linie erzeugen kann. Man kehrt auch dieſe Definition wohl um, und ſagt, daß man durch jeden Punkt auf einer Regelfläche immer eine gerade Linie ziehen kann, welche ganz in dieſe Fläche fällt. Die Berührungsebene einer Regelfläche enthält, weil alle Tangenten der durch den Berührungspunkt auf der Regelfläche gezogenen Linien in ihr liegen, auch die durch dieſen Punkt gehende Erzeugungslinie, weil eine Linie mit ihrer Tangente zuſammenfällt, wenn ſie eine gerade wird.

Wenn die Gleichungen der geraden Erzeugungslinie auf die Form:

$$y = \alpha x + \gamma, \quad z = \beta x + \delta,$$

gebracht ſind, ſo dürfen ſie nur einen willkührlichen Parameter enthalten, weil es ſonſt keine Fläche geben könnte, welche der geometriſche Ort aller Erzeugungslinien wäre. Man hat alſo:

$$\beta = \varphi\alpha, \quad \gamma = \psi\alpha, \quad \delta = \omega\alpha,$$

ſo daß das Syſtem der beiden Gleichungen:

$$y = \alpha x + \psi\alpha, \quad z = x\varphi\alpha + \omega\alpha, \qquad (3)$$

wo φ, ψ, ω beliebige Functionszeichen ſind, eine beliebige Regelfläche ausdrücken kann.

Die beiden einander unendlich nahe liegenden Erzeugungslinien, für welche der veränderliche Parameter die Werthe α und $\alpha + d\alpha$ annimmt, treffen einander im Allgemeinen nicht, d. h. es gibt im Raume keine Linie, welche die Umhüllungslinie aller geraden Erzeugungslinien wäre (§. 232); denn wenn dieſe Umhüllungslinie exiſtirte, ſo müßten ſich ihre Gleichungen durch die Elimination von α zwiſchen den Gleichungen (3) und ihren Ableitungen in Beziehung auf α, nämlich:

$$x + \psi'\alpha = 0, \quad x\varphi'\alpha + \omega'\alpha = 0$$

ergeben. Sollen aber dieſe beiden letzten Gleichungen zuſammen ſtattfinden können, ſo muß man folgende Bedingungsgleichung haben:

$$\omega'\alpha = \varphi'\alpha \cdot \psi'\alpha, \qquad (4)$$

welche nur zwei der Functionen φ, ψ, ω willkührlich und unabhängig läßt.

Wenn dieſe Bedingungsgleichung nicht erfüllt wird, und die geraden Erzeugungslinien keine Umhüllungslinien haben, ſo wird die Regelfläche eine windſchiefe Fläche und im entgegengeſetzten Falle eine abwickelbare Fläche genannt, und zwar aus einem Grunde, welchen wir bald kennen lernen werden.

§. 244. Wenn die Functionen φ, ψ, ω gegeben wären, ſo ergäbe ſich die Gleichung der entſprechenden Regelfläche aus der Elimination von α zwiſchen den beiden Gleichungen (3). Man kann alſo in dieſen beiden Gleichungen die Veränderlichen α und z als Functionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y betrachten. Wenn man von der erſten Gleichung in Beziehung auf jede der unabhängigen Veränderlichen die Ableitung nimmt, ſo erhält man:

$$\frac{d\alpha}{dx}(x + \psi'\alpha) = -\alpha, \quad \frac{d\alpha}{dy}(x + \psi'\alpha) = 1; \qquad (5)$$

und wenn man mit der zweiten Gleichung eben ſo verfährt, ſo findet man:

$$\frac{d\alpha}{dx}(x\varphi'\alpha + \omega'\alpha) = p - \varphi\alpha, \quad \frac{d\alpha}{dy}(x\varphi'\alpha + \omega'\alpha) = q. \qquad (6)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d\alpha}{dx} : \frac{d\alpha}{dy} = \frac{p - \varphi\alpha}{q} = \alpha, \qquad (7)$$

ſo, daß man auch jede beliebige Regelfläche durch das Syſtem der beiden Gleichungen:

$$y = \alpha x + \psi\alpha, \quad p + \alpha q = \varphi\alpha$$

ausdrücken kann, worin die Ableitungen der erſten Ordnung p, q, aber nur noch zwei willkührliche Functionszeichen φ und ψ vorkommen. Wenn man die zweite dieſer Gleichungen ſucceſſive in Beziehung auf x und auf y differenzirt, ſo erhält man:

$$\frac{d\alpha}{dx}(\varphi'\alpha - q) = r + \alpha s, \quad \frac{d\alpha}{dy}(\varphi'\alpha - q) = s + \alpha t,$$

woraus vermöge der Gleichung (7) folgt:

$$-\alpha = \frac{r + \alpha s}{s + \alpha t}, \text{ oder } \alpha^2 t + 2\alpha s + r = 0. \qquad (8)$$

Jede Regelfläche kann alſo auch durch das Syſtem der Gleichungen:

$$y = \alpha x + \psi\alpha, \quad \alpha^2 t + 2\alpha s + r = 0,$$

worin die partiellen Ableitungen der zweiten Ordnung r, s, t vorkommen, aber nur noch das willkührliche Functionszeichen ψ erſcheint, ausgedrückt werden. Wenn man endlich die Gleichung (8) ſucceſſive in Beziehung auf x und y differenzirt, ſo erhält man:

$$2\frac{d\alpha}{dx}(s + \alpha t) = -(\alpha^2 w + 2\alpha u + v),$$

$$2\frac{d\alpha}{dy}(s + \alpha t) = -(\alpha^2 v + 2\alpha w + u),$$

und folglich:

$$-\alpha=\frac{\alpha^2w+2\alpha u+v}{\alpha^2v+2\alpha w+u},\ \text{oder}\ \alpha^3v+3\alpha^2w+3\alpha u+v=0. \quad (9)$$

Eliminirt man nun α zwiſchen den Gleichungen (8) und (9), ſo erhält man eine Gleichung mit partiellen Differenzialen der dritten Ordnung, worin kein willkührliches Functionszeichen mehr vorkommt, welche dieſelbe Allgemeinheit, als das Syſtem der Gleichungen (3) hat, und wie dieſe beliebigen Regelflächen entſpricht.

Man gelangt unmittelbar zu demſelben Reſultate, wenn man bemerkt, daß ſich drei einander unendlich nahe liegende Berührungsebenen jeder Regelfläche nach derſelben geraden Linie durchſchneiden, welche eine Erzeugungslinie iſt, wenn die drei einander unendlich nahe liegenden Berührungspunkte auf dieſer Erzeugungslinie ſelbſt liegen. Denn die Gleichung der Berührungsebene:

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y)$$

hat die beiden Ableitungen der erſten Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} &dp(\xi-x)+dq(\eta-y)=0,\\ &d^2p(\xi-x)+d^2q(\eta-y)-(dxdp-dydq)=0;\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

wovon jede in Verbindung mit der Gleichung der Berührungsebene dieſelbe gerade Linie beſtimmen muß, d. h. man muß haben:

$$\frac{dx}{\xi-x}=\frac{dy}{\eta-y}=\frac{dz}{\zeta-z},$$

wodurch ſich die Gleichungen (10) auf:

$$dpdx+dqdy=0,\ d^2qdx+d^2pdy=0,$$

oder vielmehr auf:

$$r+sy'+(s+ty')y'=0,$$
$$u+2wy'+vy'^2+(w+2vy'+vy'^2)y'=0$$

reduciren. Aus dieſen beiden Gleichungen muß ſich auch derſelbe Werth der Tangente y' des Winkels ergeben, welchen die Projection der Erzeugungslinie auf der Ebene der xy mit der Axe der x bildet, und in der That unterſcheiden ſich die beiden vorhergehenden Gleichungen, reſp. von den Gleichungen (8) und (9) nur dadurch, daß y' für α ſteht.

Abwickelbare Flächen.

§. 245. Wenn die geraden Erzeugungslinien eine Umhüllungslinie haben und der Gleichung (4) genügt wird, ſo verwandeln ſich die Gleichungen (6) durch die Subſtitution des Werthes $\omega'\alpha$ in folgende:

$$\varphi'\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dx}(x+\psi'\alpha)=p-\varphi\alpha,\ \varphi'\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dy}(x+\psi'\alpha)=q,$$

woraus, wegen der Gleichungen (5) folgt:

$$p=\varphi\alpha-\alpha\varphi'\alpha,\ q=\varphi'\alpha.$$

Wenn die Function φ gegeben wäre, ſo eliminirte man α zwiſchen dieſen letzten Gleichungen und man erhielte:

$$p=\Pi q. \quad (\Pi)$$

So lange die Function φ willkührlich bleibt, iſt dieſes auch mit der hieraus abgeleiteten Function Π der Fall; und umgekehrt, die Unbeſtimmtheit von Π hat die von φ zur Folge. Die abwickelbaren Flächen werden alſo ſowohl durch das Syſtem der Gleichungen (3) und (4), worin die Coordinaten x,

y, z und drei willkührliche Functionen, wovon zwei unabhängig sind, vorkommen, als durch die Gleichung (Π), welche nur die Ableitungen p und q unter einem einzigen willkührlichen Functionszeichen enthält, ausgedrückt.

Das Zeichen Π wird fortgeschafft, wenn man zu den Ableitungen der zweiten Ordnung übergeht, und alsdann erhält man, wie auch schon im §. 168 gefunden ist:

$$rt - s^2 = 0.$$

Die Berührungsebene einer abwickelbaren Fläche berührt dieselbe nach der ganzen Länge der in dieser Ebene liegenden geraden Erzeugungslinie. Denn die Bedingung, daß die Berührungsebene durch eine gegebene Erzeugungslinie gehen muß, gibt für alle auf dieser Erzeugungslinie liegenden Berührungspunkte dieselbe Bedingungsgleichung zwischen den Ableitungen p, q, und wenn man damit die Gleichung (Π) verbindet, so werden die Größen p, q einzeln bestimmt und haben für alle diese Berührungspunkte dieselben Werthe.

Aus diesem Satze über die abwickelbaren Flächen muß man umgekehrt schließen, daß für die windschiefen Flächen die Berührungsebene, welche immer die durch den Berührungspunkt gehende Erzeugungslinie enthält, die Oberfläche nicht berührt und sie folglich in jedem andern Punkte der geraden Erzeugungslinie durchschneidet.

§. 246. Die abwickelbaren Flächen bekommen diesen Namen, weil sie sich in eine Ebene ausbreiten oder abwickeln lassen, ohne weder Risse, noch Falten zu bekommen, oder ohne daß die Elemente irgend einer auf der Fläche beschriebenen Curve bei dieser Abwickelung verlängert oder verkürzt werden. Denn betrachten wir eine Reihe einander unendlich nahe liegender Erzeugungslinien $m\mu$, $m_1\mu_1$, $m_2\mu_2$ .... (Fig. 72), welche sich je zwei und zwei durchschneiden, so daß sie das windschiefe Vieleck von unendlich vielen kleinern Seiten $\mu\mu_1$, $\mu\mu_2$ .... zur Umhüllungslinie haben; so kann man das ebene Element $m\mu_1$ um die gerade Linie $m_1\mu\mu_1$ so lange drehen, bis es in die Ebene des anliegenden Elementes $m_1\mu_1 m_2$ fällt, worauf man diese beiden nun in derselben Ebene liegenden Elemente auf die Ebene $m_2\mu_2 m_3$ niederschlägt, u. s. f. In dem folgenden Kapitel werden wir durch andere Betrachtungen auf diese Eigenschaft der abwickelbaren Flächen und auf die Folgerungen, welche sich daraus ziehen lassen, zurückkommen.

Die Linie $\mu\mu_1\mu_2$ ..... oder die Umhüllungslinie der Erzeugungslinien $m\mu$, $m_1\mu_1$, $m_2\mu_2$ ..... wird die Rückkehrkante oder die Wendungscurve der abwickelbaren Fläche, welche der geometrische Ort aller dieser Erzeugungslinien ist, genannt. Jede Linie von doppelter Krümmung kann folglich als die Wendungscurve einer abwickelbaren Fläche betrachtet werden, welche durch eine sich bewegende und an dieser Linie tangent bleibende gerade Linie erzeugt wird. Es wird daher zur Vervollständigung der Theorie der Linien von doppelter Krümmung zweckmäßig sein, sie an die Theorie der abwickelbaren Flächen anzuschließen, wie wir später thun werden.

Die Rückkehrkante kann sich auch auf einen Punkt reduciren, wie dieses bei den Kegelflächen der Fall ist, welche offenbar abwickelbare Flächen sind. Wenn sich der Durchschnittspunkt aller Erzeugungslinien in's Unendliche entfernt, so wird die Fläche eine cylindrische und bleibt abwickelbar. Wir wollen diese beiden Familien abwickelbarer Flächen nun näher untersuchen.

Cylindrische Flächen.

§. 247. Wenn man die Gleichungen der geraden Erzeugungslinie auf die Form:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \qquad (11)$$

bringt, ſo findet zwiſchen den veränderlichen Parametern ein Zuſammenhang:

$$\beta = \varphi\alpha \qquad (\varphi)$$

ſtatt, woraus folgt:

$$y - bz = \varphi(x - az). \qquad (12)$$

So lange die Coefficienten a, b und die Function φ unbeſtimmt bleiben, entſpricht die Gleichung (12) einer beliebigen cylindriſchen Fläche. Wenn man den Coefficienten a, b Zahlenwerthe beilegt, ſo müſſen die Erzeugungslinien mit den Parallelen zu den Coordinatenaxen beſtimmte Winkel bilden.

Wenn man von der Gleichung (12) in Beziehung auf jede der unabhängigen Veränderlichen x, y die Ableitung nimmt und auf die gewöhnliche Weiſe die Function φ' eliminirt, ſo erhält man die Gleichung mit partiellen Differenzialen:

$$ap + bq = 1, \qquad (13)$$

welche genau dieſelbe Allgemeinheit hat, als die Gleichung (12), wovon ſie abgeleitet iſt. Nach der geometriſchen Bedeutung der Ableitungen p, q drückt die Gleichung (13) aus, daß die Berührungsebene immer zu der geraden Linie $x = az$, $y = bz$ parallel iſt, und man hätte ſich auf dieſe Eigenſchaft der Berührungsebene der cylindriſchen Flächen ſtützen können, um die Gleichung (13) direct zu erhalten.

§. 248. Die Durchſchnittscurve, welche man erhält, wenn man eine cylindriſche Fläche mit einer auf ihren Erzeugungslinien ſenkrechten Ebene durchſchneidet, wird ein gerader Durchſchnitt genannt.

Um dieſen geraden Durchſchnitt, oder allgemeiner, die in der Gleichung (12) vorkommende willkührliche Function φ zu beſtimmen, kann man feſtſetzen, daß die krumme Fläche durch eine gegebene krumme Richtlinie (§. 242) gehen muß. Es ſeien:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0, \qquad (f)\\ f'(x, y, z) &= 0, \qquad (f')\end{aligned}\right\} \quad (f, f')$$

die Gleichungen der Richtlinie, ſo erhält man, wenn man x, y, z zwiſchen den Gleichungen (11), (f, f') eliminirt, eine reſultirende Gleichung von der Form:

$$F(\alpha, \beta) = 0, \qquad (F)$$

welche mit der Gleichung (φ) identiſch ſein muß, und folglich die Function φ beſtimmt. Wenn man in die Gleichung (F) für α und β ihre Werthe als Functionen von x, y, z wieder ſetzt, ſo erhält man:

$$F(x - az, y - bz) = 0, \qquad (14)$$

welches die Gleichung der verlangten cylindriſchen Fläche iſt.

Wenn die Richtcurve in der Ebene der xy beſchrieben wäre und durch die Gleichung:

$$f(x, y) = 0$$

ausgedrückt würde, ſo verwandelte ſich die Gleichung (F) in $f(\alpha, \beta) = 0$ und ſtatt der Gleichung (14) hätte man:

$$f(x - az, y - bz) = 0. \qquad (15)$$

Dieſe letzte Gleichung drückt aus, daß der Durchſchnitt der krummen Fläche mit einer zu der Ebene der xy parallelen Ebene, deren Ordinate z iſt, ſich auf die der xy nach einer mit der Richtlinie identiſchen Linie projicirt, und welche man erhielte, wenn man die Richtlinie auf der Ebene der xy parallel zu der geraden Linie fortrücken ließe, welche mit der Axe der x einen Winkel

bildet, deſſen Tangente $= \frac{b}{a}$ iſt, ſo daß alle Punkte der Richtlinie parallele gerade Linien beſchrieben, deren gemeinſchaftliche Länge $= z\sqrt{a^2 + b^2}$ wäre. Die Gleichung (15) hat alſo einen beſtimmten geometriſchen Sinn und führt alle Aufgaben, welche man über cylindriſche Flächen ſtellen kann, auf leichte Conſtructionen zurück, ohne daß man die Allgemeinheit der Function f zu beſchränken braucht, indem man ihr einen mathematiſchen Ausdruck beilegt, wogegen die Gleichung (14) an und für ſich ſelbſt keinen Sinn hat, wenn die Elimination zwiſchen den Gleichungen (11), (f), (*f*) nicht ausführbar iſt, oder wenn die Functionen f und *f* keinen mathematiſchen Ausdruck mehr haben. Sobald jedoch die Richtcurve durch die Zeichnung ihrer Projectionen auf zwei aufeinander ſenkrechte Ebenen gegeben iſt, lehrt die beſchreibende Geometrie die Durchſchnittscurve der cylindriſchen Fläche mit einer gegebenen Ebene, z. B. mit der der xy, durch Punkte conſtruiren, ſo daß ſich das Syſtem der in dieſem Zweige der Geometrie üblichen graphiſchen Operationen an die Theorie beliebiger ſtetiger Functionen anſchließt und die Stelle unmöglicher analytiſcher Eliminationen vertritt.

Wenn die cylindriſche Fläche eine durch eine Gleichung, wie z. B. die Gleichung (f), gegebene Fläche berühren muß, wie bei dem Probleme der Schatten, wenn ſich der leuchtende Punkt in's Unendliche entfernt; ſo leitet man aus der Gleichung (f) die Werthe von p, q als Functionen von x, y, z ab und ſubſtituirt ſie in die Gleichung (13), wodurch man eine zweite Gleichung (*f*) erhält, welche zu der Berührungslinie des Cylinders mit der Fläche (f) gehört. Alsdann kann man dieſe Berührungslinie (f, *f*) zur Richtlinie nehmen und die Auflöſung der Aufgabe wie vorhin vollenden.

Kegelflächen.

§. 249. Die Gleichungen der beweglichen geraden Linie, welche eine Kegelfläche beſchreibt, indem ſie beſtändig durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) geht, laſſen ſich auf folgende Form bringen:

$$x - x_0 = \alpha(y - y_0), \quad z - z_0 = \beta(x - x_0), \qquad (16)$$

wobei vorausgeſetzt wird, daß die Parameter α, β durch eine Gleichung, wie (φ) mit einander verbunden ſind, und alsdann erhält man:

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = \varphi\left(\frac{x - x_0}{y - y_0}\right). \qquad (17)$$

So lange die Conſtante x_0, y_0, z_0 und die Function φ unbeſtimmt bleiben, kann dieſe Gleichung eine beliebige Kegelfläche ausdrücken. Das Functionszeichen φ wird durch das gewöhnliche Verfahren eliminirt und man kommt alsdann auf die partielle Differenzialgleichung:

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \qquad (18)$$

wozu man auch direct gelangt, wenn man bemerkt, daß die Berührungsebene der Kegelfläche immer durch den Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0) derſelben gehen muß. Wenn man dieſen Mittelpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt, ſo reducirt ſich die Gleichung (17) auf:

$$\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

und iſt ihrer Form nach in Beziehung auf die Veränderlichen x, y, z homogen. Unter denſelben Umſtänden verwandelt ſich die Gleichung (18) in folgende:

$$z = px + qy,$$

was mit dem Lehrſatze von den homogenen Functionen (§. 122) übereinſtimmt.

Wenn die Kegelfläche die Linie (f, f) zur Richtcurve hat, ſo eliminirt man x, y, z zwiſchen den Gleichungen (16), (f), (f), wodurch man auf eine Endgleichung (F) kommt, welche die Function φ implicite beſtimmt. Setzt man für α, β ihre Werthe als Functionen von x, y, z, ſo erhält man für die Gleichung der Kegelfläche:

$$F\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}, \frac{z-z_0}{x-x_0}\right) = 0. \qquad (19)$$

Wenn die Function f nicht direct gegeben wäre, ſondern durch die Bedingung beſtimmt werden müßte, daß die Kegelfläche die Fläche (f) berühre, welcher Fall bei dem Probleme der Schatten vorkommt, wenn der leuchtende Punkt in einer endlichen Entfernung von dem auf dem Wege der Lichtſtrahlen befindlichen undurchſichtigen Körper liegt; ſo leitete man aus der Gleichung (f) die Werthe von p, q als Functionen von x, y, z ab und ſubſtituirte ſie in die Gleichung (18), wodurch man die Gleichung (f) erhielte.

Windſchiefe Flächen mit einer geraden Richtlinie.

§. 250. Wenn man die Axe der z zur Richtlinie nimmt, ſo genügen die auf die Form:

$$z = x\varphi\alpha + \alpha, \quad z = y\psi\alpha + \alpha, \qquad (20)$$

gebrachten Gleichungen der Erzeugungslinie der Definition der in Rede ſtehenden Flächen, woraus folgt:

$$\frac{x}{y} = \frac{\psi\alpha}{\varphi\alpha}, \text{ oder } \alpha = \omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

Hiernach kann man für das Syſtem der Gleichungen (20) eine der beiden folgenden Gleichungen ſetzen:

$$z = x\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \omega\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (21)$$

$$z = y\psi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \omega\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (22)$$

wo die Function φ_1, ψ_1 durch die Bedingungsgleichung:

$$\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

miteinander verbunden ſind. Nimmt man von der Gleichung (21) in Beziehung auf y und auf x die Ableitungen, ſo erhält man:

$$p = \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\left[\varphi'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\omega'\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

$$q = \varphi'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\omega'\left(\frac{y}{x}\right),$$

folglich:

$$\frac{px + qy}{x} = \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (23)$$

und wenn man nochmals die Ableitungen nimmt, um φ_1 zu eliminiren, ſo kommt:

$$x^2r + 2xys + y^2t = 0. \qquad (24)$$

Um aus directen geometriſchen Betrachtungen die Gleichung (24) abzuleiten, wollen wir bemerken, daß, wenn man durch den Punkt (x, y, z) zwei Ebenen legt, wovon die eine durch die Axe der z geht und die andere die krumme Fläche in dieſem Punkte berührt, ſo ſchneiden ſich dieſe beiden Ebenen, deren Gleichungen reſp. folgende ſind:

$$y(\xi - x) - x(\eta - y) = 0, \qquad (25)$$

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y), \qquad (26)$$

nach einer Erzeugungslinie. Wenn ſich der Berührungspunkt ändert, ohne jedoch aus der Ebene (25) herauszugehen, ſo ſchneidet die neue Berührungsebene die Ebene (25) noch nach derſelben Erzeugungslinie. Folglich finden die Gleichungen (25), (26) mit ihren Ableitungen in Beziehung auf die Veränderlichen x, y, z, nämlich:

$$\xi dy - \eta dx = 0,$$

$$(rdx + sdy)(\xi - x) + (sdx + tdy)(\eta - y) = 0. \qquad (26')$$

zu gleicher Zeit ſtatt, und vermöge der Gleichung (25) verwandeln ſich dieſe beiden letzten Gleichungen in folgende:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad (rdx + sdy)x + (sdx + tdy)y = 0;$$

und wenn man endlich das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ zwiſchen dieſen letzten Gleichungen eliminirt, ſo kommt man wieder auf die Gleichung (24).

Windſchiefe Flächen, deren Erzeugungslinie zu einer Richtebene parallel ſind.

§. 251. Wenn die Ebene der xy zur Richtebene genommen wird, ſo ſind die Gleichungen der Erzeugungslinie:

$$z = \alpha, \quad y = x\varphi\alpha + \psi\alpha,$$

folglich:

$$y = x\varphi z + \psi z, \qquad (27)$$

und die Functionen φ, ψ bleiben willkührlich. Eine erſte Differenzirung gibt, wenn man die Function ψ eliminirt, $\frac{p}{q} = -\varphi z$, und durch eine zweite Differenzirung findet man:

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0. \qquad (28)$$

Zu der Gleichung der in Rede ſtehenden Flächen kann man mehr direct gelangen, ohne die Lage der Richtebene gegen die Coordinatebenen zu particulariſiren. Denn es ſei:

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D$$

die Gleichung der Richtebene und:

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0 \qquad (29)$$

die durch den Punkt (x, y, z) dazu gelegten Parallelebene, ſo iſt die durch dieſen Punkt gehende Erzeugungslinie der Durchſchnitt der Ebene (29) mit der Berührungsebene (26). Wenn man ferner den Berührungspunkt auf derſelben Erzeugungslinie ſich ändern läßt, ſo geht die neue Berührungsebene noch durch dieſe Erzeugungslinie, welche folglich die Durchſchnittslinie zweier einander

unendlich naheliegender Berührungsebenen iſt. Man hat alſo außer der Gleichung (26′) noch die Ableitung von (29), nämlich:

$$Adx + Bdy + C(pdx + qdy) = 0. \qquad (29')$$

Wenn man aus den vier Gleichungen (26), (26′), (29), (29′) die Verhältniſſe:

$$\frac{\xi - x}{\zeta - z}, \quad \frac{\eta - y}{\zeta - z}, \quad \frac{dy}{dx},$$

fortſchafft, ſo bleibt die Bedingungsgleichung:

$$(B + Cq)^2 r - 2(B + Cq)(A + Cp)s + (A + Cp)^2 t = 0,$$

welche mit der Gleichung (28) identificirt wird, wenn man $A = 0$, $B = 0$ ſetzt, welche aber eine noch einfachere Form bekommt, wenn man $C = 0$ ſetzt, oder wenn man die Richtebene auf der xy ſenkrecht annimmt; denn alsdann reducirt ſie ſich auf:

$$B^2 r - 2ABs + A^2 t = 0, \qquad (30)$$

und endlich auf $r = 0$, oder auf $t = 0$, wenn man die Richtebene zu der der xz oder der yz parallel annimmt, wodurch die Allgemeinheit der Auflöſung nicht beſchränkt wird.

Conoidiſche Flächen.

§. 252. Wenn die Erzeugungslinie einer windſchiefen Fläche der doppelten Bedingung genügen muß, daß ſie eine gerade Richtlinie haben und zu einer Richtebene parallel bleiben muß, ſo iſt die beſchriebene Fläche eine conoidiſche Fläche. Mit andern Worten: die conoidiſchen Flächen gehören zugleich zu den beiden eben betrachteten Arten windſchiefer Flächen. Die conoidiſchen Flächen ſind, mit Ausnahme der Ebene, welche mit darunter gehört, nothwendig windſchief. Denn es ſeien AB (Fig. 74) die gerade Erzeugungslinie und mn, m_1n_1, m_2n_2, ... einander unendlich nahe liegende Erzeugungslinien, ſo müßten, wenn zwei aufeinander folgende Erzeugungslinien in derſelben Ebene liegen ſollten, die unendlich kleinen geraden Linien nn_1, n_1n_2.... zu AB parallel ſein, was nur zufällig geſchehen kann, wofern ſich die Polygonallinie nn_1n_2 .... nicht in eine zu AB parallele gerade Linie verwandelt, und alsdann iſt die beſchriebene Fläche eine Ebene.

Die Fläche wird, obgleich ſie eine windſchiefe iſt, ziemlich unpaſſend das gerade Conoid genannt, wenn die Richtlinie auf der Richtebene ſenkrecht iſt. Als Beiſpiel einer ſolchen Fläche kann man die durch eine ſich bewegende gerade Linie, welche die Axe eines geraden Cylinders immer rechtwinklig durchſchneidet und ſich mit einem ihrer Punkte auf eine auf der Oberfläche des Cylinders beſchriebene Schraubenlinie ſtützt (§. 234), beſchriebene Fläche anführen, welche die windſchiefe Schraubenfläche genannt wird.

§. 253. Wir wollen die Ebene der xy zur Richtebene und den Punkt, worin die gerade Richtlinie dieſe Ebene trifft, zum Anfangspunkt der Coordinaten nehmen, ſo ſind die Gleichungen der Richtlinie:

$$x = az, \quad x = bz, \qquad (31)$$

und die der Erzeugungslinie:

$$z = \beta, \quad y - b\beta = \alpha(x - a\beta).$$

Zwiſchen den Parametern α, β muß man ſich wieder einen Zuſammenhang (φ) denken, und alsdann iſt die allgemeine Gleichung der conoidiſchen Flächen:

$$z = \varphi\left(\frac{y - bz}{x - az}\right). \qquad (32)$$

Wenn man das Functionszeichen φ auf die gewöhnliche Weiſe eliminirt, ſo ergibt ſich daraus:

$$p(x - az) + q(y - bz) = 0. \qquad (33)$$

Der Sinn dieſer letzten Gleichung iſt der: daß, wenn man durch den Punkt (x, y, z) in der Berührungsebene zu der Ebene der xy eine Parallele zieht, dieſe die Richtlinie (31) ſchneidet, und in der That fällt die auf dieſe Weiſe in der Berührungsebene gezogene gerade Linie mit einer Erzeugungslinie zuſammen.

Wir wollen annehmen, daß die bewegliche gerade Linie außer der geraden Linie (31) noch eine andere gerade Linie:

$$x = mz + n, \quad y = m'z + n'$$

zur Richtlinie habe, ſo wird die Function φ vermittelſt einer ähnlichen Elimination, wie die bereits vorgenommenen, ſpecialiſirt und man erhält die Gleichung:

$$(mb - am')z^2 + (m' - b)xz - (m - a)yz + (bn - an')z + n'x - ny = 0,$$

der Oberfläche des zweiten Grades, welche das hyperboliſche Paraboloid genannt wird.

Wenn das Conoid ein gerades iſt, ſo hat man $a = 0$, $b = 0$ und die Gleichungen (32) und (33) verwandeln ſich reſp. in:

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad px + qy = 0.$$

Die in der Stereotomie unter dem Namen Kreuzgewölbe bekannte Fläche iſt ein gerades Conoid, für welches die zweite Richtlinie gewöhnlich eine Ellipſe iſt, deren Ebene und eine Axe vertical ſind. Wenn die Gleichungen dieſer Ellipſe folgende Form haben:

$$x = a, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ſo findet man für die Gleichung des Conoides:

$$\frac{a^2y^2}{b^2x^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Rotationsflächen.

§. 254. Unter den Oberflächen, deren unterſcheidendes Merkmal darin beſteht, daß ſie ſich nicht durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugen laſſen, wollen wir hier nur die ſogenannten Rotationsflächen (§. 242) betrachten. Es ſeien:

$$x - x_0 = a(z - z_0), \quad y - y_0 = b(z - z_0)$$

die Gleichungen der durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) gehenden Rotationsaxe, ſo iſt die Gleichung der auf dieſer Axe ſenkrechten Ebene:

$$ax + by + z = \alpha,$$

und dieſe Ebene ſchneidet die Rotationsfläche nach einem Kreiſe, welchen man als den Durchſchnitt einer Ebene und einer Kugel, deren Mittelpunkt der Punkt (x_0, y_0, z_0) iſt, betrachten kann. Die Gleichung dieſer Kugel iſt:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \beta,$$

und der Zuſammenhang (φ), deſſen Form von der Geſtalt der Meridiancurve abhängt, gibt die Gleichung:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varphi(ax + by + z), \qquad (34)$$

welche eine beliebige Rotationsfläche ausdrücken kann, ſo lange die Conſtanten x_0, y_0, z_0, a, b, und das Functionszeichen φ unbeſtimmt bleiben.

Nimmt man die partiellen Ableitungen in Beziehung auf x und auf y, ſo erhält man:

$$2[x - x_0 + p(z - z_0)] = (a + p) \cdot \varphi'(ax + by + z),$$
$$2[x - y_0 + q(z - z_0)] = (b + q) \cdot \varphi'(ax + by + z),$$

woraus ſich durch Elimination von φ' ergibt:

$$p[y - y_0 - b(z - z_0)] - q[x - x_0 - a(z - z_0)] = b(x - x_0) - a(y - y_0). \quad (35)$$

Dieſe letzte Gleichung drückt aus, daß die Normale der krummen Fläche die Rotationsaxe ſchneidet. Denn bezeichnen ξ, η, ζ die veränderlichen Coordinaten der Normale im Punkte (x, y, z), ſo ſind die Gleichungen derſelben:

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0,$$

während die Rotationsaxe, auf dieſelben Coordinatenaxen bezogen, werden:

$$\xi - x_0 = a(\zeta - z_0), \quad \eta - y = b(\zeta - z_0),$$

und wenn man aus dieſen vier Gleichungen die Coordinaten ξ, η, ζ fortſchafft, ſo kommt man wieder auf die Gleichung (35).

Wenn man die Rotationsaxe zur Axe der z nimmt oder $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a = 0$, $b = 0$ ſetzt, ſo reducirt ſich die Gleichung (35) auf:

$$py - qx = 0, \quad (36)$$

und die Gleichung (34) verwandelt ſich in folgende:

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = \varphi z),$$

oder, was wegen der Unbeſtimmtheit der Function φ daſſelbe iſt, in:

$$x^2 + y^2 = \varphi z, \quad \text{oder } z = \psi(x^2 + y^2),$$

und z iſt alsdann die Ordinate der Meridiancurve, deren Abſciſſe $= \sqrt{x^2 + y^2}$ iſt.

Vermittelſt des bereits bei den cylindriſchen und Kegelflächen angegebenen Eliminationsverfahrens kann man leicht die Gleichung der durch eine gegebene Curve (f, f) gehenden Rotationsfläche finden.

§. 255. Wir wollen das Geſagte auf die Beſtimmung der Fläche anwenden, welche durch die Umdrehung der geraden Linie:

$$x = mz + n, \quad y = m'z + n' \quad (37)$$

um die Axe der z erzeugt wird, ſo haben wir dieſe beiden Gleichungen mit den Gleichungen:

$$z = \alpha, \quad x^2 + y^2 = \beta,$$

zu verbinden, woraus folgt:

$$(m\alpha + n)^2 + (m'\alpha + n')^2 = \beta$$

und wenn wir für α, β ihre Werthe ſetzen:

$$(mz + n)^2 + (m'z + n')^2 = x^2 + y^2.$$

Wenn man die kürzeſte Entfernung der Rotationsaxe von der geraden Linie (37) zur Axe der x nimmt, ſo wird die gerade Linie (37) zu der Ebene der yz parallel und man muß $m = 0$, $n' = 0$ ſetzen, wodurch ſich die Gleichung der krummen Fläche in folgende verwandelt:

$$x^2 = y^2 - m'^2 z^2 = n^2,$$

welche mit der Gleichung (6) in §. 239 übereinſtimmt. Die erzeugte Fläche iſt folglich die unter dem Namen Rotationshyperboloid mit einem Fache bekannte Regelfläche.

§. 256. Wir wollen nun noch die Rotationsfläche um die Axe z bestimmen, deren Durchschnitt mit der Ebene $y = c$ die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \qquad (38)$$

ist, so gibt die Rechnung für die Gleichung der gesuchten Fläche:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{a^2}.$$

Der Durchschnitt dieser Fläche mit der Ebene der xz ist die Ellipse AB A'B' (Fig. 75), deren Gleichung folgende ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{a^2},$$

während sich die Ellipse (38) auf die Ebene der xz nach der ähnlichen concentrischen Ellipse aba'b' projicirt. Wenn man nun in b und b' an die Ellipse (38) die Tangenten bc, b'c' zieht, so ist klar, daß der Theil cc' des Meridiandurchschnittes allein geometrisch durch die Bedingung bestimmt wird, daß der Durchschnitt der Rotationsfläche mit der Ebene $y = c$ die Ellipse (38) ist. Der Meridiandurchschnitt könnte von c bis B und von c' bis B' eine beliebige Curve sein, und folglich ist die Function φ, wenn das Functionszeichen φ seine ganze Allgemeinheit behält, nur zum Theil durch die Bedingung bestimmt, daß man auf die gegebene Fläche eine gegebene Curve legen könne. Aber wenn man explicite oder implicite annimmt, daß φ eine algebraische Function bezeichnet, deren Ausdruck sich in der ganzen Ausdehnung ihres Verlaufes nicht ändert, so wird sie in ihrer ganzen Ausdehnung durch die Bedingung, daß man auf die krumme Fläche eine gegebene algebraische Curve legen könne, wirklich bestimmt.

Achtes Kapitel.

Von den Umhüllungsflächen.

§. 257. Die Theorie der Umhüllungscurven (§. 182 u. ff.) läßt sich verallgemeinern und auf krumme Flächen ausdehnen; aber mit wesentlichen Modificationen, welche in der Natur des Gegenstandes selbst ihren Grund haben.

Es sei:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0 \qquad (F)$$

die Gleichung einer krummen Fläche, worin der Parameter α vorkommt. Wenn man diesem Parameter eine Reihe von Werthen beilegt, so erhält man eine Reihe von krummen Flächen derselben Art, welche sich im Allgemeinen nach gewissen Linien durchschneiden. Wir wollen insbesondere zwei dieser Flächen:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \; F(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0$$

betrachten, so wird die Durchschnittslinie, wenn man $\Delta\alpha$ ohne Ende abnehmen läßt, auf der ersten Fläche verrückt und nähert sich immer mehr und mehr einer andern Linie, welche durch das System der Gleichung (F) und ihrer Ableitung:

$$\frac{dF}{d\alpha} = 0 \qquad (F')$$

gegeben wird, und welche Monge die Charakteriſtik genannt hat.

Die Gleichungen der Charakteriſtik enthalten den Parameter α und ändern ſich für jede der unendlich vielen durch die Gleichung (F) ausgedrückten Flächen, ſo lange α unbeſtimmt bleibt. Wenn man α zwiſchen den Gleichungen (F), (F') eliminirt, ſo erhält man eine dritte Gleichung:

$$\Phi(x, y, z) = 0 \qquad (\Phi)$$

und dieſe gehört zu einer Fläche, welche als der geometriſche Ort aller Charakteriſtiken betrachtet werden kann.

Für alle auf derſelben Charakteriſtik liegenden Punkte hat die Fläche (Φ) dieſelbe Berührungsebene, als die der Flächen (F), welcher dieſe Charakteriſtik entſpricht. Denn die Gleichung der Ebene, welche dieſe letzte Fläche im Punkte (x, y, z) berührt, iſt:

$$\frac{dF}{dx}(\xi - x) + \frac{dF}{dy}(\eta - y) + \frac{dF}{dz}(\zeta - z) = 0. \qquad (a)$$

Da ferner die Gleichung (Φ) nichts anders iſt, als die Gleichung (F), worin man für α ſeinen aus der Gleichung (F') als Function von x, y, z abgeleiteten Werth ſubſtituirt hat, ſo kann die Gleichung der Berührungsebene der Fläche (Φ) auf die Form:

$$\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx}\right)(\xi - x) + \left(\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\right)(\eta - y)$$
$$+ \left(\frac{dF}{dz} + \frac{dF}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\right)(\zeta - z) = 0$$

gebracht werden und ſie reducirt ſich vermöge der Gleichung (F') auf die Gleichung (a).

Die Fläche (Φ) hat alſo die Eigenſchaft, daß ſie alle die unendlich vielen Flächen, welche durch die ſtetige Veränderung des Parameters α in der Gleichung (F) erhalten werden, berührt oder umſchließt. Man nennt ſie deßhalb die Umhüllungsfläche und die Flächen (F) die umhüllten Flächen. Jede Charakteriſtik iſt alſo die Berührungslinie der Umhüllungsfläche mit einer umhüllten Fläche.

Es kann geſchehen, daß die Charakteriſtiken imaginär werden, wenn der Parameter α gewiſſe Grenzen überſchreitet, obgleich die Gleichung (F) für dieſelben Werthe von α noch reelle Flächen ausdrückt, welche alsdann nicht mehr von der Umhüllungsfläche berührt werden und auf welche der Name umhüllte Flächen eigentlich nicht mehr anwendbar iſt. Dieſer Fall iſt dem analog, welchen wir bei der Umhüllung ebener Curven angegeben haben (§. 184).

Das Syſtem der Gleichungen (F), (F') und:

$$\frac{d^2F}{d\alpha^2} = 0 \qquad (F'')$$

beſtimmt, wenn ſie miteinander beſtehen können, den Punkt, worin eine Charakteriſtik von der benachbarten unendlich nahen Charakteriſtik geſchnitten wird, und die Elimination von α zwiſchen dieſen drei Gleichungen gibt die beiden Gleichungen der Rückkehrkante oder Wendungscurve der durch die Bewegung der Charakteriſtik beſchriebenen Umhüllungsfläche (§. 246).

Wenn man endlich mit den Gleichungen (F), (F'), (F'') noch die Gleichung:

$$\frac{d^3F}{d\alpha^3} = 0 \qquad (F''')$$

verbindet, ſo kann man α fortſchaffen, und die Coordinaten x, y, z eines auf der Rückkehrkante liegenden Punktes, welcher im Allgemeinen ein ſingulärer Punkt derſelben iſt, einzeln beſtimmen.

§. 258. Betrachten wir nun die Gleichung einer Fläche:

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad [F]$$

worin zwei willkührliche Parameter α, β vorkommen, ſo kann man nicht annehmen, daß ſich dieſe beiden Parameter gleichzeitig und unabhängig von einander ändern, weil dieſes zu keiner geometriſchen Folgerung führen würde; allein man kann offenbar annehmen, daß zwiſchen α und β eine Relation $\beta = \varphi\alpha$ ſtattfindet, vermöge welcher ſich die vorhergehende Gleichung in folgende verwandelt:

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha) = 0.$$

Nun kann man den Parameter α ſich ändern laſſen, wodurch eine Reihe umhüllter Flächen und eine correſpondirende Umhüllungsfläche entſteht. Da die Function φ willkührlich iſt, ſo beſtimmt jede ihr beigelegte Form ein Syſtem umhüllter Flächen, welches ſeine beſondere Umhüllungsfläche hat.

Da übrigens die Gleichung [F] zwei unabhängige Veränderliche x, y enthält, ſo kann man ſie in Beziehung auf jede dieſer Veränderlichen differenziren, wodurch man die beiden folgenden Gleichungen erhält:

$$\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz} = 0. \qquad [F']$$

Die Elimination von α, β zwiſchen den Gleichungen [F] und [F'] führt auf die partielle Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \qquad (f)$$

und alle durch die Gleichung [F] gegebenen umhüllten Flächen, ſo wie alle durch die Elimination von α zwiſchen den beiden Gleichungen:

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha) = 0, \quad \frac{d \cdot F(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha)}{d\alpha} = 0, \qquad ((F))$$

gegebenen Umhüllungsflächen haben offenbar die Eigenſchaft, der Gleichung (f) zu genügen.

Hier iſt der Ort, wo der Faden der Analogie zwiſchen der Theorie der Umhüllung ebener Curven und der der Umhüllung krummer Flächen zerreißt. In der That haben wir geſehen, daß die umhüllten Curven und die Umhüllungscurven derſelben Differenzialgleichung mit zwei Veränderlichen, worin der veränderliche Parameter nicht vorkommt, genügen. Aber es gibt für dieſelbe Umhüllungscurve unendlich viele umhüllte Curven und die gemeinſchaftliche Gleichung der umhüllten Curven genügt der Differenzialgleichung auf eine allgemeinere Weiſe, als die Gleichung der Umhüllungscurven. Dagegen genügt die Gleichung [F] der partiellen Differenzialgleichung (f), worin die Parameter α, β nicht vorkommen, mit weniger Allgemeinheit, als das Syſtem der Gleichungen ((F)), weil alle durch die Gleichung [F] gegebenen Flächen von derſelben Art ſind, welche ſich nur durch die Zahlenwerthe der Parameter α, β von einander unterſcheiden, während ſich die durch das Syſtem der Gleichungen ((F)) gegebenen Flächen der Art noch ändern, je nach der Form, welche man der willkührlichen Function φ gibt und nur durch einen Familiencharakter, nämlich den, derſelben partiellen Differenzialgleichung zu genügen, mit einander verbunden ſind.

Wenn man α, β zwiſchen der Gleichung [F] und ihren beiden Ableitungen in Beziehung auf α und β, nämlich:

$$\frac{dF}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dF}{d\beta} = 0$$

eliminirt, ſo erhält man eine Gleichung:

$$\Psi(x, y, z) = 0, \qquad (\Psi)$$

worin blos x, y, z vorkommen, und welche der Gleichung (f) ebenfalls genügt, und die Fläche (Ψ) hat die Eigenſchaft, daß ſie nicht blos die umhüllten Flächen [F], ſondern auch die Umhüllungsflächen $((F))$ berührt oder umſchließt. Dieſe allgemeine und individuell beſtimmte Umhüllungsfläche entſpricht der nach der Theorie der Umhüllung der Curven individuell beſtimmten Umhüllungscurve, und die Gleichung (Ψ), welche der Gleichung (f) genügt, ohne durch eine ſchickliche Beſtimmung der willkührlichen Function φ auf das Syſtem $((F))$ zurückgeführt werden zu können, iſt eins der ſingulären Integrale, deren Exiſtenz im §. 167 erwähnt iſt, und worauf wir bei der Integration der partiellen Differenzialgleichungen zurückkommen müſſen.

§. 259. Die Bemerkungen im vorhergehenden §. über die Unbeſtimmtheit der in den Gleichungen $((F))$ vorkommenden Function φ, geben den zwiſchen der Theorie der Umhüllung der krummen Flächen und der Eintheilung derſelben nach Familien, welche der ſpecielle Gegenſtand des vorhergehenden Kapitels war, ſtattfindenden Zuſammenhang an, welcher aber durch die folgenden Betrachtungen noch beſſer in die Augen fallen wird.

Statt ſich vorzuſtellen, daß α zwiſchen den Gleichungen $((F))$ eliminirt werde, um die Gleichung der Umhüllungsfläche zu erhalten, welche einer beſondern Form der Function φ entſpricht, wollen wir dieſe Gleichungen gleichzeitig betrachten, ſo daß ſie die dieſer beſondern Form von φ und einem beſondern Werthe von α entſprechende Charakteriſtik ausdrücken. Ferner wollen wir die zweite dieſer Gleichungen auf folgende Form bringen:

$$\frac{dF}{d\alpha} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \varphi'\alpha = 0.$$

Da die Veränderlichen x, y, z nicht unter den Functionszeichen φ, φ' vorkommen, ſo ſieht man, daß die Gleichungen der Charakteriſtik auf dieſelbe Weiſe aus x, y, z zuſammengeſetzt ſind, was man auch für eine Form der Function φ geben mag. Die Charakteriſtik kann folglich als die Erzeugungslinie betrachtet werden, welche nach Belieben irgend eine der Umhüllungsflächen $((F))$ beſchreibt, indem ſie ihre Lage im Raume, oder ſelbſt ihre Form, nach einem für jede Umhüllungslinie durch die Form der Function φ beſtimmten Geſetze ändert, jedoch ſo, daß die Zuſammenſetzung der Gleichungen der Erzeugungslinie aus x, y, z nicht geändert wird. Hierin liegt der Grund, weshalb Monge der in Rede ſtehenden Linie den Namen Charakteriſtik gegeben hat, weil ſie allen in dem Syſteme der Gleichungen $((F))$ enthaltenen Flächen, welche die Eigenſchaft haben, der Gleichung (f) zu genügen, einen Familiencharakter aufdrückt.

Aus rein analytiſchem Geſichtspunkte betrachtet, iſt die Beſchreibung einer Fläche durch die Erzeugungslinie, deren Gleichungen folgende ſind:

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha) = 0, \; F_1(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha) = 0 \qquad (b)$$

nur ein beſonderer Fall der Beſchreibung derſelben durch eine Erzeugungslinie, deren Gleichungen folgende Form haben:

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha, \varphi'\alpha) = 0, \; F_1(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha, \varphi'\alpha) = 0. \qquad (b_1)$$

Das zweite System hat in seiner Bedeutung keine weitere Ausdehnung, als das andere, weil die Function φ' bestimmt ist, sobald die Function φ gegeben ist. Nur kann man, wenn die Functionen F, F_1, algebraische sind, aus den Gleichungen (b) die Werthe:

$$\alpha = f(x, y, z), \quad \varphi\alpha = f(x, y, z)$$

und folglich:

$$f(x, y, z) = \varphi[f(x, y, z)]$$

ableiten, wo f, f bekannte Functionen bezeichnen, während die Elimination zwischen den Gleichungen (b_1) erst dann ausführbar wird, wenn man die Function φ particularisirt hat, so daß man alle Flächen derselben Familie, welche das System (b_1) wegen der Unbestimmtheit des Functionszeichen φ ausdrückt, nicht durch eine einzige Gleichung ausdrücken kann.

Wenn man nun annimmt, daß die Function F die Größe $\varphi'\alpha$ nicht enthält und daß man hat:

$$F_1 = \frac{dF}{d\alpha} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \varphi'\alpha$$

so kommt man wieder auf einen besondern Fall der Beschreibung, womit wir uns in diesem Kapitel beschäftigen, indem die Erzeugungslinie den Namen Charakteristik annimmt und vermittelst des Durchschnittes zweier einander unendlich nahe liegender umhüllter Flächen bestimmt wird.

§. 260. Dieselbe Umhüllungsfläche kann verschiedene Charakteristiken haben, d. h. dieselbe Fläche kann verschiedene Erzeugungslinien haben, und folglich zu gleicher Zeit verschiedenen Familien angehören (§. 242).

Aber ohne aus derselben durch dieselbe Gleichung mit partiellen Differenzialen charakterisirten Flächenfamilie herauszugehen, findet man, daß dieselbe Umhüllungsfläche unendlich vielen verschiedenen Systemen umhüllter Flächen entsprechen kann, oder daß die Charakteristik, durch deren Bewegung die Umhüllungsfläche erzeugt wird, und welche vermittelst des Durchschnittes zweier aufeinander folgender umhüllter Flächen gegeben ist, dieselbe bleiben kann, obgleich die sich durchschneidenden Flächen verschieden sind.

Um hiervon ein sehr einfaches Beispiel anzuführen, wollen wir uns eine bewegliche Ebene denken, welche die Umhüllungsfläche beständig nach einer Charakteristik berührt, so erzeugt dieselbe eine abwickelbare Fläche, in deren Gleichung α und $\varphi\alpha$ vorkommen, so daß man, wenn man α sich ändern läßt, eine Reihe abwickelbarer Flächen erhält, welche die Umhüllungsfläche berühren, und wovon zwei beliebige aufeinander folgende sich nach einer der Charakteristiken durchschneiden. Wenn man folglich annimmt, daß die abwickelbare Fläche vermöge der stetigen Veränderung des Parameters α ihre Form und Lage im Raume fortwährend ändert; so hat sie dieselbe Umhüllungsfläche, als das System der ursprünglichen umhüllten Flächen. Monge nennt sie die abwickelbare umhüllte Fläche, und man könnte sich unendlich viele verschiedene umhüllte Flächen denken, welche alle dieselben Charakteristiken und dieselben Umhüllungsflächen haben.

Dieses erhellet auch leicht analytisch. Denn da die Function φ in dem Systeme der Gleichungen ((F)) auf eine beliebige Weise particularisirt werden kann, so kann man z. B. auch setzen:

$$\varphi\alpha = a + b\alpha,$$

wo a und b andere beliebige Constanten sind, oder auch:

$$\varphi\alpha = a + \alpha\psi a,$$

wo ψ irgend eine andere Function bezeichnet. Alsdann kann man α zwiſchen den Gleichungen ((F)) eliminiren und man erhält die Gleichung einer Umhüllungsfläche von der Form:

$$\Phi(x, y, z, a, \psi a) = 0.$$

Nun kann man aber der Function ψ eine beliebige Form geben und den Parameter α ſich ſtetig ändern laſſen; ſo erhält man auf dieſe Weiſe wieder eine Reihe umhüllter Flächen, welche von der der urſprünglichen umhüllten Flächen verſchieden iſt; aber deren Umhüllungsflächen dennoch die Eigenſchaft haben, daß ſie der Gleichung (f) genügen, was vorausſetzt, daß ſie mit den neuen umhüllten Flächen dieſelben Berührungslinien haben, wie mit den urſprünglichen umhüllten Flächen.

§. 261. Ein Beiſpiel wird das Geſagte deutlich machen. Wenn man in der Gleichung:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = R^2, \qquad (1)$$

α, β als ſtetig veränderliche Parameter betrachtet, ſo gehört ſie zu unendlich vielen Kugelflächen, welche alle ihren Mittelpunkt in der Ebene der x, y und denſelben Halbmeſſer R haben. Wird dieſe Gleichung in Beziehung auf die beiden unabhängigen Veränderlichen x, y differenzirt, ſo erhält man:

$$x-\alpha + pz = 0,\ y-\beta + qz = 0;$$

woraus ſich die partielle Differenzialgleichung:

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{R^2}{z^2} \qquad (2)$$

ergibt, welcher alle durch die Gleichung (1) ausgedrückten Kugelflächen genügen.

Die Parameter α, β bezeichnen hier die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugelfläche, und wenn man den willkührlichen Zuſammenhang $\beta = \varphi\alpha$ aufſtellt, ſo iſt dieſes daſſelbe, als wenn man in der Ebene der x, y die Curve zeichnete, welche der Mittelpunkt der beweglichen Kugelfläche beſchreiben muß. Die Umhüllungsfläche aller Kugeln von demſelben Halbmeſſer, deren Mittelpunkt auf der ſo beſchriebenen Curve liegt, iſt eine Kanalfläche mit einem conſtanten kreisförmigen Durchſchnitte, deren Axe oder Mittellinie die willkührlich beſchriebene Curve iſt. Alle Kanalflächen, worunter auch der gerade Cylinder gehört, werden folglich durch das Syſtem der beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(x-\alpha)^2 + (y-\varphi\alpha)^2 + z^2 &= R^2,\\ x-\alpha + (y-\varphi\alpha)\,\varphi'\alpha &= 0,\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ausgedrückt, und haben die Eigenſchaft, der Gleichung (2) zu genügen, ſowohl als die Kugeln, welche ſie umſchließen.

Denn die durch die Gleichung (2) ausgedrückte geometriſche Eigenſchaft beſteht darin, daß der Coſinus des Winkels, welchen die Normale mit der Ordinate z bildet, den Werth $\pm\frac{z}{R}$ hat (§. 237), oder vielmehr darin, daß die Normale die Mittellinie der Kanalfläche trifft, was offenbar ein Merkmal der Flächen dieſer Familien iſt.

Das Syſtem der Gleichungen (3) beſtimmt die dem Werthe α des Parameters entſprechende Charakteriſtik, welche durch den Durchſchnitt einer Kugel mit einer durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene beſtimmt wird, und folglich ein größter Kreis der Kugel iſt.

Wenn man mit den Gleichungen (3) noch die Ableitung der zweiten Ordnung:

$$(y-\varphi\alpha)\,\varphi''\alpha - 1 - (\varphi'\alpha)^2 = 0 \qquad (4)$$

verbindet und α zwiſchen den drei Gleichungen eliminirt, nachdem die Function φ particulariſirt iſt; ſo erhält man die Gleichungen der Wendungscurve der Umhüllungsfläche zwiſchen x, y, z.

Wenn man α, β zwiſchen der Gleichung (1) und ihren Ableitungen in Beziehung auf α und β, nämlich:

$$x-\alpha=0,\ y-\beta=0$$

eliminirt, ſo leiſtet die reſultirende Gleichung $z^2=R^2$ oder $z=\pm R$ auch der Gleichung (2) Genüge. Die Fläche, welche zugleich alle umhüllten Flächen und alle in dem Syſteme der Gleichungen (3) enthaltenen Umhüllungsflächen berührt, oder die allgemeine Umhüllungsfläche aller Flächen, welche der Gleichung (2) genügen, reducirt ſich folglich auf ein Syſtem zweier zu der Ebene der $x\,y$ paralleler Ebenen, was von vornherein einleuchtend war.

Wenn man in den Gleichungen (3) die Function $\varphi\alpha=a\alpha+b$ ſetzt, und nach der Subſtitution den Parameter α eliminirt, ſo erhält man die Gleichung:

$$\frac{(y-ax-b)^2}{1+a^2}+z^2=R^2 \qquad (5)$$

eines kreisförmigen Cylinders, deſſen Halbmeſſer R iſt und deſſen in der Ebene der $x\,y$ liegende Axe durch die Gleichung $y=ax+b$ ausgedrückt wird. In der That haben wir ſchon bemerkt, daß ein ſolcher Cylinder zu den Kanalflächen gehört, welche den von einer Kugel von unveränderlichem Halbmeſſer und deren beweglicher Mittelpunkt auf der Ebene der $x\,y$ irgend eine Linie beſchreibt, durchlaufenen Raum umſchließen können. Man kann ſogar die Axe des Cylinders ſich in dieſer Ebene ſo bewegen laſſen, daß die Umhüllungsfläche irgend eine der durch das Syſtem der Gleichungen (3) ausgedrückten Kanalflächen oder irgend eine der durch die Gleichung (1) beſtimmten Kugeln iſt. Um den Cylinder ſo zu bewegen, daß die Umhüllungsfläche eine Kugel wird, braucht man ſeiner Axe nur eine Rotationsbewegung um einen ihrer als feſt betrachteten Punkte zu ertheilen, und der Cylinder (5) iſt die weiter oben erwähnte abwickelbare umhüllte Fläche.

§. 262. Wir haben vorhin den zwiſchen den Parametern α, β ſtattfindenden Zuſammenhang durch $\beta=\varphi\alpha$ ausgedrückt; allein wir hätten dieſen Zuſammenhang auch allgemeiner durch die Gleichung:

$$\omega(\alpha,\beta)=0 \qquad (\omega)$$

ausdrücken können, und alsdann hätten wir ſtatt des Syſtemes der Gleichungen ((F)) das Syſtem der vier Gleichungen:

$$F(x,y,z,\alpha,\beta)=0,\ \frac{dF}{d\alpha}d\alpha+\frac{dF}{d\beta}d\beta=0$$

$$\omega(\alpha,\beta)=0,\ \frac{d\omega}{d\alpha}d\alpha+\frac{d\omega}{d\beta}d\beta=0$$

erhalten. Dieſe zuſammengeſetztere Bezeichnung iſt die einzige, welche ſo vollſtändig iſt, als es die Allgemeinheit der Analyſis erfordert.

Nichts hindert z. B. anzunehmen, daß die Gleichung (ω) zufällig folgende Form annimmt:

$$(\alpha-h)^2+(\beta-k)^2=0 \qquad (\omega_1)$$

wo h, k Conſtanten bezeichnen, in welchem Falle ſich daraus $\alpha=h$, $\beta=k$ ergibt, ohne daß es möglich wäre, aus der Gleichung (ω_1) eine Relation von der Form $\beta=\varphi\alpha$ abzuleiten, wofern man nicht imaginäre Symbole

anwendet. In dem Syſteme der Gleichungen (3) kann man folglich die Function φ nicht ſo particulariſiren, daß dieſes Syſtem eine der umhüllten Kugelflächen ausdrückt, welche gleichwohl zu den Flächen gehören, die die Eigenſchaft haben, der Gleichung (2) zu genügen. In dieſer Beziehung könnte man ſagen, daß das Syſtem (3) nicht dieſelbe Allgemeinheit hat, als die Gleichung (2) und daß man damit die allgemeine Gleichung der umhüllten Kugeln verbinden muß, um es zu vervollſtändigen; allein dieſes hat blos in den Beſchränkungen ſeinen Grund, welche durch eine Bezeichnungsart eingeführt ſind, die blos der Kürze wegen angewandt wird, und die Beſchränkungen fallen weg, ſobald man den Bezeichnungen die gehörige Allgemeinheit beilegt.

Dieſe Bemerkung iſt ſo einfach, daß wir ſie mit Stillſchweigen übergangen haben würden, wenn dadurch nicht eine Schwierigkeit beſeitigt würde, welche ſelbſt Lagrange für bedeutend gehalten hat. *)

§. 263. Da die Gleichung (f) für beliebige umhüllte Flächen ſtattfindet, ſo findet ſie auch für den Durchſchnitt zweier ſolcher Flächen ſtatt und kann als eine Differenzialgleichung betrachtet werden, welcher die Coordinaten dieſer Linie genügen müſſen. Nachdem man $\beta = \varphi\alpha$ geſetzt hat, unterſcheiden ſich die Gleichungen zweier ſich durchſchneidender umhüllter Flächen nur noch durch den Werth des Parameters α, und für die Punkte in der Durchſchnittslinie ſind die Werthe von x, y, z dieſelben; aber die Werthe von p, q ändern ſich mit dem Parameter α, oder mit andern Worten, die beiden Flächen haben in jedem Punkte der Durchſchnittslinie gegen einander geneigte Berührungsebenen. Aber wenn die Durchſchnittslinie in die Charakteriſtik übergeht, ſo liegen die beiden umhüllten Flächen einander unendlich nahe, die gegenſeitige Neigung der beiden Berührungsebenen verſchwindet und man hat:

$$\frac{df}{d\alpha} = 0, \text{ oder } \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{d\alpha} + \frac{df}{dq} \cdot \frac{dq}{d\alpha} = 0; \qquad (f')$$

denn da ſich die Coordinaten x, y, z auf die den beiden Flächen gemeinſchaftliche Linie beziehen, ſo ändern ſie ſich nicht mit α. Wenn man ferner die Gleichung:

$$dz = pdx + qdy \qquad (c)$$

in Beziehung auf α differenzirt, ſo hat man aus demſelben Grunde:

$$0 = \frac{dp}{d\alpha} dx + \frac{dq}{d\alpha} dy \qquad (c')$$

und die Elimination von $\frac{dp}{d\alpha}$, $\frac{dq}{d\alpha}$ zwiſchen den Gleichungen (f') und (c') gibt die Differenzialgleichung:

$$\frac{df}{dp} dy - \frac{df}{dq} dx = 0, \qquad (f'')$$

welcher die Coordinaten der Charakteriſtik mit der Gleichung (f) zugleich genügen müſſen.

In dem betrachteten Beiſpiele findet man:

$$\frac{df}{dp} = 2p, \quad \frac{df}{dq} = 2q,$$

und folglich:

$$pdy - qdx = 0,$$

*) Leçons sur le Calcul des Fonctions, 2e édit. p. 372 — 374.

woraus folgt, daß die Charakteriſtiken der Kanalflächen zugleich die Linien des ſtärkſten Falles dieſer Flächen ſind (§. 126).

Die Gleichungen (c) und (f'') gehören zu einer beliebigen auf irgend einer Umhüllungsfläche liegenden Charakteriſtik, und die in dieſen Gleichungen vorkommenden Größen p, q beſtimmen für jeden Punkt (x, y, z) die durch dieſen Punkt gehende Charakteriſtik. Wenn man alſo p, q zwiſchen den drei Gleichungen (f), (c) und (f'') eliminirt, ſo gehört die reſultirende Gleichung der Curve an, welche von allen Charakteriſtiken berührt wird, oder der Rückkehrkante der Umhüllungsfläche.

Man findet alſo, daß die Coordinaten der Rückkehrkante oder Wendungscurve der Kanalflächen der Differenzialgleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{R^2}{z^2}(dx^2 + dy^2)$$

genügen müſſen. Dieſe Linie kann ſich übrigens auch auf einen Punkt reduciren, oder ſogar imaginär werden. Wir wollen z. B.

$$\varphi\alpha = \sqrt{R_1^2 - \alpha^2}$$

ſetzen, ſo reducirt ſich die Gleichung (4) auf $y = 0$ und die zweite der Gleichungen (3) verwandelt ſich alsdann in:

$$x\sqrt{R_1^2 - \alpha^2} - \alpha y = 0$$

und es ergibt auch $x = 0$. Werden endlich dieſe Werthe von x und y in die erſte der Gleichungen (3) ſubſtituirt, ſo erhält man für den correſpondirenden Werth der Ordinate z:

$$z = \pm\sqrt{R^2 - R_1^2},$$

ſo daß ſich die Wendungscurve auf zwei auf der Axe der z liegende Punkte reducirt, wenn $R > R_1$ iſt, auf einen einzigen Punkt, welcher der Anfangspunkt der Coordinaten iſt, für $R = R_1$ und endlich imaginär wird, wenn $R < R_1$ iſt, in welchem Falle die beſchriebene Fläche ein eigentlicher Ring iſt (§. 236).

§. 264. Wir wollen nun zeigen, wie man die willkührliche Function φ ſo beſtimmen kann, daß die durch das Syſtem der Gleichungen ((F)) ausgedrückte Fläche durch eine gegebene Curve:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0, \qquad (f) \\ f_1(x, y, z) &= 0. \qquad (f_1) \end{aligned}\right\} \qquad (f, f_1)$$

geht. Hierzu iſt erforderlich, daß die Tangente dieſer Curve beſtändig in der Berührungsebene im Punkte (x, y, z) der umhüllten Fläche und der Umhüllungsfläche liegt. Es ſei:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

die Gleichung der Berührungsebene und:

$$\xi - x = \frac{dx}{dz}(\zeta - z), \quad \eta - y = \frac{dy}{dz}(\zeta - z)$$

ſeien die Gleichungen der Tangenten der Curve (f, f_1), ſo ſind p, q Größen, welche vermittelſt der erſten der Gleichungen ((F)) als Functionen von $x, y, z, \alpha, \varphi\alpha$ gegeben werden, während $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ Functionen von x, y, z ſind, welche ſich durch Differenzirung der Gleichungen $(f), (f_1)$ ergeben. Dieſes vorausgeſetzt,

wird der durch die ausgesprochene Bedingung zwischen $x, y, z, \alpha, \varphi\alpha$ festgestellte Zusammenhang durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$p\frac{dx}{dz} + q\frac{dy}{dz} = 1, \qquad (d)$$

welche sich, nachdem man x, y, z vermittelst der Gleichung der umhüllten Fläche und der Gleichungen der gegebenen Curve daraus fortgeschafft hat, auf folgende Form reducirt:

$$\omega(\alpha, \varphi\alpha) = 0, \qquad (\omega)$$

und folglich die Function φ bestimmt.

Wenn diese Function nach der Bedingung bestimmt werden müßte, daß die correspondirende Umhüllungsfläche die Fläche (f) berührte, so müßte man aus der Gleichung (f) die Werthe von $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ als Functionen von x, y, z ableiten, und statt der Gleichung (d) erhielt man:

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \qquad (e)$$

wo die Werthe von p, q, wie vorhin, durch Differenzirung der Gleichung der umhüllten Fläche als Functionen von $x, y, z, \alpha, \varphi\alpha$ gegeben werden. Hierauf müßte man die Gleichung der umhüllten Fläche mit den Gleichungen (f) und (e) verbinden und x, y, z zwischen diesen vier Gleichungen eliminiren, wodurch man die gesuchte Relation (ω) zwischen α und $\varphi\alpha$ erhielte.

Ist die Function φ bestimmt, so erhält man die Function φ' durch Differenzirung und kann die Werthe von $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$ als Functionen von α in die Gleichungen $((F))$ substituiren und dann α eliminiren, um die Gleichung der gesuchten Umhüllungsfläche zwischen x, y, z zu erhalten; oder was auf dasselbe hinausläuft, man kann mit der Gleichung (ω) ihre Ableitung:

$$\frac{d\omega}{d\alpha} + \frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\varphi'\alpha = 0 \qquad (\omega')$$

verbinden und dann $\alpha, \varphi\alpha, \varphi'\alpha$ zwischen den Gleichungen $((F))$, (ω), (ω') eliminiren.

§. 265. Als Anwendung des Vorhergehenden wollen wir die in dem Systeme der Gleichungen (3) vorkommende Function φ so zu bestimmen suchen, daß der Durschnitt der Kanalfläche mit der Ebene der xz die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

sei; so wird die Gleichung (d):

$$\frac{x-a}{x} = \frac{b^2}{a^2}$$

und für die Gleichung (ω) hat man:

$$\frac{(\varphi\alpha)^2}{b^2} - \frac{\alpha^2}{a^2-b^2} = \frac{R^2}{b^2} - 1.$$

Man kann wieder β für $\varphi\alpha$ setzen, wo α, β alsdann die zu den Axen der x und der y der krummlinigen Axe oder der Mittellinie der Kanalfläche veränderlichen parallelen Coordinaten in der Ebene der xy bezeichnen. Die Gleichung dieser Linie:

$$\frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{R^2}{b^2} - 1 \qquad (7)$$

gehört zu einer Ellipse, oder zu einer Hyperbel, je nachdem $a <$ oder $> b$ ist. Wir wollen $b < R$ setzen, um die Schwierigkeit zu vermeiden, welche daraus entspringen könnte, daß die Curve (6) nicht in ihrer ganzen Ausdehnung zwischen den beiden Ebenen $z = \pm R$ bliebe, welche die durch das System der Gleichungen (3) ausgedrückten Flächen begrenzen.

Uebrigens ist einleuchtend, daß die Curve (6) die Curve (7) nur in dem zwischen den geraden Linien $\beta = \pm R$ liegenden Theile ihres Laufes bestimmt, oder mit andern Worten: daß sich der Durchschnitt der Umhüllungsfläche mit der Ebene der xz nicht ändert, was für eine Linie der Mittelpunkt der umhüllten Kugel auf der Ebene der xy auch beschreiben mag, sobald die Entfernung dieses Mittelpunktes von der Axe der x größer ist, als der Halbmesser der Kugel. Die Gleichung (6) kann also die willkührliche Function φ nur dann in der ganzen Ausdehnung ihres Verlaufes geben, wenn man annimmt, daß diese Function φ eine algebraische ist und in ihrem ganzen Verlaufe denselben algebraischen Ausdruck behält, welche Bemerkung der bereits bei Gelegenheit der Rotationsflächen (§. 256) gemachten analog ist.

§. 266. Man kann annehmen, daß die Gleichung einer umhüllten Fläche drei willkührliche Parameter α, β, γ enthält und, nachdem man $\beta = \varphi\alpha$, $\gamma = \psi\alpha$ gesetzt hat, folgende Form annimmt:

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha) = 0.$$

Das System dieser Gleichung und ihrer Ableitung;

$$\frac{dF}{d\alpha} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \varphi'\alpha + \frac{dF}{d\psi} \cdot \psi'\alpha = 0$$

gehört zu einer Art von Umhüllungsflächen, wovon jede individuell bestimmt ist, sobald die Functionen φ, ψ gegeben sind. Ebenso kann man annehmen, daß die Gleichung der umhüllten Fläche eine beliebige Anzahl veränderlicher Parameter enthält, welche auf irgend eine Weise mit einander verbunden sind; allein wir werden uns auf die Betrachtung des Falls beschränken, wo die umhüllte Fläche eine sich nach irgend einem Gesetze im Raume bewegende Ebene ist.

Es sei also:

$$z = \alpha + x\varphi\alpha + y\varphi\alpha \qquad (\varepsilon)$$

die Gleichung der beweglichen Ebene und:

$$1 + x\varphi'\alpha + y\psi'\alpha = 0 \qquad (\varepsilon')$$

ihre Ableitung in Beziehung auf α; so kann das System der Gleichungen (ε), (ε') eine beliebige abwickelbare Fläche ausdrücken. Es ergibt sich daraus $p = \varphi\alpha$, $q = \psi\alpha$, und folglich:

$$q = \varphi(z - px - qy), \qquad (h) \qquad q = \psi(z - px - qy), \qquad (h_1)$$

oder:

$$\Phi(p, q, z - px - qy) = 0,$$

welches auf die bereits in §. 168 und §. 245 gefundenen Gleichungen:

$$p = \Pi q, \qquad (i) \qquad rt - s^2 = 0 \qquad (k)$$

führt.

§. 267. Die durch das System der Gleichungen (ε), (ε') ausgedrückte Charakteristik ist für jeden Werth von α eine gerade Linie. Man erhält eine

Differenzialgleichung dieſer Charakteriſtik, wenn man die Gleichung (i) differenzirt, indem man p, q als Veränderliche betrachtet (§. 263), welches $dp = \Pi' q \cdot dq$ gibt, und wenn man dp, dq vermittelſt der Gleichung:

$$dp dx + dq dy = 0 \text{ eliminirt, woraus folgt } p dy - \Pi' q dx = 0. \quad (l)$$

Die Gleichung (l) drückt aus, daß das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ blos eine Function der Größen p, q iſt, was in der That daraus folgt, daß dieſelbe Ebene die abwickelbare Fläche in allen Punkten der Charakteriſtik berührt. Dieſe Gleichung enthält ein willkührliches Functionszeichen; allein, wenn man zu der Differenzialgleichung der zweiten Ordnung übergeht, ſo erhält man eine andere Gleichung der Charakteriſtik, worin das Zeichen Π nicht mehr vorkommt. Denn da die Gleichung (k) der ganzen abwickelbaren Fläche angehört, obgleich ſich die Functionen r, s, t von einer Fläche zur andern ändern, ſo muß man, wenn ſich zwei abwickelbare Flächen nach einer gemeinſchaftlichen Charakteriſtik berühren, für die auf dieſer Linie liegenden Punkte die Relation haben:

$$t dr - 2s ds + r dt = 0. \quad (k')$$

Aber vermöge der Gleichungen (g), (g') ändert ſich die Berührungsebene für die auf der Charakteriſtik liegenden Punkte nicht mit den Coordinaten x, y, z. Es iſt alſo:

$$dp = r dx + s dy = 0, \quad dq = s dx + t dy = 0,$$

und vermöge einer neuen Differenzirung:

$$dr dx + ds dy = 0, \quad ds dx + dt dy = 0.$$

Wenn man die Differenziale dr, ds, dt vermittelſt dieſer beiden letzten Gleichungen aus der Gleichung (k') eliminirt, ſo erhält man für die Differenzialgleichung der Charakteriſtik:

$$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0, \quad (m)$$

oder wegen der Gleichung (k) einfacher:

$$\sqrt{r} \cdot dx + \sqrt{t} \cdot dy = 0.$$

Um die Gleichung der Wendungscurve der abwickelbaren Fläche zu erhalten, muß man mit den Gleichungen (g), (g') die Ableitung der zweiten Ordnung:

$$x\varphi''\alpha + y\psi''(\alpha) = 0 \quad (g'')$$

verbinden und dann α eliminiren. Man erhält eine Differenzialgleichung, welcher die Coordinaten derſelben Linie genügen müſſen, wenn man p, q zwiſchen den Gleichungen (i), (l) und der Gleichung $dz = p dx + q dy$ eliminirt. Dieſes führt auf eine Gleichung $\Pi_1 (dx, dy, dz) = 0$, worin die Function Π_1 erſt dann beſtimmt werden kann, wenn die Function Π, wovon ſie abgeleitet wird, gegeben iſt.

§. 268. Wir wollen nun die Functionen φ und ψ ſo zu beſtimmen ſuchen, daß die abwickelbare Fläche durch zwei gegebene Curven:

$$\left.\begin{matrix} f_1(x,y,z) = 0, \\ f_1(x,y,z) = 0; \end{matrix}\right\} (f_1) \quad (f_1, f_1) \qquad \left.\begin{matrix} f_2(x,y,z) = 0, \\ f_2(x,y,z) = 0, \end{matrix}\right\} (f_2) \quad (f_2, f_2)$$

geht, ſo gibt dieſelbe Rechnung, wie die in §. 264, für jede der beiden Richteurven wiederholt, zwei Gleichungen von der Form:

$$\omega_1(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha) = 0, \quad (\omega) \qquad \omega_2(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha) = 0; \quad (\omega_2)$$

und wenn man ſie auflöſt, ſo erhält man die Functionen φ und ψ, welche in die Gleichungen (g), (g') ſubſtituirt werden können, ſo daß blos noch α zu

eliminiren bleibt, um die Gleichung der gesuchten abwickelbaren Fläche zwischen x, y, z zu erhalten. Um aber die Auflösung der Gleichungen (ω_1), (ω_2) zu umgehen, kann man mit denselben ihre Ableitungen:

$$\frac{d\omega_1}{d\alpha} + \frac{d\omega_1}{d\varphi}\cdot\varphi'\alpha + \frac{d\omega_1}{d\psi}\cdot\psi'\alpha = 0, \qquad (\omega'_1)$$

$$\frac{d\omega_2}{d\alpha} + \frac{d\omega_2}{d\varphi}\cdot\varphi'\alpha + \frac{d\omega_2}{d\psi}\cdot\psi'\alpha = 0, \qquad (\omega'_2)$$

verbinden und die fünf Veränderlichen α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$, $\psi\alpha$, $\psi'\alpha$ zwischen den Gleichungen (ε), (ε'), (ω_1), (ω_2), (ω'_1) und (ω'_2) eliminiren.

Wenn die Functionen φ, ψ nach der Bedingung bestimmt werden müßten, daß die abwickelbare Fläche die beiden Flächen (f_1), (f_2) berührte, so müßte man für jede dieser Flächen die Rechnung in dem angeführten § wiederholen und man würde auf zwei Gleichungen zwischen x, y, z kommen, welche für die Gleichungen (f_1), (f_2) genommen werden könnten, worauf die Rechnung wie im ersten Falle vollendet werden könnte.

§. 269. Wenn ein undurchsichtiger Körper von einem leuchtenden Körper von endlichen Dimensionen erleuchtet wird, so begrenzen die beiden Fächer einer abwickelbaren Fläche, welche den undurchsichtigen und den leuchtenden Körper berührt, bekanntlich im Raume den Schatten und den Halbschatten, und da diese Anwendung der letzten Aufgabe, wovon wir die Auflösung eben angegeben haben, ein größeres Interesse gibt; so wollen wir hier noch einige Vereinfachungen mittheilen, welche die Methode in diesem besondern Falle gestattet.

Die Gleichung der Ebene, welche die Fläche (f_1) im Punkte (x_1, y_1, z_1) und die Fläche (f_2) im Punkte (x_2, y_2, z_2) berührt, ist:

$$z - z_1 = p_1 (x - x_1) + q_1 (y - y_1), \qquad (n_1)$$

oder:

$$z - z_2 = p_2 (x - x_2) + q_2 (y - y_2), \qquad (n_2)$$

wo p_1, q_1 durch Differenzirung der Gleichung:

$$f_1 (x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad (f_1)$$

als Functionen von x_1, y_1, z_1 und p_2 und q_2 durch die Differenzirung der Gleichung:

$$f_2 (x_2, y_2, z_2) = 0 \qquad (f_2)$$

als Functionen von x_2, y_2, z_2 gegeben werden. Hieraus ergibt sich:

$$z_1 - p_1 x_1 - q_1 y_1 = z_2 - p_2 x_2 - q_2 x_2 \qquad (o)$$

und außerdem hat man:

$$p_1 = p_2, \quad q_1 = q_2. \qquad (p)$$

Vermittelst der Gleichungen (f_1), (f_2), (o), (p) schafft man x_2, y_2, z_2 fort und bestimmt y_1, z_1 als Functionen von x_1, wodurch die Gleichung (n_1) folgende Form annimmt:

$$z = x\cdot\varphi x_1 + y\cdot\psi x_1 + \omega x_1.$$

Man braucht also nur zwischen dieser Gleichung und ihrer Ableitung in Beziehung auf x_1 den Parameter x_1 zu eliminiren, um die Gleichung der verlangten abwickelbaren Fläche zwischen x, y, z zu erhalten.

$$0 = x\cdot\varphi' x_1 + y\cdot\psi' x_1 + \omega' x_1.$$

Wenn es blos darauf ankommt, auf dem undurchsichtigen Körper, dessen Oberfläche durch die Gleichung (f_1) ausgedrückt werden mag, die Berührungslinien mit der ihn umschließenden abwickelbaren Fläche, oder die Linien, welche den Halbschatten, den Kernschatten und den vollkommen erleuchteten Theil von einander trennen, zu bestimmen; so braucht man nur x_2, y_2, z_2 aus den Gleichungen (f_2), (o), (p) fortzuschaffen und alsdann bestimmt die resultirende Gleichung:

$$f_1(x_1, y_1, z_1) = 0$$

in Verbindung mit der Gleichung (f_1) das System der Berührungslinien.

Neuntes Kapitel.

Von den Evoluten im Allgemeinen.

§. 270. In §. 232 haben wir gesehen, daß die geraden Durchschnittslinien zweier einander unendlich nahe liegender Normalebenen einer Linie von doppelter Krümmung, oder die durch die Krümmungsmittelpunkte dieser Linie senkrecht auf die entsprechenden Krümmungsebenen gezogenen geraden Linien eine Umhüllungslinie haben, welche mit der gegebenen Curve in einer solchen Beziehung steht, daß sie ihre Krümmungen in den correspondirenden Punkten gegenseitig austauschen, so daß die erste Krümmung oder Biegung der einen die zweite Krümmung oder Biegung der andern ist, und umgekehrt. Wir müssen jetzt hinzufügen, daß diese Umhüllungslinie die Rückkehrkante oder Wendungscurve einer abwickelbaren Fläche ist, welche die bewegliche gerade Linie zur Erzeugungslinie hat, die vermittelst des Durchschnittes zweier einander unendlich nahe liegender Normalebenen der gegebenen Curve bestimmt wird.

Ferner fügen wir hinzu, daß diese abwickelbare Fläche der geometrische Ort aller der unendlich vielen Evoluten ist, welche die gegebene Curve haben kann.

Denn erinnern wir uns der ersten geometrischen Begriffe wieder, welche als Grundlage der Theorie der Evoluten dienen, so ist zunächst einleuchtend, daß durch das bewegliche Ende einer geraden Linie von constanter Länge, deren anderer Endpunkt fest ist, ein Kreis beschrieben werden kann, und zwar nicht blos, wenn der feste Endpunkt mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammenfällt, sondern auch, wenn man zu diesem festen Endpunkte irgend einen Punkt des durch den Mittelpunkt des Kreises auf seiner Ebene errichteten Perpendikels nimmt.

Die gerade Linie, welcher die Punkte angehören, wird die Pollinie genannt.

Gehen wir nun von der Betrachtung des Kreises zu der einer beliebigen Curve über. Wir wollen die Evolute der Curve in ihrer Ebene beschreiben und die cylindrische Fläche construiren, wovon diese Evolute der gerade Durchschnitt sein würde; so kann ein beliebiger Punkt ν der durch den Punkt μ der Evolute gehenden Erzeugungslinie $\mu\nu$, welcher dem Punkte m der Evolvente entspricht, als der Pol des Krümmungskreises im Punkte m, wovon ein unendlich kleiner Bogen mit dem unendlich kleinen Bogen mm_1 der

Evolvente zuſammenfällt, betrachtet werden. Die gerade Linie $m\nu$ berührt den Cylinder in ν; denn ihre Projection $m\mu$ auf der Ebene der Evolute berührt die Evolute in μ. Wenn man die Berührungsebene, worin ſie liegt, ſich ſo fortbewegen läßt, daß ſie die krumme Fläche fortwährend berührt, ſo trifft die Verlängerung der geraden Linie $m\nu$ die ſucceſſiven Erzeugungslinien in den Punkten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ welche den Punkten $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ der Evolute und den Punkten $m_1, m_2, m_3, \ldots$ der Evolvente entſprechen. Auf dieſe Weiſe wird auf der cylindriſchen Fläche eine Curve $\nu\nu_1\nu_2\nu_3\ldots$ beſchrieben, deren Tangenten mit den Erzeugungslinien einen conſtanten Winkel bilden und welche ſich in eine gerade Linie verwandelte, wenn die cylindriſche Fläche in eine Ebene ausgebreitet würde. Nun ſind aber die Punkte $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ die Pole der Krümmungskreiſe der Evolvente in den Punkten $m_1, m_2, m_3, \ldots$, und die auf dieſen Kreiſen genommenen unendlichen kleinen Bogen fallen mit den unendlich kleinen Bogen der Evolvente zuſammen. Die Bogen mm_1, m_1m_2, $m_2m_3, \ldots$ können folglich ſucceſſive zuerſt aus dem Punkte ν als Pol mit dem Halbmeſſer νm, dann aus dem Punkte ν_1 als Pol mit dem Halbmeſſer ν_1m_1, hierauf aus dem Punkte ν_2 als Pol mit dem Halbmeſſer ν_2m_2, u. ſ. f. beſchrieben werden. Wenn man alſo einen vorher auf die Curve $\nu_1\nu_2\nu_3\ldots$ gewickelten Faden (indem die geradlinige Verlängerung dieſes Fadens die Evolvente in m trifft und auf dem Elemente mm_1 ſenkrecht iſt) abwickelt; ſo beſchreibt der Endpunkt des Fadens die ebene Curve $mm_1m_2m_3\ldots$ mit einer ſtetigen Bewegung und iſt ſtets auf dem jedesmal beſchriebenen Elemente ſenkrecht. Folglich kann die Linie von doppelter Krümmung $\nu\nu_1\nu_2\nu_3\ldots$ ebenſowohl als die ebene Curve $\mu\mu_1\mu_2\mu_3\ldots$ als eine Evolute der ebenen Curve $mm_1m_2m_3\ldots$ betrachtet werden.

Die gerade Linie $m\nu$ kann ſo gezogen werden, daß ſie die durch den Punkt μ gehende Erzeugungslinie in einem beliebigen Punkte und unter einem beliebigen Winkel durchſchneidet. Eine ebene Curve hat folglich unendlich viele Evoluten von doppelter Krümmung, welche alle auf der cylindriſchen Fläche liegen, die der geometriſche Ort der Pole der Evolvente iſt und deren gerader Durchſchnitt die ebene Evolute iſt. Alle dieſe Evoluten haben die charakteriſtiſche Eigenſchaft, die Erzeugungslinien unter einem conſtanten Winkel zu durchſchneiden und ſich in gerade Linien zu verwandeln, wenn man die cylindriſche Fläche in eine Ebene ausbreitet.

§. 271. Betrachten wir endlich eine beliebige Linie von doppelter Krümmung $mm_1m_2m_3\ldots$ und die abwickelbare Fläche, deren Erzeugungslinie die gerade Durchſchnittslinie zweier einander unendlich nahe liegender Normalebenen iſt; ſo berührt die Normalebene m dieſe Fläche nach einer Erzeugungslinie $\mu\nu$, indem der Punkt μ der dem Punkte m entſprechende Krümmungsmittelpunkt der gegebenen Linie iſt. Durch den Punkt m wollen wir willkührlich in der Normalebene der Curve, welche die krumme Fläche berührt, eine gerade Linie ziehen, die die Fläche in einem beliebigen Punkte μ der Erzeugungslinie $\mu\nu$ berührt. Wenn man die Ebene, worin dieſe gerade Linie liegt, ſich fortbewegen läßt, indem ſie aber ſtets die abwickelbare Fläche berührt und auf der gegebenen Curve ſenkrecht iſt; ſo trifft die Verlängerung der geraden Linie $m\nu$ die ſucceſſiven Erzeugungslinien in den Punkten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ und legt ſich auf die krumme Fläche nach einer Curve $\nu\nu_1\nu_2\nu_3\ldots$, welche die Eigenſchaft hat, ſich in eine gerade Linie zu verwandeln, wenn man die abwickelbare Fläche in eine Ebene ausbreitet. Die Punkte $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ ſind die Pole der Krümmungskreiſe der gegebenen Curve in den entſprechenden Punkten $m_1, m_2, m_3, \ldots$, deren Krümmungsmittelpunkte $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ ſind, und auf welche ſich die Erzeugungslinien $\nu_1\mu_1, \nu_2\mu_2, \nu_3\mu_3, \ldots$ be-

ziehen. Hieraus folgt, wie in dem zuerſt betrachteten beſondern Falle, daß die Curve $\nu\nu_1\nu_2\nu_3\ldots$ eine Evolute der gegebenen Curve iſt. Man kann den Anfangspunkt ν auf der Erzeugungslinie $\mu\nu$ willkührlich annehmen, und folglich hat die gegebene Curve unendlich viele Evoluten, welche alle auf der weiter oben definirten abwickelbaren Fläche liegen, die wir aus dieſem Grunde die Polfläche nennen wollen. Das unterſcheidende Merkmal aller dieſer Evoluten beſteht darin, daß ſie ſich in gerade Linien verwandeln, wenn die abwickelbare Fläche in eine Ebene ausgebreitet wird.

In §. 233 haben wir geſehen, daß die Linie der Krümmungsmittelpunkte, obgleich ſie auf der Polfläche liegt, keine Evolute iſt, wofern die gegebene Curve keine ebene iſt.

§. 273. Um die Gleichung der Polfläche zwiſchen ξ, η, ζ zu erhalten, muß man aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(\xi-x)\,dx+(\eta-y)\,dy+(\zeta-z)\,dz&=0,\\(\xi-x)\,d^2x+(\eta-y)\,d^2y+(\zeta-z)\,d^2z-ds^2&=0,\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

die Größen x, y, z und ihre Differenziale der beiden erſten Ordnungen vermittelſt der Gleichungen der gegebenen Curve und ihrer Ableitungen der beiden erſten Ordnungen eliminiren (§. 232). Die Gleichung (κ) in §. 233 drückt aus, daß die Tangente der Evolvente im Punkte (x, y, z) die Tangente der Evolute in dem entſprechenden Punkte (ξ, η, ζ) rechtwinklig durchſchneidet, was übrigens auch ohne alle Rechnung daraus folgt, daß die Normalebene der Evolvente im Punkte (x, y, z) die Polfläche nach der durch den Punkt (ξ, η, ζ) gehenden Erzeugungslinie berührt.

Wenn die Veränderlichen ξ, η, ζ die veränderlichen Coordinaten einer der Evoluten bezeichnen, ſo müſſen ſie den Gleichungen (a) genügen und außerdem durch die Bedingung mit einander verbunden ſein, daß der vom Punkte (ξ, η, ζ) der Evolute nach dem entſprechenden Punkte (x, y, z) der Evolvente gezogene Radius die Evolute berührt, welche Bedingung durch folgende Gleichung ausgedrückt wird:

$$\frac{d\xi}{\xi-x}=\frac{d\eta}{\eta-y}=\frac{d\zeta}{\zeta-z}.\qquad(b)$$

Wenn man x, y, z und ihre Differenziale vermittelſt der Gleichungen der Evolvente aus den Gleichungen (a) und (b) entfernt hat, ſo bleiben zwei allen Evoluten gemeinſchaftliche Gleichungen zwiſchen ξ, η, ζ, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, und die Integration dieſer Gleichungen würde zwei willkührliche Conſtanten einführen, deren Werthe jede Evolute particulariſiren (§. 163 und §. 165).

§. 274. Wir wollen die durch die Gleichungen (h) in §. 234 ausgedrückte Schraubenlinie zur Evolvente nehmen, ſo verwandeln ſich die Gleichungen (a) in folgende:

$$\left.\begin{aligned}\xi\sin.\varphi-\eta\cos.\varphi&=a(\zeta-aR\varphi)\\\xi\cos.\varphi+\eta\sin.\varphi&=-a_2R\end{aligned}\right\}\qquad(c)$$

und geben:

$$\xi^2+\eta^2=a^4R^2+a^2(\zeta-aR\varphi)^2,$$

woraus folgt:

$$\varphi=\frac{1}{aR}\pm\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{a^4R^2}-1}.$$

Wird dieſer Werth von φ in die Gleichung (c) ſubſtituirt, ſo erhält man für die Gleichung der Polfläche:

$$a^2R + \left(\cos.\frac{\zeta}{aR} + \eta \sin.\frac{\zeta}{aR}\right)\cos.\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{a^4R^2} - 1}$$

$$= \pm\left(\cos.\frac{\zeta}{aR} - \eta \sin.\frac{\zeta}{aR}\right)\sin.\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{a^4R^2} - 1}. \qquad (d)$$

In §. 235 haben wir geſehen, daß die Wendungscurve dieſer abwickelbaren Fläche, welche in dem gegenwärtigen Falle mit der Linie der Krümmungsmittelpunkte der Evolvente identiſch iſt, eine andere Schraubenlinie iſt, welche dieſelbe Weite oder Höhe und dieſelbe Axe hat, auf derſelben windſchiefen Schraubenfläche liegt (§. 253) und deren Gleichungen zwiſchen ξ, η, ζ folgende ſind:

$$\xi = -a^2R\cos.\varphi,\quad \eta = -a^2R\sin.\varphi,\quad \zeta = aR\varphi. \qquad (\eta)$$

Die abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante oder Wendungscurve eine Schraubenlinie iſt, wird die abwickelbare Schraubenfläche genannt.

Die in der Gleichung (d) unter den Zeichen sin. und cos. vorkommende Wurzelgröße wird imaginär, wenn man ſetzt:

$$\xi^2 + \eta^2 < a^4R^2, \qquad (e)$$

oder nach den Gleichungen (η), wenn man den Punkt (ξ, η, ζ) innerhalb des Cylinders annimmt, auf welchen ſich die Wendungscurve der abwickelbaren Schraubenfläche wickelt. Nun iſt aber der Sinus eines imaginären Bogens auch imaginär, während ſich der Coſinus deſſelben Bogens in eine reelle Exponentialgröße verwandelt (§. 75). Die abwickelbare Schraubenfläche tritt alſo nicht in den Cylinder, auf welchen ſich ihre Wendungscurve oder Rückkehrkante wickelt, und alle ebene Durchſchnitte dieſer Fläche haben in den Punkten, wo ſie die Wendungscurve treffen, Rückkehrpunkte.

Zehntes Kapitel.

Von der Krümmung der Flächen.

1) Lehrſätze von Meusnier und Euler. — Beſtimmung der Hauptkrümmungshalbmeſſer und der Nabelpunkte.

§. 275. Wir wollen uns auf einer krummen Fläche durch denſelben Punkt unendlich viele Linien von einfacher oder doppelter Krümmung gezogen denken, ſo haben alle dieſe Curven in dem gemeinſchaftlichen Punkte eben ſo viele verſchiedene Krümmungshalbmeſſer; aber dennoch ſtehen die Werthe dieſer Krümmungshalbmeſſer in einem gegenſeitigen Zuſammenhange und laſſen ſich von einer kleinen Anzahl von Elementen abhängig machen. Wir wollen jetzt dieſe Reduction, welche ein Hauptpunkt der Theorie der krummen Flächen iſt, vornehmen.

Es ſei:

$$z = f(x, y) \qquad (z)$$

Die Gleichung der krummen Fläche; (x, y, z) der gemeinſchaftliche Punkt der Linien, welche man ſich auf dieſer Fläche gezogen denkt, s der Bogen irgend

einer dieſer Linien von einfacher oder doppelter Krümmung, ρ' der Halbmeſſer der erſten Krümmung dieſer Linie im Punkte (x, y, z), ρ der Krümmungshalbmeſſer des Normalſchnittes (§. 237), welcher dieſelbe Tangente hat und durch denſelben Punkt geht und θ der Winkel, welchen die beiden Krümmungshalbmeſſer ρ, ρ' mit einander bilden, und endlich ſeien x', y', z', x'', y'', z'' die erſten und zweiten Ableitungen der Coordinaten x, y, z in Beziehung auf den zur unabhängigen Veränderlichen genommenen Bogen s; ſo erhält man, wenn man die Gleichung (z) zweimal hintereinander differenzirt:

$$z' = px' + qy', \qquad (z')$$

$$z'' = px'' + qy'' + rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2, \qquad (z'')$$

und die Ableitungen x', y', z' ſind ferner durch die Bedingungsgleichung:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \qquad (1)$$

miteinander verbunden. Der Krümmungshalbmeſſer ρ, welcher mit der Normale der Fläche zuſammenfällt, bildet mit den Axen der x, y, z Winkel λ, μ, ν, deren Coſinus nach §. 237 reſp. ausgedrückt werden durch:

$$\frac{\pm p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{\pm q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{\mp 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Ferner bildet der Krümmungshalbmeſſer ρ' mit denſelben Coordinatenaxen Winkel, deren Coſinus nach §. 228 reſp. ausgedrückt werden durch:

$$\pm \rho' x'', \pm \rho' y'', \pm \rho' z'',$$

woraus vermöge der Gleichung (z'') folgt, wenn man von dem Zeichen von cos. θ abſtrahirt:

$$\cos.\theta = \rho' \cdot \frac{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \qquad (2)$$

Die Ableitungen x', y', z' drücken auch, abgeſehen vom Zeichen, die Coſinus der Winkel aus, welche die Tangente der Linie, deren Krümmungshalbmeſſer ρ' iſt, mit den Axen der x, y, z bildet. Folglich ändert ſich der Multiplicator von ρ' in der Gleichung (2) nicht, von welcher Beſchaffenheit dieſe Curve auch ſein mag, wofern ſie nur durch den betrachteten Punkt der Fläche geht und die Richtung ihrer Tangente in dieſem Punkte ſich nicht ändert. Mit andern Worten: man kann $\rho' = K \cos.\theta$ ſetzen, wo K für alle auf der krummen Fläche beſchriebene Curven, welche in dem gemeinſchaftlichen Punkte dieſelbe Tangente haben, eine Conſtante iſt. Wenn aber der Winkel θ verſchwindet, ſo iſt $\rho' = \rho$, folglich $K = \rho$ und:

$$\rho' = \rho \cos.\theta, \qquad (a) \quad \rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}. \qquad (b)$$

Der Halbmeſſer der erſten Krümmung einer beliebigen auf der krummen Fläche beſchriebenen Curve hängt alſo blos noch von dem Krümmungshalbmeſſer des Normalſchnittes ab, welcher dieſelbe Tangente als dieſe Curve und von der Neigung θ hat.

Wenn die erſte Curve eben iſt, ſo wird ſie ein ſchiefer Durchſchnitt genannt (§. 237) und ρ' wird die Projection von ρ auf die Ebene des ſchiefen Durchſchnittes. Der durch die Formel (a) ausgedrückte Lehrſatz wird alsdann der Meusnierſche Lehrſatz genannt, und die Bedeutung dieſer Formel wird verallgemeinert, wenn man ſie auf die eben angegebene Weiſe auf Linien von doppelter Krümmung erſtreckt.

Aus dem Meusnier'schen Lehrsatze folgt: wenn man eine Kugel beschreibt, deren Mitelpunkt und Halbmesser der Mittelpunkt und Halbmesser eines Normalschnittes ist, so haben alle schiefe Durchschnitte, welche dieselbe Tangente als der Normalschnitt haben, in dem gemeinschaftlichen Punkte die kleinen Kreise, welche die Durchschnitte der Kugel mit den resp. Ebenen dieser Kreise sind, zu ihren Krümmungskreisen.

§. 276. Um die Untersuchung der Krümmungshalbmesser der Normalschnitte zu vereinfachen, wollen wir zunächst annehmen, daß die Ebene der x y zu der Berührungsebene der krummen Fläche in dem gemeinschaftlichen Punkte der Normaldurchschnitte parallel sei, so ist $p = 0$, $q = 0$, die Formel (b) verwandelt sich in:

$$\varrho = \frac{1}{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2},$$

und wenn man, wie dieses vermöge der Gleichung (1) gestattet ist, setzt:

$$x' = \cos.\varphi,\ y' = \sin.\varphi,\ \text{tang.}\,\varphi = \alpha;$$

so kann man setzen:

$$\varrho = \frac{1}{r\cos.^2\varphi + 2s\sin.\varphi\cos.\varphi + t\sin.^2\varphi} \tag{3}$$

oder:

$$\varrho = \frac{1+\alpha^2}{r + 2s\alpha + t\alpha^2}: \tag{4}$$

wo φ alsdann den Winkel bezeichnet, welchen der Normaldurchschnitt mit einer durch die Normale parallel zu der Ebene der x z gelegten Ebene bildet.

Die größten und kleinsten Werthe des Krümmungshalbmessers ϱ erhält man, wenn man die Werthe von α sucht, welche die Ableitung:

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = \frac{2[s\alpha^2 + (r-t)\alpha - s]}{(r + 2s\alpha + t\alpha^2)^2}$$

verschwinden oder unendlich machen, und wenn man den Nenner dieser Ableitung gleich Null setzt; so erhält man die Werthe:

$$\alpha = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t} \tag{5}$$

welche nur dann reell sind, wenn $s^2 - rt > 0$ ist und welche einem Krümmungshalbmesser $= \infty$ oder einer Krümmung $= 0$ entsprechen. Die eigentlichen Maxima und Minima werden also ausschließlich durch die Gleichung:

$$\alpha^2 + \frac{r-t}{s}\alpha - 1 = 0 \tag{α}$$

gegeben, woraus folgt:

$$\alpha = \frac{t - r \pm \sqrt{(t-r)^2 + 4s^2}}{2s}.$$

Dieser immer reelle Ausdruck zeigt uns: 1) daß es auf jeder krummen Fläche und für alle nicht singuläre Punkte, für welche die partiellen Ableitungen p, q, r, s, t als Functionen zweier unabhängiger Veränderlichen ohne Unterbrechung der Stetigkeit bestimmt werden können, unter den Normaldurchschnitten zwei Hauptdurchschnitte gibt, für welche die Krümmung einen größten, oder kleinsten Werth hat; und 2) daß die Ebenen der Hauptdurchschnitte auf-

einander senkrecht sind, weil das Product der Wurzeln der Gleichung (α) gleich — 1 ist.

§. 277. Wir können folglich die Ebenen der x z und der y z, deren Richtung wir bis jetzt unbestimmt gelassen hatten, zu den Ebenen der Hauptdurchschnitte parallel annehmen, so daß von den beiden Wurzeln der Gleichung (α) die eine Null und die andere unendlich ist; d. h. wir können die Richtung dieser Coordinatenebenen so annehmen, daß $s = 0$ wird. Alsdann verwandelt sich der Werth von ϱ in:

$$\varrho = \frac{1}{r \cos.^2 \varphi + t \sin.^2 \varphi};$$

und wenn man die beiden Hauptkrümmungshalbmesser, welche resp. den Werthen $\sin. \varphi = 0$, $\cos. \varphi = 0$ entsprechen, mit R_1, R_2 bezeichnet; so hat man:

$$R_1 = \frac{1}{r}, \quad R_2 = \frac{1}{t},$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R_1} \cos.^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin.^2 \varphi. \qquad (b_1)$$

Diese sehr merkwürdige Formel verdankt man Euler. Sie gibt die Krümmungshalbmesser aller Normaldurchschnitte, und folglich auch die aller schiefen Durchschnitte als Function der Hauptkrümmungshalbmesser und der Winkel φ, θ, welche die Lage der Durchschnittsebenen gegen die Ebenen der Hauptdurchschnitte bestimmen.

Wenn man mit ϱ_1, ϱ_2 die Werthe von ϱ für zwei beliebige aufeinander senkrechte Durchschnitte bezeichnet, so ergibt sich aus der Gleichung (b_1) die elegante Relation:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = r + t. \qquad (c)$$

Wenn die beiden Hauptkrümmungshalbmesser R_1, R_2 einander gleich sind und dasselbe Zeichen haben, d. h. auf derselben Seite der Berührungsebene liegen; so wird der Werth von ϱ von dem Winkel φ unabhängig und ist für alle Normaldurchschnitte derselbe. Die Kugelfläche ist die einzige, welche in allen ihren Punkten diese Eigenschaft darbietet; aber es kommen auf andern Flächen singuläre Punkte vor, welche dieselbe Eigenschaft haben und welche Monge Nabelpunkte genannt hat.

§. 278. Wenn die Ableitungen r, t einerlei Zeichen haben, so haben die Hauptkrümmungshalbmesser R_1, R_2 auch einerlei Zeichen und das Zeichen von ϱ ändert sich nicht, so daß die krumme Fläche ganz um den Berührungspunkt herum ihre Convexität in Beziehung auf die Berührungsebene nach demselben Sinne kehrt.

Wir wollen nun annehmen, daß die Hauptkrümmungshalbmesser verschiedene Zeichen haben; z. B. daß R_1 positiv und R_2 negativ ist, so gibt es Normaldurchschnitte, welche über der Berührungsebene und andere, welche unter derselben liegen. Wenn man R_2 in $-R_2$ verwandelt, um nur positive Zahlen zu betrachten zu haben; so verwandelt sich die Formel (b_1) in folgende:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R_1} \cos.^2 \varphi - \frac{1}{R_2} \sin.^2 \varphi,$$

woraus erhellet, daß der veränderliche Krümmungshalbmeſſer ρ anfangs poſitiv iſt und von R_1 an bis in's Unendliche zunimmt, wenn man den Winkel φ von Null an zunehmen läßt. Dieſer letzte Werth von ρ entſpricht:

$$\frac{1}{R_1}\cos.^2\varphi = \frac{1}{R_2}\sin.^2\varphi, \quad \text{oder } \alpha = \pm\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \pm\sqrt{-\frac{r}{t}},$$

welches genau der Werth von (α) iſt, welchen die Gleichung (5) gibt, nachdem man darin $s = 0$ geſetzt hat.

Wenn man alſo dieſen beſonderen Werth von φ mit φ_0 bezeichnet und in der Berührungsebene zwei gerade Linien zieht, welche mit einer Parallele zu der Axe der x gleiche Winkel $\pm\varphi_0$ bildet; ſo haben alle Normaldurchſchnitte, deren Tangenten in die Winkelräume fallen, worin φ einen kleineren Zahlenwerth als φ_0 annimmt, poſitive Krümmungshalbmeſſer, und die, deren Tangenten in die Ergänzungswinkel der erſten fallen, haben negative Krümmungshalbmeſſer. R_1 iſt der kleinſte poſitive Krümmungshalbmeſſer, und aus demſelben Grunde iſt R_2 der kleinſte Zahlenwerth der negativen Krümmungshalbmeſſer, d. h. — R_2 iſt ein algebraiſches Maximum von ρ.

Wenn t, oder r verſchwindet, ſo verſchwindet s vermöge der Lage der Axen auch, der eine Hauptkrümmungshalbmeſſer iſt unendlich, während der andere folglich einen kleinſten Zahlenwerth und daſſelbe Zeichen, wie alle übrigen Krümmungshalbmeſſer hat.

§. 279. Wir wollen noch bemerken, daß man vermöge der Gleichung (3) die Größe $\sqrt{\rho}$ durch den Radiusvector eines auf ſeinen Mittelpunkt bezogenen Kegelſchnittes geometriſch darſtellen kann, indem φ den Winkel bezeichnet, welchen der Radiusvector mit der Axe der x bildet. Aus dieſer Conſtruction würde ſich ohne alle Rechnung nach der bekannten Unterſuchung der Kegelſchnitte alles vorhin über die Krümmungshalbmeſſer der Normalſchnitte Geſagte ſofort ergeben. Bekanntlich iſt der Kegelſchnitt eine Ellipſe, wenn $rt - s^2 > 0$ iſt, und da in dieſem Falle alle Radienvectoren der Hülfscurve endlich und reell ſind, ſo ſind auch alle Krümmungshalbmeſſer endlich und müſſen mit demſelben Zeichen genommen werden. Wenn dagegen $rt - s^2 < 0$ iſt, ſo muß man für die Ellipſe zwei conjugirte Hyperbeln annehmen, wovon die eine den imaginären Werthen des Radiusvectors oder den negativen Werthen des Krümmungshalbmeſſers entſpricht. Die Halbaxen der Ellipſe oder der beiden conjugirten Hyperbeln entſprechen der Richtung nach den Hauptdurchſchnitten und der Größe nach den Hauptkrümmungshalbmeſſern. Wenn endlich $rt - s^2 = 0$ iſt, ſo geht der Kegelſchnitt in ein Syſtem zweier gleichweit vom Anfangspunkte entfernter paralleler gerader Linien über und das auf denſelben errichtete Perpendikel entſpricht hinſichtlich der Richtung einem der Hauptdurchſchnitte und hinſichtlich der Größe dem kleinſten Krümmungshalbmeſſer.

§. 280. Der Euler'ſche Lehrſatz über die Krümmung der Normaldurchſchnitte erleidet Ausnahmen, welche erſt in der neueſten Zeit von Poiſſon *) angegeben ſind, obgleich ſie den Ausnahmen ganz analog ſind, welche die Theorie der Berührungsebenen erleidet (§. 236). Dieſe Ausnahmefälle finden ſtatt, wenn die Ableitungen r, s, t für den Berührungspunkt unbeſtimmte Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ annehmen, deren Unbeſtimmtheit ſich nur dadurch heben läßt, daß man zwiſchen den unabhängigen Veränderlichen x, y einen willkührlichen Zuſammenhang annimmt. Alsdann werden r, s, t Functionen des weiter oben

*) Journal de l'École polytechnique. 21e cahier. p. 205.

mit α bezeichneten Verhältniſſes, ſo daß die vorhergehenden Rechnungen, welche vorausſetzen, daß r, s, t nicht von α abhängig ſind, unſtatthaft werden. Um ein Beiſpiel der in Rede ſtehenden Ausnahmefälle zu haben, braucht man nur die Fläche zu betrachten, welche durch eine ſich um ihre Axe drehende Parabel erzeugt wird, während ſich ihr Parameter nach einem durch irgend eine ſtetige Function des Drehungswinkels ausgedrückten Geſetze ändert. Ein ſolches Paraboloid hat eine Gleichung von der Form:

$$x^2 + y^2 = 2xf\left(\frac{x}{y}\right),$$

wenn man die Axe der z zur Rotationsaxe und den Scheitel zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt. Die Normaldurchſchnitte mit den durch die Axe gelegten Ebenen ſind nichts anders, als die erzeugenden Parabeln, und der Krümmungshalbmeſſer ändert ſich von einem Durchſchnitte zum andern nach einem Geſetze, welches von der willkührlichen Function f abhängt. Der Krümmungshalbmeſſer kann folglich abwechſelnd beliebig viele Maxima und Minima durchlaufen, aber eben ſo viele Maxima als Minima, damit derſelbe nach einer ganzen Umdrehung der erzeugenden Parabel ſeinen urſprünglichen Werth wieder annimmt.

Poiſſon hat auch bemerkt, daß der Meusnier'ſche Lehrſatz ſelbſt in dem Falle ſtattfindet, wo der Euler'ſche unrichtig wird, und auch dieſes erhellet ſehr einfach aus dem Beweiſe, welchen wir §. 275 von dem Meusnier'ſchen Lehrſatze gegeben haben, der nicht erfordert, daß die Functionen r, s, t blos von x, y, z abhängen, ſondern daß man auch annehmen kann, daß ſich dieſe Functionen mit der Richtung der Tangente der Curve, deren Bogen mit s bezeichnet iſt, ändern.

§. 281. Wir wollen die Formel (b) wieder betrachten, welche ſtattfindet, was für eine Richtung die Normale gegen die Axen der x, y, z auch haben mag. Die in dieſer Formel vorkommenden Ableitungen x', y' müſſen der Gleichung (1) genügen, welche vermöge der Gleichung (1′) in folgende übergeht:

$$(1 + p^2)\,x'^2 + 2pq\,x'y' + (1 + q^2)\,y'^2 = 1, \qquad (6)$$

und woraus ſich durch Differenzirung ergibt:

$$[(1 + p^2)\,x' + pqy']\,dx' + [(1 + q^2)\,y' + pqx']\,dy' = 0.$$

Wenn man die Gleichung (b) in Beziehung auf ϱ differenzirt, ſo hat man:

$$(rx' + sy')\,dx' + (sx' + ty')\,dy' = 0,$$

und wenn man dieſe beiden letzten Gleichungen mit einander verbindet:

$$\frac{rx' + sy'}{(1 + p^2)\,x' + pqy'} = \frac{sx' + ty'}{(1 + q^2)\,y' + pqx'}. \qquad (7)$$

Wenn man alſo mit R einen der Hauptkrümmungshalbmeſſer bezeichnet, ſo erhält man die Gleichung mit R durch Elimination von x', y' zwiſchen den Gleichungen (6), (7) und der Gleichung:

$$R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}. \qquad (8)$$

Wir wollen der Kürze wegen ſetzen:

$$V = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 = \frac{1}{R}\sqrt{1 + p^2 + q^2} \qquad (V)$$

und die beiden Glieder der Brüche zur Linken und Rechten des Gleichheitszeichens der Gleichung (7) resp. mit x' und y' multipliciren und dann die Summen der Zähler und Nenner bilden; so reducirt sich der resultirende Bruch vermöge der Gleichung (6) auf das Polynom V. Man hat folglich:

$$V = \frac{rx' + sy'}{(1+p^2)x' + pqy'} = \frac{sx' + ty'}{(1+q^2)y' + pqx'},$$

oder vielmehr:

$$\left.\begin{aligned} [V(1+p^2) - r]\,x' &= (s - pqV)\,y', \\ [V(1+q^2) - t]\,y' &= (s - pqV)\,x', \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

und wenn man die correspondirenden Theile dieser Gleichungen in einander multiplicirt:

$$[V(1+p^2) - r]\,[V(1+q^2) - t] = (s - pqV)^2.$$

Setzt man für V seinen aus der Gleichung (V) als Function von R abgeleiteten Werth und ordnet, so erhält man endlich:

$$\begin{aligned} R^2(rt - s^2) - R[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2} \\ + (1+p^2+q^2)^2 = 0. \end{aligned} \qquad (R)$$

Es seien R_1, R_2 die Wurzeln dieser Gleichung oder die Werthe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser, so hat man:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Bedingung, daß die Hauptkrümmungshalbmesser R_1, R_2 einerlei Zeichen haben, wird also ausgedrückt durch $rt - s^2 > 0$, welche Richtungen die Coordinatenaxen auch haben mögen, und die Bedingung, daß einer der Hauptkrümmungshalbmesser unendlich wird, wird allgemein durch die Gleichung $rt - s^2 = 0$ ausgedrückt, welche auch die abwickelbaren Flächen charakterisirt.

Die Hauptkrümmungshalbmesser sind für alle Punkte einer krummen Fläche der absoluten Größe nach gleich und nach entgegengesetztem Sinne gerichtet, wenn die Gleichung:

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0 \qquad (d)$$

für alle Punkte dieser Fläche erfüllt wird. In der Folge werden wir sehen, daß die durch diese Gleichung mit partiellen Differenzialen der ersten und zweiten Ordnung charakterisirten Flächen auch noch eine andere eben so merkwürdige geometrische Eigenschaft haben.

§. 282. Die Hauptkrümmungshalbmesser R_1, R_2, und folglich die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte, sind einander gleich und haben entgegengesetzte Zeichen, wenn folgende Gleichung stattfindet:

$$[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 - 4(1+p^2+q^2)(rt - s^2) = 0.$$

Da sich diese Gleichung auf die Form:

$$\left[(1+p^2)t - (1+q^2)r + 2pq\left(\frac{pqr}{1+p^2} - s\right)\right]^2$$

$$+ 4(1+p^2+q^2)\left(\frac{pqr}{1+p^2} - s\right)^2 = 0$$

bringen läßt, so ist sie gleichbedeutend mit dem Systeme:

$$\frac{pqr}{1+p^2} - s = 0, \quad (1+p^2)\,t - (1+q^2)\,r = 0, \qquad (e)$$

oder:

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}. \qquad (f)$$

Dieſe letzten Gleichungen würde man direct erhalten haben, wenn man ausdrückte, daß die Gleichungen (9) für V und ſolglich für ϱ von x', y' unabhängige Werthe geben.

Die Coordinaten der Punkte, welche man Nabelpunkte genannt hat (§. 277), werden folglich durch das Syſtem der beiden Gleichungen (e) in Verbindung mit der Gleichung der krummen Fläche beſtimmt. Dieſe Punkte ſind iſolirte, wofern die beiden Gleichungen (e) nicht zufällig identiſch werden, welches auf der krummen Fläche die Exiſtenz einer Linie andeuten würde, welche nach der Analogie Nabellinie genannt wird, und welche Monge die Linie der ſphäriſchen Krümmungen genannt hat.

§. 283. Wir wollen das Geſagte auf das Ellipſoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

anwenden, ſo iſt:

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$

$$r = -\frac{c^4 (b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3}, \quad s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \quad t = -\frac{c^4 (a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3}$$

und der Kürze wegen wollen wir ſetzen:

$$\frac{a^2 (b^2 - c^2)}{b^2 (a^2 - c^2)} = A, \quad \frac{a^2 (a^2 - b^2)}{a^2 - c^2} = B.$$

Außerdem können wir $a > b > c$ ſetzen, ſo daß die Conſtanten A, B poſitiv ſind; ſo haben wir zur Beſtimmung der Coordinaten x, y der Nabelpunkte des Ellipſoides die beiden Gleichungen:

$$xy = 0, \quad x^2 - Ay^2 - B = 0, \qquad (g)$$

deren reelle Auflöſungen folgende ſind:

$$y = 0, \quad x = \pm\sqrt{B} = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Das Ellipſoid hat folglich vier Nabelpunkte, welche in der durch ſeine größte und kleinſte Axe gehenden Ebene liegen und folglich auf ſeiner Oberfläche ſymmetriſch vertheilt ſind. In der analytiſchen Theorie der krummen Flächen des zweiten Grades wird ferner bewieſen, daß die Berührungsebenen des Ellipſoides in den vier eben der Lage nach beſtimmten Punkten zu den Ebenen parallel ſind, welche die Eigenſchaft haben, daß ſie das Ellipſoid nach Kreiſen durchſchneiden, welches auf eine andere Definition der Nabelpunkte führt, wovon ſpäter die Rede ſein wird.

Wenn das Ellipſoid zwei gleiche Axen hat, ſo fallen die Nabelpunkte, wie ſich leicht aus den vorhergehenden Formeln ergibt, mit den Scheiteln der Rotationsaxe zuſammen.

2) Krümmungslinien.

§. 284. Wir wollen uns vorstellen, daß man auf einer gegebenen Fläche (S) irgend eine Linie (s) beschrieben und die Regelfläche (Σ) construirt habe, deren Erzeugungslinie durch diese Linie (s) geht und beständig auf der Fläche (S) normal bleibt; so ist die Fläche (Σ) im Allgemeinen eine windschiefe, d. h. ihre Erzeugungslinien haben keine Umhüllungslinien (§. 243) oder zwei durch einander auf der Linie (s) unendlich nahe liegende Punkte gezogene Normalen der Fläche (S) treffen einander nicht. Wenn man dagegen die Linie (s) schicklich bestimmt, so daß die Fläche (Σ) eine abwickelbare wird; so hat sie eine Rückkehrkante oder Wendungscurve (σ), welche von allen durch die Linie (s) gehenden Normalen der Fläche (S) berührt wird, was in der Sprache der Infinitesimalmethode dadurch ausgedrückt wird, daß man sagt, daß sich zwei einander unendlich nahe liegende Normalen in einem auf der Linie (σ) liegenden Punkte treffen.

Da die Gleichungen der Normale der Fläche (S) im Punkte (x, y, z) nach §. 237 folgende sind:

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0, \qquad (h)$$

so werden die Coordinaten des entsprechenden Punktes (ξ, η, ζ) der Wendungscurve (σ) durch das System der beiden Gleichungen (h) und ihrer Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} -[1 + p(p + qy')] + (\zeta - z)(r + sy') &= 0, \\ -[y' + q(p + qy')] + (\zeta - z)(s + ty') &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (h')$$

gegeben, indem z vermöge der Gleichung der Fläche (S) als eine Function der Veränderlichen x, y und y als eine implicite durch die Zeichnung der Linie (s) oder durch die der Projection dieser Linie auf der Ebene der x, y gegebene Function betrachtet wird. Nun können aber die Gleichungen (h'), welche nur noch die Coordinate ζ enthalten, nicht nebeneinander bestehen, wofern nicht folgende Bedingungsgleichung stattfindet:

$$y'^2[(1 + q^2)s - pqt] + y'[(1 + q^2)r - (1 + p^2)t] - (1 + p^2)s + pqr = 0. \qquad (i)$$

Nachdem man für p, q, r, s, t ihre aus der Gleichung der Fläche (S) abgeleiteten Werthe als Functionen von x, y substituirt hat, ist die Gleichung (i), worin alsdann nur noch die veränderlichen Größen x, y, y' vorkommen, die gemeinschaftliche Differenzialgleichung aller Projectionen der Linien (s) auf die Ebene der x y, welche die Eigenschaft haben, die Flächen (Σ) abwickelbar zu machen, oder nach welchen sich zwei einander unendlich nahe liegende Normalen der Fläche (S) durchschneiden. Wenn man annimmt, daß die Ebene der x y zu der Berührungsebene der Fläche (S) im Punkte (x, y, z) parallel und folglich $p = 0$, $q = 0$ ist; so verwandelt sich die Gleichung (i) in folgende:

$$y'^2 + \frac{r - t}{s} \cdot y' - 1 = 0$$

und unterscheidet sich von der Gleichung (α) nur dadurch, daß y' für α steht, woraus folgt: 1) daß man durch jeden Punkt der Fläche (S) zwei Linien (s_1), (s_2) ziehen kann, welche sich unter einem rechten Winkel durchschneiden und die weiter oben angegebene Eigenschaft haben, und 2) daß die durch die Tangenten dieser Linien gelegten Normalebenen der Fläche (S) mit den Hauptnormalschnitten zusammenfallen. Aus diesem Grunde hat Monge die Linien (s_1), (s_2) **Krümmungslinien** genannt. Auf jeder krummen Fläche, oder auf jedem Theile einer solchen, deren Ordinaten keine Stetigkeitsunterbrechung

von der dritten oder von einer niedrigern Ordnung erfährt, kann man nach dem Vorhergehenden nach Belieben zwei Reihen von Krümmungslinien (s_1), (s_2) beſchreiben, welche die Fläche in krummlinige Vierecke zertheilen, deren ſämmtliche Winkel rechte ſind.

Die Elimination von y' zwiſchen den Gleichungen (h') gibt:

$$(\zeta - z)^2 (rt - s^2) - (\zeta - z)[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] + 1 + p^2 + q^2 = 0 \qquad (h'')$$

und wenn R den Krümmungshalbmeſſer eines Hauptſchnittes bezeichnet, deſſen Mittelpunkt der Durchſchnittspunkt zweier einander unendlich nahe liegender Normalen iſt: ſo hat man:

$$R = \pm\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} = \pm(\zeta - z)\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Die Elimination von $\zeta - z$ zwiſchen dieſen beiden Gleichungen gibt die weiter oben durch eine nicht ganz ſo einfache Rechnung gefundene Gleichung (R) wieder.

§. 285. Die Krümmungslinien ſind in den Punkten, worin ſie ſich ſchneiden, Tangenten an den beiden Hauptdurchſchnitten; allein letztere ſind ebene Curven, deren Ebenen durch die Normale gehen und fallen im Allgemeinen nicht mit den Krümmungslinien zuſammen, welche gewöhnlich nicht in derſelben Ebene liegen.

So iſt z. B. auf einer Rotationsfläche die eine der Krümmungslinien der Durchſchnittskreis der Rotationsfläche mit einer durch den Punkt, durch welchen die Krümmungslinie gehen muß, ſenkrecht auf die Rotationsaxe gelegten Ebene; denn alle durch die auf dem Umfange dieſes Kreiſes liegenden Punkte gezogenen Normalen der Rotationsfläche treffen die Rotationsaxe in demſelben Punkte, woraus auch folgt, daß der zwiſchen der Rotationsaxe und der Rotationsfläche liegende Theil der Normale einer der beiden Hauptkrümmungshalbmeſſer iſt. Aber dieſe Krümmungslinie, obgleich ſie in dem betrachteten Falle eben iſt, fällt doch nicht mit einem Hauptſchnitte zuſammen, weil ihre Ebene nicht durch die Normale geht, wofern dieſe nicht zufällig auf der Rotationsaxe ſenkrecht iſt.

Die andere Krümmungslinie auf einer Rotationsfläche iſt die Meridiancurve, weil die durch die verſchiedenen Punkte dieſer Linie gezogenen Normalen der Rotationsfläche alle in der Meridianebene liegen. Außerdem iſt die Meridiancurve ein Hauptdurchſchnitt der Rotationsfläche, weil die Ebene dieſes Durchſchnittes zugleich die Normale und die Tangente einer der Krümmungslinien enthält. Bei einer Rotationsfläche fällt alſo einer der Hauptſchnitte mit einer der Krümmungslinien zuſammen, und daſſelbe iſt jedesmal der Fall, wenn eine Krümmungslinie eben iſt und ihre Ebene durch die Normale der Rotationsfläche geht. So fallen z. B. bei den cylindriſchen Flächen die Hauptſchnitte, wovon der eine der gerade Durchſchnitt und der andere die gerade Erzeugungslinie iſt, reſp. mit den Krümmungslinien zuſammen.

§. 286. Die Gleichung (i) wird identiſch und man kann daraus keinen beſtimmten Werth von y' mehr ableiten, wenn die drei Gleichungen ſtattfinden:

$$(1 + p^2)s - pqr = 0,\ (1 + p^2)t - (1 + q^2)r = 0,\ (1 + q^2)s - pqt = 0,$$

wovon die dritte eine Folge aus den beiden andern iſt, und welche mit dem Syſteme (f) gleichbedeutend ſind, ſo daß die Punkte der krummen Fläche, für welche dieſer Umſtand ſtattfindet, nichts anders als Nabelpunkte ſind.

Wenn die Gleichung (i) identiſch gemacht wird, ſo wird die Normale im Punkte (x, y, z) von der durch einen unendlich nahe liegenden Punkt gehenden Normale immer geſchnitten, in welcher Richtung dieſer zweite Punkt

auch genommen werden mag; aber daraus darf man nicht ſchließen, daß der Nabelpunkt ein Punkt iſt, worin ſich unendlich viele Krümmungslinien durchkreuzen, oder daß die durch den Nabelpunkt in der Berührungsebene gezogenen geraden Linien alle an den Krümmungslinien tangent ſind. Wir wollen der Kürze wegen die Gleichung (i) auf folgende Form bringen:

$$\varphi \cdot y'^2 + \psi \cdot y' + \omega = 0,$$

wo φ, ψ, ω, Functionen von x, y bezeichnen, welche verſchwinden, wenn der Punkt (x, y, z) ein Nabelpunkt iſt. Die Differenzirung der Gleichung (i) gibt zur Beſtimmung von y' folgende Gleichung des dritten Grades:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}y'\right)y'^2 + \left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}y'\right)y' + \frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy}y' = 0.$$

Je nachdem dieſe Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, oder nicht, gehen durch den Nabelpunkt drei Krümmungslinien, oder nur eine einzige. Wenn dieſe letzte Gleichung für die dem Nabelpunkte entſprechenden Werthe von x, y ebenfalls identiſch gemacht wird, ſo differenzirt man ſie ebenfalls, wodurch man eine Gleichung des vierten Grades von y' erhält, und je nachdem dieſe neue Gleichung vier, oder zwei reelle, oder nur imaginäre Wurzeln hat, iſt der Nabelpunkt ein Durchſchnittspunkt von vier, oder zwei Krümmungslinien, oder es geht gar keine Krümmungslinie durch dieſen Punkt, u. ſ. f. Wenn endlich die dem Nabelpunkte entſprechenden Werthe von x, y die Gleichung (i) und alle ihre Ableitungen identiſch machen, ſo iſt der Nabelpunkt ein Punkt, worin ſich nach allen Richtungen Krümmungslinien durchkreuzen. Dieſer Fall findet bei den Scheiteln der Rotationsflächen ſtatt, welche offenbar, wenn ſie keine vorſpringenden Punkte ſind, die charakteriſtiſche Eigenſchaft der Nabelpunkte darbieten, und worin ſich alle Meridiane, welche Krümmungslinien dieſer Flächen ſind, durchſchneiden.

§. 287. Wir wollen das Vorhergehende auf das in §. 283 erwähnte Ellipſoid anwenden, ſo verwandelt ſich die Gleichung (i) in folgende:

$$Axyy'^2 + (x^2 - Ay^2 - B)y' - xy = 0 \qquad (10)$$

und ihre Ableitung iſt:

$$(2Axy' + x^2 - Ay^2 - B)y'' + Axy'^3 + Ayy'^2 + (x - 2Ay)y' - y = 0,$$

welche Gleichung ſich für die den Nabelpunkten entſprechenden Werthe $y = 0$, $x = \pm\sqrt{B}$ auf $Ay'^3 + y' = 0$ reducirt. Dieſe letzte Gleichung geſtattet nur die eine reelle Wurzel $y' = 0$, weil A einen poſitiven Coefficienten bezeichnet. Es geht alſo nur eine Krümmungslinie durch die Nabelpunkte des Ellipſoides mit drei ungleichen Axen, und dieſe Linie iſt der Durchſchnitt, welcher die größte und kleinſte Axe enthält.

Wenn man $a = b$ ſetzt, in welchem Falle das Ellipſoid ein Rotationsellipſoid um ſeine zur Axe der z genommene kleine Axe wird; ſo hat man $A = 1$, $B = 0$, und die Coordinaten der Nabelpunkte ſind $x = 0$, $y = 0$, weil in der That dieſe Punkte mit den Polen des abgeplatteten Ellipſoides zuſammenfallen. Die Gleichung (10) kann alsdann auf folgende Form gebracht werden:

$$(yy' + x)(xy' - y) = 0,$$

und ſie zerfällt in die beiden folgenden:

$$yy' + x = 0, \quad xy' - y = 0.$$

Für $x = 0$, $y = 0$ iſt der durch die erſte der beiden letzten Gleichungen gegebene Werth von y' imaginär (§. 182) und der Werth, welchen die zweite

Gleichung gibt, iſt wirklich unbeſtimmt, was auch der Fall ſein muß, weil alle Meridiane, welche ſich auf die Ebene der x y nach geraden Linien projiciren, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen, eben ſo viele Krümmungslinien des Ellipſoides ſind.

Wenn man $b = c$ ſetzt, in welchem Falle das Ellipſoid ein Rotationsellipſoid um ſeine zur Axe der x genommene große Axe wird, ſo hat man $A = 0$, $B = a^2$ und die Gleichung (10) zerfällt in die beiden folgenden:

$$y' = \infty\,, \quad (x^2 - a^2)\,y' - xy = 0\,.$$

Wenn man in die Ableitung der vorhergehenden Gleichung die Werthe der Coordinaten der Pole oder der Nabelpunkte, nämlich $x = \pm a$, $y = 0$ einführt, ſo ergibt ſich daraus $y' = 0$, und folglich hat y' in dieſen Punkten nur die beiden Werthe 0, ∞. In der That projiciren ſich die Meridiane auf die Ebene der x y nach Ellipſen, welche alle die Axe der x ſenkrecht durchſchneiden, mit Ausnahme des Meridianes, deſſen Projection die Axe der x ſelbſt iſt.

§. 288. Wenn die krumme Fläche ſinguläre Punkte hat, für welche r, s, t Functionen von y' werden, wie bereits wiederholt erklärt iſt, ſo bleibt die Gleichung (i) in Beziehung auf die Unbekannte y' für die in Rede ſtehenden ſingulären Punkte keine algebraiſche Gleichung des zweiten Grades mehr und kann eine beliebige Anzahl reeller Wurzeln haben.

§. 289. Den beiden Syſtemen der aufeinander ſenkrechten Krümmungslinien (s_1), (s_2) entſprechen zwei Syſteme abwickelbarer Flächen (Σ_1), (Σ_2) und Rückkehrkanten oder Wendungscurven (σ_1), (σ_2). (§. 284.) Der geometriſche Ort der Rückkehrkanten des erſten Syſtemes iſt eine gewiſſe Fläche und der der Rückkehrkanten des zweiten Syſtemes eine andere Fläche, oder vielmehr, die beiden Syſteme abwickelbarer Flächen haben zuſammengenommen zum geometriſchen Orte ihrer Rückkehrkanten eine Fläche mit zwei Fächern (σ_1, σ_2), wo ſich jedes Fach auf jedes der rechtwinkligen Syſteme bezieht.

Um die Gleichung dieſer Fläche mit zwei Fächern, welche auch der geometriſche Ort der Krümmungsmittelpunkte der Hauptſchnitte der Fläche (S) iſt, zwiſchen ξ, η, ζ zu erhalten, müßte man x, y, z zwiſchen den Gleichungen (h), (h'') und der Gleichung der Fläche (S) eliminiren.

Da jeder Hauptkrümmungshalbmeſſer eine der Rückkehrkanten berührt, ſo berührt derſelbe auch die Fläche, welche der geometriſche Ort aller dieſer Rückkehrkanten iſt. Die Fläche der Hauptkrümmungsmittelpunkte iſt folglich gegen die urſprüngliche Fläche daſſelbe, wie die Evolute einer ebenen Curve gegen die Evolvente.

Da die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte für denſelben Punkt der Fläche (S) auf derſelben Normale liegen, ſo folgt, daß jede Normale der Fläche (S) jedes der beiden Fächer der Fläche (σ_1, σ_2) berührt. Wenn man durch dieſe Normale zwei Berührungsebenen an die beiden Fächer der Fläche (σ_1, σ_2) legt, ſo ſind dieſe beiden Ebenen vermöge der Haupteigenſchaft der Krümmungslinien aufeinander ſenkrecht. Die beiden Fächer der Fläche der Krümmungsmittelpunkte haben alſo ſolche Formverhältniſſe gegen einander, daß ihre *ſcheinbaren Umriſſe*, von irgend einem Punkte O aus betrachtet, ſich unter rechten Winkeln durchſchneiden. Denn die ſcheinbaren Umriſſe der beiden Fächer der Fläche (σ_1, σ_2) ſind die Berührungslinien dieſer Fächer mit den umſchriebenen Kegelflächen, deren Spitzen im Punkte O liegen. Nun haben aber dieſe beiden Kegelflächen eine gemeinſchaftliche Erzeugungslinie, welche die durch den Punkt O der Fläche (S) gehende Nor-

male ist und ihre Berührungsebenen nach dieser Erzeugungslinie sind aufeinander senkrecht.

3) Osculation der krummen Flächen. — Definition und Maß der Krümmung der Flächen.

§. 290. Zwei Flächen:

$$z = f(x, y), \quad (z) \qquad z = f_1(x, y), \quad (z_1)$$

welche einen gemeinschaftlichen Punkt (x, y, z) haben, haben in diesem Punkte eine Berührung der ersten Ordnung (§. 203), wenn die Coordinaten x, y, z den Gleichungen:

$$p = p_1, \quad q = q_1 \tag{11}$$

genügen, oder wenn die beiden Flächen in dem gemeinschaftlichen Punkte eine gemeinschaftliche Tangente haben. Wenn außerdem die Gleichungen:

$$r = r_1, \quad s = s_1, \quad t = t_1 \tag{12}$$

stattfinden, so findet zwischen den beiden Flächen eine Berührung der zweiten Ordnung oder eine Osculation statt. Allgemein, die Berührung heißt von der n^{ten} Ordnung, wenn alle partielle Ableitungen $p, q, r, \ldots$ der Gleichungen der beiden Flächen bis zu der Ableitung von der n^{ten} Ordnung incl. für dasselbe System der Werthe der Coordinaten x, y, z dieselben Werthe annehmen für die beiden betrachteten Flächen.

Wenn die Flächen keine Stetigkeitsunterbrechungen von der $(n+1)^{ten}$ oder von einer niedrigern Ordnung erfahren, und wenn $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ sehr kleine Größen der ersten Ordnung bezeichnen; so ist die Entfernung des Punktes $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, welcher auf der einen Fläche liegt, von der andern Fläche im Allgemeinen eine sehr kleine Größe von der $(n+1)^{ten}$ Ordnung, wenn die zwischen den beiden Flächen stattfindende Berührung von der n^{ten} Ordnung ist. Den Beweis dieses Lehrsatzes wollen wir der Kürze wegen übergehen, weil er sich leicht herstellen läßt, wenn man das im §. 240 Gesagte mit dem, was im §. 203 und folg. gesagt ist, vergleicht.

Im Interesse der geometrischen Anwendungen genügt es, wenn wir hier blos die Berührungen der beiden ersten Ordnungen, d. h. die einfache Berührung und die Osculation zwischen krummen Flächen betrachten. *)

§. 291. Wir wollen an die Fläche (z) in dem Punkte (x, y, z) eine Berührungsebene legen, und die krumme Fläche mit einer auf dieser Ebene senkrechten Ebene durchschneiden. Der Einfachheit wegen kann man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Berührungspunkt legen und die Ebene der xy mit der Berührungsebene zusammen fallen lassen. Es sei Δz die Ordinate der schneidenden Ebene und $\Delta x, \Delta y$ seien die Coordinaten in der Ebene der xy der Punkte, worin sie die krumme Fläche trifft; so hat man, wenn man $\Delta x, \Delta y$ als sehr kleine Größen der ersten Ordnung betrachtet und die sehr kleinen Größen der dritten Ordnung unberücksichtigt läßt:

$$\Delta z = \tfrac{1}{2} r \Delta x^2 + s \Delta x \Delta y + \tfrac{1}{2} t \Delta y^2. \tag{13}$$

Wir wollen $\Delta x = \varepsilon\xi$, $\Delta y = e\eta$, setzen, wo e eine sehr kleine Größe der ersten Ordnung bezeichnet, so muß man, da Δz nach der Gleichung

*) Wegen der Berührungen höherer Ordnungen vergleiche man eine Abhandlung von Olivier in dem Journal de l'École polytechnique. 25e cahier. p. 123.

(13) von der zweiten Ordnung ist, $\Delta_2 = e^2 k$ setzen, und alsdann gibt diese Gleichung:

$$2k = r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2. \qquad (k)$$

Wenn also Δ_2 ohne Ende abnimmt, so wird die Durchschnittscurve der Curve, für welche ξ, η die veränderlichen Coordinaten in Beziehung auf die Axen der x und der y sind, und deren Gleichung die Gleichung (k) ist, immer mehr und mehr ähnlich, oder mit andern Worten: die Durchschnittscurve wird dem in §. 279 erwähnten Hülfskegelschnitte, dessen Radienvectoren den Quadratwurzeln aus den Krümmungshalbmessern der Normalschnitte, deren Ebenen die Berührungsebene nach diesen Radienvectoren durchschneiden, immer mehr und mehr ähnlich.

Wegen dieses Umstandes hat C. Dupin die Durchschnittscurve der krummen Fläche mit einer in einer unendlich kleinen Entfernung vom Berührungspunkte zur Berührungsebene parallel gelegten Ebene die Indicatrix oder anzeigende Curve genannt. Diese Indicatrix ist eine Ellipse, wenn die krumme Fläche ihre Krümmung ganz um die Berührungsebene herum nach derselben Seite kehrt, und im entgegengesetzten Falle entspringen die beiden conjugirten Hyperbeln, welche an die Stelle der Ellipse treten, aus dem Durchschnitte der krummen Fläche mit zwei einander unendlich nahe liegenden Ebenen, welche beide zu der Berührungsebene parallel sind und diese zwischen sich fassen.

Die anzeigende Ellipse wird in den Nabelpunkten ein Kreis, und aus diesem Grunde sind die Berührungsebenen in den Nabelpunkten des Ellipsoides zu den Ebenen parallel, welche die Eigenschaft haben, das Ellipsoid nach Kreisen zu durchschneiden (§. 283).

§. 292. Wenn die krumme Fläche (z_1) drei willkührliche Parameter hat, so kann man diese so annehmen, daß die Bedingung $f(x, y) = f_1(x, y)$ und außerdem die Gleichungen (11) erfüllt werden, oder daß zwischen den beiden Flächen (z), (z_1) im Punkte (x, y, z) eine einfache Berührung stattfindet. Wenn in der Gleichung (z_1) sechs willkührliche Parameter vorkommen, so kann man sie so annehmen, daß auch den Gleichungen (12) genügt wird, oder daß zwischen den beiden Flächen eine Osculation stattfindet. Man kann also im Allgemeinen keine Kugel bestimmen, welche eine gegebene krumme Fläche in einem gegebenen Punkte osculirt; denn die allgemeinste Gleichung der Kugelfläche enthält nur vier willkührliche Parameter, nämlich den Halbmesser und die drei Coordinaten des Mittelpunktes.

Die Bedingungen der Osculation zwischen zwei krummen Flächen (z), (z_1) werden analytisch durch das System der Gleichungen (11) und (12) ausgedrückt; allein es ist zweckmäßiger, diese Bedingungen geometrisch auszudrücken, indem man sagt: daß zwei Flächen einander osculiren, wenn sie außer einem gemeinschaftlichen Punkte nicht blos dieselbe Berührungsebene, sondern auch ihre Hauptdurchschnitte in denselben Normalebenen und dieselben Hauptkrümmungshalbmesser in demselben Sinne gegen die Berührungsebene haben. Nach allem in diesem Kapitel Gesagten ist einleuchtend, daß sich das Stattfinden dieser geometrischen Relationen aus den Gleichungen (11) und (12) ergibt, und wenn sie stattfinden, so schneidet jede durch den gemeinschaftlichen Punkt gelegte Ebene die beiden Flächen nach zwei Linien, welche in diesem Punkte denselben Krümmungshalbmesser haben.

Wenn also die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche (z) nach demselben Sinne gerichtet sind, so kann man immer ein Rotationsellipsoid construiren, welches diese Fläche im Punkte (x, y, z) osculirt; denn man kann es so einrichten, daß einer der Meridiandurchschnitte des Ellipsoides in die Ebene eines Hauptschnittes der osculirten Fläche fällt, indem eine der

Axen der Meridianellipse mit der Normale zusammenfällt, worauf man den Axen der Meridianellipse nur solche Längen zu geben braucht, daß die Hauptkrümmungshalbmesser für die osculirte Fläche und für das Ellipsoid dieselben sind, und zwar gibt diese Construktion zwei osculirende Ellipsoide, wovon das eine ein längliges und das andere ein abgeplattetes ist.

Wenn die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der krummen Fläche nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind, so kann man für das Osculationsellipsoid ein Rotationshyperboloid mit einem Fache substituiren, dessen Kehlkreis (§. 239) in die Ebene eines Hauptschnittes der Fläche fällt.

Noch einfacher kann man eine Rotationsfläche beschreiben, welche eine gegebene krumme Fläche osculirt, wenn man den Krümmungskreis eines Hauptschnittes der krummen Fläche sich um eine in seiner Ebene senkrecht auf die Normale gezogene und durch den Krümmungsmittelpunkt des andern Hauptschnittes gehende Axe drehen läßt. Die osculirende Fläche wird ein gerader Cylinder mit kreisförmiger Basis, wenn der Halbmesser des Krümmungskreises des ersten Hauptschnittes unendlich wird, wie dieses bei den abwickelbaren Flächen der Fall ist (§. 281).

§. 293. Dieses führt uns auf die Definition und das Maß der Krümmung einer Fläche nach Gauß; denn man hat für diese Größe weder eine genaue Definition, noch ein entsprechendes Maß, so lange man blos nach den Lehrsätzen von Meusnier und Euler die Relationen angibt, welche zwischen den Krümmungen der auf der krummen Fläche beschriebenen Linien stattfinden.

Erinnern wir uns zunächst in aller Kürze an das Maß der Krümmung ebener Curven wieder. Auf der Curve, deren Krümmung man im Punkte m messen will, wollen wir einen durch diesen Punkt gehenden Bogen Δs nehmen, in den Endpunkten dieses Bogens zwei Normalen ziehen, und nachdem in der Ebene der Curve ein Kreis von dem Halbmesser $= 1$ beschrieben ist, zwei Halbmesser ziehen, welche resp. zu den erwähnten Normalen parallel sind und einen Kreisbogen $\Delta\tau$ zwischen sich fassen; so ist nach §. 193 das Verhältniß $\frac{d\tau}{ds}$ die Grenze, gegen welche das Verhältniß $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ convergirt, wenn der Bogen Δs ohne Ende abnimmt, dabei aber immer den Punkt m enthält, und diese Grenze ist das Maß der Krümmung der Linie im Punkte m.

Eine ganz ähnliche Construction ist auf die krummen Flächen anwendbar; denn wir wollen uns auf der krummen Fläche, deren Krümmung im Punkte m gemessen werden soll, eine geschlossene Linie so beschrieben denken, daß der auf der Fläche von dieser Curve eingeschlossene Flächenraum ω den Punkt m enthält, wo, wie im sechsten Kapitel des fünften Buches ausführlich gezeigt werden wird, unter der erwähnten Flächengröße die Grenze zu verstehen ist, welcher sich der Inhalt oder die Größe einer in oder um den betrachteten Theil der krummen Fläche beschriebenen polyedrischen Fläche ohne Ende nähert, wenn die Anzahl der ebenen Flächen des Polyeders ohne Ende zu- und ihre Dimensionen ohne Ende abnehmen. Diese Definition der Größe ω ist also der der Größe s in §. 174 ganz analog. Aus einem beliebigen Punkte des Raumes als Mittelpunkt wollen wir uns mit einem Halbmesser $= 1$ eine Kugelfläche beschrieben denken und die Halbmesser ziehen, welche zu allen auf dem Umfange der Flächengröße ω normal auf der krummen Fläche gezogenen geraden Linien parallel sind; so ist der geometrische Ort dieser Halbmesser eine Kegelfläche, welche auf der Kugelfläche ein Flächenstück θ abschneidet, und die Grenze, gegen welche das Verhältniß $\frac{\theta}{\omega}$ convergirt, wenn die Flä-

chengröße ω ohne Ende abnimmt, aber immer den Punkt m enthält, muß nach der Analogie als Maß der Krümmung der krummen Fläche im Punkte m betrachtet werden. Um jede Schwierigkeit zu vermeiden, wollen wir zunächst annehmen, daß von einer krummen Fläche die Rede sei, deren beide Hauptkrümmungshalbmesser nach demselben Sinne gerichtet sind, und welche außerdem im Punkte m keine Stetigkeitsunterbrechungen erfährt.

So wie man bei der Messung der Krümmung einer ebenen Curve für diese ihren Krümmungskreis, oder jede andere sie osculirende Curve substituiren kann, ebenso kann man bei der Messung der Krümmung einer krummen Fläche für diese eine andere Fläche substituiren, welche die gegebene in dem Punkte osculirt, für welchen das Maß der Krümmung bestimmt werden soll.

Wir wollen für die osculirende Fläche die nehmen, welche der Kreis von dem Halbmesser R_2 beschreibt, indem er sich um eine in seiner Ebene senkrecht auf die Normale durch den Mittelpunkt des Kreises von dem Halbmesser R_1 gezogene gerade Linie dreht. Es sei ds_1 der unendlich kleine Winkel, welchen die Ebene des beweglichen Kreises in jeder seiner äußersten Lagen mit der Ebene des Normalschnittes bildet, worauf sie ursprünglich lag, indem die Excursion der beweglichen Ebene zu beiden Seiten der Ebene des Normalschnittes dieselbe Amplitude hat. Es sei ferner ds_2 der unendlich kleine Winkel, welchen zwei Halbmesser des Kreises von dem Halbmesser R_2 mit der Normale zu beiden Seiten dieser geraden Linie in der Ebene dieses Kreises bilden; so fällt die unendlich klein gewordene Fläche ω mit dem unendlich kleinen Rechtecke zusammen, dessen Seiten $2R_1 ds_1$, $2R_2 ds_2$ sind und dessen Fläche folglich gleich $4R_1R_2 ds_1 ds_2$ ist. Ferner wird die entsprechende Fläche θ, indem wieder die unendlich kleinen Größen höherer Ordnungen unberücksichtigt bleiben, ausgedrückt durch $4ds_1 ds_2$, und man hat folglich:

$$\lim. \frac{\theta}{\omega} = \frac{1}{R_1 R_2}, \qquad (1)$$

d. h. die Krümmung einer Fläche hat das Product der Krümmungen ihrer beiden Hauptschnitte zum Maße.

Die Fläche θ geht in einen Punkt über, wenn die endliche, oder unendlich kleine Fläche ω auf einer Ebene genommen wird, und sie wird ein Theil des Umfanges eines größten Kreises, wenn die endliche, oder unendlich kleine Fläche ω einer cylindrischen Fläche angehört. Durch diese Bemerkung wird die Schwierigkeit beseitigt, welche daraus entspringen könnte, daß nach der Formel (1) eine abwickelbare Fläche, für welche einer der Krümmungshalbmesser R_1, R_2 immer unendlich ist (§. 281 und §. 292), in allen ihren Punkten eine Krümmung gleich Null hätte, welche Eigenschaft nur der Ebene zuzukommen scheint. Die Ebene, die abwickelbaren und die übrigen krummen Flächen sind hinsichtlich der Krümmung ebenso wenig mit einander vergleichbar, wie ein Punkt, eine Linie und eine Fläche hinsichtlich der Größe. Man kann auch sagen: daß die Krümmung einer abwickelbaren Fläche ein unendlich Kleines der ersten Ordnung und die einer Ebene ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist; d. h. die Krümmung einer Fläche ist eine sehr kleine Größe der ersten, oder zweiten Ordnung, wenn sie nahezu mit einem Cylinder oder mit einer Ebene zusammenfällt. Der Ausdruck für die Krümmung einer Fläche nimmt das positive, oder negative Zeichen an, je nachdem die beiden Hauptkrümmungshalbmesser nach demselben, oder nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind. Diese Veränderung des Zeichens ist willkührlich und gestattet keine natürliche Interpretation, wie bei der Krümmung einer Linie, wenn sich der Sinn dieser Krümmung wirklich ändert. Allein dieser Umstand ist gegen die aufzustellende Analogie kein gegründeter Einwurf, sondern vielmehr eine

Bestätigung derselben; denn bekanntlich sind die Regeln zur Interpretation der Zeichen auf Coordinaten, die von einem festen Anfangspunkte aus gezählt werden, und auf ihre Differenziale anwendbar; aber sie sind auf Flächen, welche durch Producte dieser Coordinaten oder ihrer Differenzialelemente ausgedrückt werden, nur vermöge willkührlicher Conventionen anwendbar.

Sophie Germain hat in ihren Untersuchungen über die elastischen Flächen, und namentlich in einer Abhandlung *), welche das letzte schriftstellerische Product dieser merkwürdigen Frau ist, darzuthun gesucht, daß die Krümmung einer Fläche die Function $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ zum Maße habe; allein ihre Gründe sind nicht überzeugend und das Maß der Krümmung, welches sie vorschlägt, ist in der That nichts weiter, als eine rein willkührliche Definition, während der Satz von Gauß, welcher durch alle geometrischen Analogien angedeutet und bestätigt wird, ein wahres Fundamentaltheorem ist, woraus wichtige Folgerungen fließen können, und welches seiner Eleganz und Einfachheit wegen auch in die Elemente aufgenommen zu werden verdient.

*) Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Band VII., S. 1.

Druckfehler und Verbeſſerungen.

Seite	7	Zeile	5	von unten	lies	x ſich ſtatt x
„	10	„	1	„ „	„	Aufgabe ſtatt Aufgaben
„	12	„	3	„ „	„	Schwingungsdauer beſtimmt, d. h. wir betrachten die Veränderung derſelben .....
„	18	„	8	„ „	„	Gliede ſt. Grade
„	22	„	26	„ „	„	anſetzt ſt. verſetzt
„	23	„	14	„ „	„	eine ſt. einer
„	—	„	4	„ „	iſt	„ab" zu ſtreichen
„	24	„	7	von oben	lies	welchen ſt. welchem
„	—	„	25	„ „	„	eine ſt. einer
„	26	„	13	„ „	„	die Ergänzung für die ſt. die
„	28	„	8	von unten	„	Null ſein ſt. Null
„	33	„	8	von oben	„	aus gemeſſen
„	43	„	20	„ „	„	ſind ſt. iſt
„	60	„	13	„ „	„	$\psi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x)$
„	61	„	15	von unten	„	die inverſe Function,
„	68	„	15	von oben	„	y ſt. Y .
„	72	„	1	von unten	„	$\frac{dx}{dy}$ ſt. $\frac{dy}{dx}$
„	74	„	8	von oben	„	Vergleiche
„	92	„	3	von unten	„	dieſelben ſt. die halben
„	95	„	17	von oben	„	berührt (Fig. 30)
„	97	„	4	„ „	„	$b^{-\frac{1}{x}n'}$ ſt. $b^{-\frac{1}{x}n}$
„	—	„	12	„ „	„	der der ſt. der
„	98	„	1	von unten	„	läßt, zu ſuchen.
„	100	„	17	„ „	„	Ueberdies iſt klar,
„	102	„	19	von oben	„	erwärmt wird,
„	104	„	3	von unten	„	(a) ſt. (G)
„	106	„	14, 15	„ „	„	ψ ſt. φ
„	118	„	8	„ „	„	f ſt. f'
„	123	„	7	„ „	„	$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x\sqrt{-1}} + \frac{1}{1+x\sqrt{-1}}\right]$
„	126	„	7	„ „	„	Unterſuchung ſt. Urſachen
„	132	„	8	„ „	„	ſondern ſt. allein, und dieſe ſt. dieſen
„	136	„	1	„ „	„	Functionen ſt. Function
„	139	„	6	von oben	„	rechtwinklig
„	143	„	24	„ „	„	v zu ſt. zu
„	146	„	14	von unten	„	daß man
„	148	„	10	„ „	„	Gleichungen, wovon zwei identiſch ſind;
„	171	„	8	„ „	„	Verbindung
„	179	„	8, 12	von oben	„	$d[u.d^{n-1}[$ ſt. $[d u.[d^{n-1}$
„	183	„	21	von unten	„	Werth von y''
„	184	„	18	„ „	„	zwiſchen x ſt. x
„	194	„	17	von oben	„	$\xi - x$ ſt. $-x$
„	202	„	2	von unten	„	Hypotenuſe
„	211	„	2	„ „	„	umhüllten
„	—	„	3	„ „	iſt	ſie zu ſtreichen

§. 303. Wir wollen alſo annehmen, daß das Integral:

$$\int \frac{Fx\,dx}{R} \qquad (g)$$

immer von einem andern Integrale:

$$\int \frac{F_1 t\,dt}{R_1}$$

abhängig gemacht iſt, wo $R_1{}^2$ ein Polynom des vierten Grades von t iſt, worin die ungeraden Potenzen der veränderlichen Größe nicht vorkommen, oder, was auf daſſelbe hinausläuft, wir wollen annehmen, daß die in dem Integrale (g) vorkommende Wurzelgröße R keine ungeraden Potenzen von x enthält.

Man kann ſogar annehmen, daß die rationale Function Fx ebenfalls eine paare iſt, d. h. keine ungeraden Potenzen der veränderlichen Größe enthält; denn wenn ſie eine impaare wäre, ſo wäre ihre allgemeinſte Form:

$$\frac{\theta + x\omega}{\Theta + x\Omega},$$

wo θ, ω, Θ, Ω paare Functionen von x bezeichnen. Man erhielte alſo durch eine ähnliche Transformation wie die im §. 301:

$$\int \frac{Fx\,dx}{R} = \int \left(\frac{\theta\Theta - \omega\Omega}{\Theta^2 - x^2\Omega^2}\right) \cdot \frac{dx}{R} + \int \left(\frac{\omega\Theta - \theta\Omega}{\Theta^2 - x^2\Omega^2}\right) \cdot \frac{x\,dx}{R}.$$

Nun enthält aber in dem erſten Integrale des zweiten Theiles dieſer Gleichung die mit $\frac{dx}{R}$ multiplicirte Function nur gerade Potenzen von x, und wenn man in dem zweiten Integrale $x^2 = t$ ſetzt; ſo verwandelt ſich die Function unter dem Zeichen $\int$ in eine Function von der Form:

$$\frac{F_1 t\,dt}{\sqrt{a_1 + b_1 t + c_1 t^2}}$$

und kann nach Abſchnitt II. rational gemacht werden.

§. 304. Wir behaupten ferner, daß man, ohne die Allgemeinheit der in Rede ſtehenden Aufgabe, welche in der Beſtimmung des Integrals (g) beſteht, zu beſchränken, annehmen darf, daß das Polynom R^2 von der Form:

$$R^2 = (1 \pm p^2 x^2)(1 \pm q^2 x^2) \qquad (R)$$

iſt, wo die Glieder p^2x^2, q^2x^2 daſſelbe poſitive oder negative Zeichen haben müſſen.

Denn da R^2 keine ungeraden Potenzen von x enthält und ein Polynom des vierten Grades immer in reelle Factoren des zweiten Grades werden kann, ſo darf man ſetzen:

$$R^2 = (m + nx^2)(m' + n'x^2),$$

wo m, n, m', n' reelle Größen bezeichnen. Wenn man alſo:

$$t = \frac{xR}{m(m' + n'x^2)} = \frac{x}{m}\sqrt{\frac{m + nx^2}{m' + n'x^2}}$$

ſetzt, ſo iſt die veränderliche Größe t mit x zugleich reell. Aus dieſen Gleichungen folgt:

$$x^2 = \frac{n'm^2t^2 - m \pm m\sqrt{1 + 2(2m'n - mn')t^2 + m^2n'^2t^4}}{2n}$$

$$\frac{dx}{R} = \frac{xdx}{mt(m' + n'x^2)} = \frac{mdt}{m + 2nx^2 - n'm^2t^2}$$
$$= \pm \frac{dt}{\sqrt{1+2(2m'n-mn')t^2 + m^2n'^2t^4}}$$

Setzen wir nun:

$$p^2 + q^2 = \pm 2(2m'n - mn'), \quad p^2q^2 = m^2n'^2,$$

ſo kommt:

$$p^2 = \pm(2m'n - mn') + 2\sqrt{m'n(m'n - mn')}$$
$$q^2 = \pm(2m'n - mn') - 2\sqrt{m'n(m'n - mn')},$$

woraus nach einer bekannten algebraiſchen Formel folgt:

$$p = \sqrt{\pm m'n} + \sqrt{\pm(m'n - mn')}$$
$$q = \sqrt{\pm m'n} - \sqrt{\pm(m'n - mn')}.$$

Man kann das Zeichen ſo wählen, daß die Wurzelgröße: $\sqrt{\pm m'n}$ reell wird, und wenn man, wie es erlaubt iſt, annimmt, daß

$$\left(\frac{m'}{n'}\right)^2 > \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

iſt, ſo wird die zweite in den Werthen von p und q vorkommende Wurzelgröße ebenfalls reell.

Man erhält alſo:

$$x^2 = \frac{n'm^2t^2 - m \pm m\sqrt{(1 \pm p^2t^2)(1 \pm q^2t^2)}}{2n},$$

$$\frac{dx}{R} = \pm \frac{dt}{\sqrt{(1 \pm p^2t^2)(1 \pm q^2t^2)}}.$$

Wenn man dieſe Werthe in die Function:

$$\frac{F(x^2)dx}{R} \qquad (h)$$

ſubſtituirt, ſo wird ſie auf die Form:

$$\frac{F_1(t^2)dt}{\sqrt{(1 \pm p^2t^2)(1 \pm q^2t^2)}}$$

gebracht, oder, was daſſelbe iſt, man kann annehmen, daß die Wurzelgröße in der Function (h) die durch die Gleichung (R) angegebene Form hat.

§. 305. Die Function F kann ganz oder gebrochen ſein, und wir wollen zuvörderſt annehmen, daß ſie ganz iſt, ſo daß es darauf ankommt, eine Summe von Integralen von der Form:

$$A_i \int \frac{x^{2i}dx}{R} \qquad (i)$$

zu erhalten. Setzt man der Kürze wegen:

$$R^2 = (1 \pm p^2x^2).(1 \pm q^2x^2) = 1 + rx^2 + sx^4:$$

ſo hat man identiſch:

$$\frac{d \cdot Rx^{2i-3}}{dx} = (2i-3)\,Rx^{2i-4} + \frac{(r + 2sx^2)\,x^{2i-2}}{R}$$

$$= \frac{1}{R}\left[(2i-3)R^2x^{2i-4} + (r+2ax^2)x^{2i-3}\right]$$

$$= \frac{1}{R}\left[(2i-3)x^{2i-4} + (2i-2)rx^{2i-2} + (2i-1)sx^{2i}\right]$$

und folglich:

$$Rx^{2i-3} + \text{const.} = (2i-3)\int\frac{x^{2i-4}dx}{R} + (2i-2)r\int\frac{x^{2i-2}dx}{R} + (2i-2)s\int\frac{x^{2i}dx}{R}.$$

Das Integral (i) iſt folglich von zwei andern Integralen von derſelben Form:

$$\int\frac{x^{2i-2}dx}{R}, \quad \int\frac{x^{2i-4}dx}{R}$$

abhängig gemacht, und da man auf dieſelbe Weiſe weiter fortfahren kann, ſo folgt, daß die Beſtimmung des Integrales (i) für jeden Werth von i zuletzt von der der beiden Integrale:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1\pm p^2x^2)(1\pm q^2x^2)}} \qquad (A)$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1\pm p^2x^2)(1\pm q^2x^2)}} \qquad (B)$$

abhängt.

Wenn die Function $F(x^2)$ eine gebrochene iſt, ſo führt man ſie durch Diviſion zum Theil auf eine ganze zurück, und wenn der Reſt der Diviſion alsdann in Partialbrüche zerlegt wird (l.), ſo hat man blos eine Reihe von Integralen von der Form:

$$A_i\int\frac{dx}{(x^2+a)^iR} \qquad (j)$$

zu beſtimmen.

Nun hat man aber identiſch:

$$\frac{d\left(\frac{Rx}{(x^2+a)^{i-1}}\right)}{dx} = \frac{(1+2rx^2+3sx^4)(x^2+a) - 2(i-1)(1+rx^2+sx^4)x^2}{(x^2+a)^iR},$$

und außerdem kann man ſetzen:

$$\frac{(1+2rx^2+3sx^4)(x^2+a) - 2(i-1)(1+rx^2+sx^4)x^2}{(x^2+a)^i} = \frac{g}{(x^2+2)^{i-3}} + \frac{h}{(x^2+a)^{i-2}} + \frac{k}{(x^2+a)^{i-1}} + \frac{l}{(x^2+a)^i},$$

wo g, h, k, l Coefficienten ſind, welche man leicht beſtimmt, wenn man die beiden Theile der vorhergehenden Gleichung identificirt, und welche folgende Werthe haben:

$$g = -(2i-5)s, \quad h = -(2i-4)(r-3as),$$
$$k = -(2i-3)(3a^2s - 2ar + 1), \quad l = (2i-2)(a^3r - a^2r + a).$$

Es ist also:

$$\frac{Rx}{(x^2+a)^{i-1}} + \text{const.} = g\int\frac{dx}{(x^2+a)^{i-3}R} + h\int\frac{dx}{(x^2+a)^{i-2}R} + k\int\frac{dx}{(x^2+a)^{i-1}R} + l\int\frac{dx}{(x^2+a)^{i}R}.$$

Vermöge dieser letzten Formel und durch eine successive Wiederholung einer ähnlichen Rechnung, wie die eben für das Integral (i) angegebene, wird die Bestimmung des Integrales (j) auf die der beiden Integrale (A), (B) und eines dritten Integrales:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a)\sqrt{(1\pm p^2x^2)(1\pm q^2x^2)}} \qquad (C)$$

zurückgeführt; folglich läßt sich endlich die Integration jeder Function, welche aus einem rationalen Theile von x und aus einer Quadratwurzel aus einem Polynome des vierten Grades von x zusammengesetzt ist, auf die Bestimmung der drei Integrale (A), (B), (C) zurückführen.

Weiter unten werden wir sehen, welche weitern Transformationen die Analysten mit diesen letzten Functionen vorgenommen haben, welche Haupteigenschaften sie besitzen und wie man hat Tafeln ihrer numerischen Werthe berechnen können, welche sie annehmen, wenn die Integrationsgrenzen numerisch bestimmt werden.

IV. Integration irrationaler Binomialfunctionen.

§. 306. Unter irrationalen Binomialfunctionen verstehen wir Functionen von der Form:

$$R = x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} \qquad (R_1)$$

wo p, q ganze und m, n beliebige Zahlen bezeichnen. Wenn m und n rationale Zahlen sind, so kann man sie, wie man sich leicht überzeugt, als ganze Zahlen betrachten, ohne die Allgemeinheit des Ausdruckes zu beschränken. Die Functionen von der Form Rdx werden gewöhnlich ganz unschicklich binomische Differenziale genannt.

Wenn man

$$a + bx^n = t^q$$

setzt, so erhält man:

$$x = \left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\quad dx = \frac{qt^{q-1}}{nb}\left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dt,$$

$$Rdx = \frac{qt^{p+q-1}}{nb}\left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}dt,$$

und die Differenzialfunction Rdx wird also durch diese Transformation rational gemacht, wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Die Gleichung (R_1) läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$R = x^{m+\frac{np}{q}-1}(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}},$$

und folglich wird nach dem eben Gesagten die Differenzialfunction Rdx auch rational gemacht, wenn sich das Verhältniß:

$$\frac{m+\frac{np}{q}}{n}=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$$

auf eine ganze Zahl reducirt; aber außer den beiden eben angegebenen Fällen kann die Differenzialfunction Rdx im Allgemeinen nicht von ihrer Irrationalität befreit werden.

Wenn man $x^n=t$ ſetzt, ſo kommt:

$$Rdx=\frac{1}{n}t^{\frac{m}{n}-1}(a+bt)^{\frac{p}{q}}dt,$$

und folglich iſt die Beſtimmung des Integrales $\int Rdx$ auf die des Integrales:

$$\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu}dx \qquad (k)$$

zurückgeführt, wo die Conſtanten μ, ν beliebige ganze oder gebrochene und ſelbſt irrationale Werthe haben können. Wir wollen aber nun zeigen, daß die Beſtimmung des Integrales (k) immer auf die eines andern Integrales, worin die Werthe der Conſtanten μ und ν zwiſchen Null und der Einheit liegen, zurückgeführt werden kann.

§. 307. Denn durch theilweiſe Integration erhält man:

$$\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu}dx=\frac{x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu+1}}{(\nu+1)b}$$
$$-\frac{\mu-1}{(\nu+1)b}\int x^{\mu-2}(a+bx)^{\nu+1}dx,$$

und außerdem iſt:

$$\int x^{\mu-2}(a+bx)^{\nu+1}dx=a\int x^{\mu-2}(a+bx)^{\nu}dx+b\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu}dx.$$

Die Verbindung dieſer beiden Gleichungen gibt:

$$\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu}dx=\frac{1}{(\mu+\nu)b}[x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu+1}$$
$$-a(\mu-1)\int x^{\mu-2}(a+bx)^{\nu}dx], \qquad (l)$$

und wenn folglich die Conſtante μ poſitiv iſt, ſo wird die Beſtimmung des Integrales (k) auf die des Integrales:

$$\int x^{\mu-2}(a+bx)^{\nu}dx, \qquad (k_1)$$

worin der Exponent von x außerhalb der Parentheſe um eine Einheit vermindert iſt, während der Exponent der Parentheſe ſelbſt ungeändert bleibt, zurückgeführt. Wenn dagegen die Conſtante μ negativ iſt, ſo wird die Beſtimmung des Integrales (k_1) auf die des Integrales (k), worin der Zahlenwerth des Exponenten von x außerhalb der Parentheſe um eine Einheit vermindert iſt, zurückgeführt. Die eine oder die andere Operation kann ſo viele Male wiederholen, als erforderlich iſt, um die Beſtimmung des Integrales (k) von der eines andern Integrales von derſelben Form, worin der Werth der Conſtante μ zwiſchen 0 und 1 liegt, abhängig zu machen.

Eine ähnliche Reduction iſt auf den Exponenten ν anwendbar. Denn man hat:

$$\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu}dx=a\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu-1}dx+b\int x^{\mu}(a+bx)^{\nu-1}dx,$$

und die Formel (l) gibt, wenn man darin μ in $\mu+1$, und ν in $\nu-1$ verwandelt:

$$\int x^{\mu}(a+bx)^{\nu-1}dx = \frac{x^{\mu}(a+bx)^{\nu} - a\mu\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu-1}dx}{(\mu+\nu)b}$$

und aus der Verbindung dieſer beiden letzten Gleichungen ergibt ſich:

$$\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu}dx = \frac{x^{\mu}(a+bx)^{\nu} + a\nu\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu-1}dx}{\mu+\nu}$$

Endlich könnte man eben ſo die Exponenten μ, ν in dem Integrale:

$$\int (g+hx)^{\mu}(a+bx)^{\nu}dx$$

reduciren.

Zweites Kapitel.

Integration transcendenter Functionen.

§. 308. Wenn unter endlicher Form das Integral:

$$\int f t dt = Ft + \text{const.}$$

iſt, ſo hat man, vermöge des Princips im §. 294, auch:

$$\int f(\log. x)\frac{dx}{x} = F(\log. x) + \text{const.},$$

$$\int f(e^x)\cdot e^x dx = F(e^x) + \text{const.},$$

$$\int f(\sin. x)\cdot \cos. x dx = F(\sin. x) + \text{const.},$$

$$\int f(\cos. x)\cdot \sin. x dx = -F(\cos. x) + \text{const.},$$

$$\int f(\text{tang. } x)\cdot\frac{dx}{1+x^2} = F(\text{tang. } x) + \text{const.},$$

$$\int f(\text{arc. sin. } x)\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = F(\text{arc. sin. } x) + \text{const.},$$

und es iſt z. B.

$$\int\frac{\cos. x dx}{1+\sin.^2 x} = \text{arc. (tang.} = \sin. x) + \text{const.}$$

Wenn die Function F nicht unter endlicher Form erhalten werden kann, ſo läßt ſich die Beſtimmung der vorhergehenden Integrale in dem Falle, wo die Function f eine algebraiſche iſt, wenigſtens auf die Integration der algebraiſchen Function $\int t dt$ zurückführen.

Wenn f wieder eine algebraiſche Function bezeichnet, ſo kann man die Functionen:

$$f(e^{mx})\cdot dx, \quad f(\sin. mx, \cos. mx)\cdot dx$$

in algebraiſche verwandeln, wenn man für die erſte $e^{mx} = t$, und für die zweite $\sin. mx = t$, oder $\cos. mx = t$ ſetzt, und durch dieſe Subſtitution erhält man:

$$\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{dt}{t(1+t)}=\log.\left(\frac{t}{1+t}\right)+\text{const.}=\log.\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)+\text{const.},$$

$$\int\frac{dx}{1+\sin.x}=\int\frac{dt}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}=-\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}+\text{const.},$$

$$=-\sqrt{\frac{1-\sin.x}{1+\sin.x}}+\text{const.}$$

$$\int\frac{dx}{1-2a\cos.x+a^2}=-\int\frac{dt}{(1-2at+a^2)\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\frac{2}{1-a^2}\cdot\text{arc. tang.}\left[\frac{1+a}{1-a}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos.x}{1+\cos.x}}\right]+\text{const.}$$

Auch die Function:

$$f(\sin.mx,\cos.mx;\sin.imx,\cos.imx;\sin.i'mx,\cos.i'mx;\ldots)\,dx,$$

wo f eine algebraiſche Function und i, i', ... ganze Zahlen bezeichnen, würde man algebraiſch ausdrücken können, weil ſich in dieſem Falle sin. imx und cos. imx, ... vermittelſt der ganzen Potenzen von sin. mx, cos. mx in einer endlichen Anzahl von Gliedern ausdrücken laſſen (§. 77).

Eine rationale ganze Function des Sinus und Coſinus kann immer integrirt werden, nachdem man durch die bekannten Formeln (§. 78) die Potenzen des Sinus und Coſinus in Sinuſſe und Coſinuſſe vielfacher Bogen, und die Producte der Sinuſſe und Coſinuſſe verſchiedener Bogen in einfache Sinuſſe und Coſinuſſe verwandelt hat. Es iſt z. B.

$$\int\sin.(mx+n)\cos.(px+p)\,dx=\frac{1}{2}\int\sin.[(m+p)x+n+q]\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\sin.[(m-p)x+n-q]\,dx$$

$$=-\frac{\cos.[(m+p)x+n+q]}{2(m+p)}-\frac{\cos.[(m-p)x+n-q]}{2(m-p)}+\text{const.}$$

§. 309. Die Beſtimmung des Integrales:

$$\int\sin.^\mu x\cos.^\nu x\,dx \qquad (\mu,\nu)$$

hängt von der Integration einer irrationalen Binomialfunction ab; denn wenn man $\sin.x=\sqrt{t}$ ſetzt, ſo verwandelt ſich dieſes Integral in:

$$\frac{1}{2}\int t^{\frac{\mu-1}{2}}(1-t)^{\frac{\nu-1}{2}}\,dt.$$

Man könnte alſo zur Reduction der Exponenten μ und ν die Formeln im §. 207 anwenden; allein es wird beſſer ſein, dieſe Reduction an der Function (μ,ν) unter ihrer urſprünglichen Form vorzunehmen.

Wenn der Exponent μ poſitiv iſt, ſo wird derſelbe, ohne daß ν vergrößert wird, vermöge der Gleichungen:

$$\int\sin.^\mu x\cos.^\nu x\,dx=\int\sin.^{\mu-1}\cos.^\nu x\cdot\sin.x\,dx$$

$$=-\frac{\sin.^{\mu-1}x\cos.^{\nu+1}x}{\nu+1}+\frac{\mu-1}{\nu+1}\int\sin.^{\mu-2}x\cos.^{\nu+2}x\,dx,$$

$$\int\sin.^{\mu-2}x\cos.^{\nu+2}x\,dx=\int\sin.^{\mu-2}x\cos.^\nu x\,dx-\int\sin.^\mu x\cos.^\nu x\,dx,$$

vermindert, woraus alsdann folgt:

$$\int \sin.^{\mu} x \cos.^{\nu} x\,dx = -\frac{\sin.^{\mu-1} x \cos.^{\nu+1} x}{\mu+\nu} + \frac{\mu-1}{\mu-\nu}\int \sin.^{\mu-2} x \cos.^{\nu} x\,dx \quad (\mu)$$

Wenn der Exponent ν positiv ist, so vermindert man denselben, ohne μ zu vergrößern, wenn man die folgende Formel anwendet, welche man durch eine ähnliche Rechnung erhält:

$$\int \sin.^{\mu} x \cos.^{\nu} x\,dx = \frac{\sin.^{\mu+1} x \cos.^{\nu} x}{\mu+\nu} + \frac{\nu-1}{\mu+\nu}\int \sin.^{\mu} x \cos.^{\nu-2} x\,dx \quad (\nu)$$

Aus der Gleichung (μ) folgt:

$$\int \sin.^{\mu-2} \cos.^{\nu} x\,dx = \frac{\sin.^{\mu-1} x \cos.^{\nu+1} x}{\mu+1} + \frac{\mu+\nu}{\mu-1}\int \sin.^{\mu} x \cos.^{\nu} x\,dx,$$

und wenn man μ in $-\mu+2$ verwandelt:

$$\int \frac{\cos.^{\nu} x}{\sin.^{\mu} x}\,dx = -\frac{\cos.^{\nu+1} x}{(\mu-1)\sin.^{\mu-1} x} + \frac{\mu-\nu-2}{\mu-1}\int \frac{\cos.^{\nu} x}{\sin.^{\mu-2} x}\,dx \quad (\mu')$$

Ebenso würde sich aus der Gleichung (ν) ergeben:

$$\int \frac{\sin.^{\mu} x}{\cos.^{\nu} x}\,dx = \frac{\sin.^{\mu+1} x}{(\nu-1)\cos.^{\nu-1} x} + \frac{\nu-\mu-2}{\nu-1}\int \frac{\sin.^{\mu} x}{\cos.^{\nu-2} x}\,dx \quad (\nu')$$

Diese beiden letzten Formeln dienen zur Reduction der Zahlenwerthe der Exponenten μ, ν in dem Integrale (μ, ν), wenn diese Exponenten negativ sind.

Vermittelst der vier Reductionsformeln (μ), (ν), (μ'), (ν') kann man die Bestimmung des Integrales (μ, ν) immer auf die von Integralen von derselben Form, worin die Exponenten μ, ν zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegen, zurückführen, und wenn die ursprünglichen Exponenten μ, ν ganze Zahlen sind, so kann das Integral (μ, ν) auf eins der neun folgenden zurückgeführt werden:

$$\int dx = x + C, \quad \int \sin. x\,dx = -\cos. x + C, \quad \int \cos. x\,dx = \sin. x + C,$$

$$\int \sin. x \cos. x\,dx = \frac{1}{2}\sin.^2 x + C, \quad \int \frac{\sin. x}{\cos. x}\,dx = -\log. \cos. x + C,$$

$$\int \frac{\cos. x}{\sin. x}\,dx = \log. \sin. x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin. x \cos. x} = \log. \tang. x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x} = \log. \tang. \frac{x}{2} + C, \quad \int \frac{dx}{\cos. x} = \log. \tang.\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

§. 310. Statt die Bestimmung des Integrales einer transcendenten Differenzialfunction von der des Integrales einer algebraischen Function abhängig zu machen, kann man auch umgekehrt verfahren, und auf diese Weise für gewisse transcendente Functionen mit algebraischen Differenzialen Ausdrücke von einer einfacheren Form oder einer leichtern Untersuchung erhalten. Dieses ist besonders bei den Integralen (A), (B), (C) im §. 305 anwendbar; denn es sei p^2 der größte von den beiden in der Wurzelgröße:

$$R = \sqrt{(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)},$$

vorkommenden Coefficienten p^2, q^2, und man setze:

$$px = \tang. \varphi, \quad \frac{p^2-q^2}{p^2} = c^2,$$

ſo ſind die drei vorhin erwähnten Integrale in der folgenden allgemeinen Formel enthalten:

$$\int \left(\frac{A + B \sin.^2 \varphi}{C + D \sin.^2 \varphi}\right) \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} \qquad (1)$$

Wenn dagegen die Wurzelgröße die Form hat:

$$R = \sqrt{(1 - p^2 x^2)(1 - q^2 x^2)},$$

ſo wird ſie für Werthe von x^2, welche zwiſchen $\frac{1}{p^2}$ und $\frac{1}{q^2}$ liegen, imaginär, ſo daß die drei Integrale, worin dieſe Wurzelgröße vorkommt, ſelbſt imaginär ſind, wenigſtens wofern nicht für alle zwiſchen den Integrationsgrenzen liegenden Werthe von x beſtändig $p^2 x^2 < 1$ iſt. Man darf alſo alsdann ſetzen:

$$px = \sin. \varphi, \quad \frac{q^2}{p^2} = c^2,$$

ſo daß der Ausdruck (1) wieder der allgemeine Ausdruck der Integrale (A), (B), (C) iſt, indem c^2 immer eine zwiſchen Null und der Einheit liegende Conſtante iſt.

Aber da dieſe Formel (1) gleichbedeutend iſt mit:

$$A' \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}} + B' \int \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi} \cdot d\varphi + C' \int \frac{d\varphi}{(1 + a \sin.^2 \varphi)\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}},$$

wo A', B', C', a neue Coefficienten ſind, welche ſich aus A, B, C, D leicht durch Reduction auf denſelben Nenner und durch Vergleichung der Glieder mit denſelben Potenzen von sin. φ ableiten ließen. Die Berechnung der drei Integrale (A), (B), (C), iſt folglich auf die drei folgenden Integrale, welche man mit Recht als einfache betrachtet, zurückgeführt:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}}, \qquad (I)$$

$$\int \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi} \cdot d\varphi, \qquad (II)$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + a \sin.^2 \varphi)\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}}. \qquad (III)$$

§. 311. Von den Integralen, welche ſich auf die Formen (I), (II) zurückführen laſſen, wollen wir die folgenden anführen, welche bei verſchiedenen wichtigen Anwendungen häufig vorkommen:

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - 2c \cdot \cos. \psi + c^2}}, \quad \int \frac{\cos. \psi d\psi}{\sqrt{1 - 2c \cdot \cos. \psi + c^2}}.$$

Wenn man die veränderliche Größe vertauſcht, indem man:

$$\sin.(\varphi + \psi) = c \sin. \varphi,$$

ſetzt, ſo erhält man:

$$d\psi = \frac{[c \cdot \cos. \varphi - \cos.(\varphi + \psi)]\, d\varphi}{\cos.(\varphi + \psi)} = \frac{(c \cdot \cos. \varphi - \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi})\, d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}},$$

$$\cos.\psi = \sin.\varphi \sin.(\varphi+\psi) + \cos.\varphi \cos.(\varphi+\psi)$$
$$= c \sin.^2\varphi + \cos.\varphi \sqrt{1-c^2 \sin.^2\varphi},$$
$$\sqrt{1-2c\cdot\cos.\psi+c^2} = c\cdot\cos.\varphi - \sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi},$$

und folglich:

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-2c\cdot\cos.\psi+c^2}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}},$$
$$\int \frac{\cos.\psi d\psi}{\sqrt{1-2c\cdot\cos.\psi+c^2}} = c\int \frac{\sin.^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}} + \int \cos.\varphi d\varphi$$
$$= \frac{1}{c}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}} - \frac{1}{c}\int \sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}\cdot d\varphi + \sin.\varphi.$$

§. 312. Es sei f eine algebraische und φ eine transcendente Function von x, deren Ableitung φ' aber eine algebraische Function ist, und wir wollen setzen:

$$\int f dx = f_1,\ \int f_1\varphi'\cdot dx = f_2,\ \int f_2\varphi'\cdot dx = f_3,\ \text{&c.}$$

so ergibt sich durch theilweise Integration:

$$\int f\varphi^n\cdot dx = f_1\varphi^n - n\int f_1\varphi'\cdot\varphi^{n-1}\cdot dx$$
$$\int f_1\varphi'\cdot\varphi^{n-1}\cdot dx = f_2\varphi^{n-1} - (n-1)\int f_2\varphi'\cdot\varphi^{n-2}\cdot dx,\ \text{&c.},$$

woraus folgt:

$$\int f\varphi^n\cdot dx = f_1\varphi^n - nf_2\varphi^{n-1} + n(n-1)f_3\varphi^{n-2} - \ldots$$
$$\ldots \pm n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\cdot f_{n+1},$$

wo der Exponent n eine ganze positive Zahl ist. In dieser Voraussetzung, und wenn alle die Integrale $f_1, f_2, \ldots f_{n+1}$ unter endlicher Form erhalten werden können, läßt sich also auch das Integral:

$$\int f\varphi^n\cdot dx \qquad (f,\varphi)$$

unter endlicher Form erhalten.

Wir wollen nun annehmen, daß n eine ganze negative Zahl sei, oder was dasselbe ist, wir wollen das Integral

$$\int \frac{f}{\varphi}\cdot dx, \qquad \left(f,\frac{1}{\varphi}\right)$$

betrachten, indem wir n wie eine ganze positive Zahl behandeln und der Kürze wegen:

$$\frac{f}{\varphi'} = \omega_1,\ \frac{\omega'_1}{\varphi'} = \omega_2,\ \frac{\omega'_2}{\varphi'} = \omega_3,\ \text{&c.}$$

setzen, so erhalten wir:

$$\int \frac{f}{\varphi^n}\cdot = dx\int \frac{\omega_1 d\varphi}{\varphi^{n-1}} = -\frac{\omega_1}{(n-1)\varphi^{n-1}} + \frac{1}{n-2}\int \frac{\omega'_1}{\varphi^{n-1}}\cdot dx,$$
$$\int \frac{\omega'_2}{\varphi^{n-1}}\cdot = dx\int \frac{\omega_2 d\varphi}{\varphi^{n-1}} = -\frac{\omega_2}{(n-2)\varphi^{n-2}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\omega'_2}{\varphi^{n-2}}\cdot dx,\ \text{&c.}$$

und folglich:

$$\int \frac{f}{\varphi^n}\cdot dx = -\left[\frac{\omega_1}{(n-1)\varphi^{n-1}} + \frac{\omega_2}{(n-1)(n-2)\varphi^{n-2}} + \text{&c.}\right]$$
$$+ \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}\int \frac{\omega'_n}{\varphi}\cdot dx.$$

Die Beſtimmung des Integrales $\left(f, \frac{1}{\varphi}\right)$ iſt alſo auf die der transcendenten Größe:

$$\int \frac{\omega'_n}{\varphi} \cdot dx,$$

zurückgeführt. Wenn der Exponent n keine ganze Zahl wäre, ſo würden die Integrale (f, φ), $\left(f, \frac{1}{\varphi}\right)$ durch die eben angegebene Rechnung in unendliche Reihen entwickelt.

§. 313. Wir wollen z. B.

$$f = x^{a-1}, \quad \varphi = \log. x$$

ſetzen, ſo geben die vorhergehenden Formeln:

$$\int x^{a-1} (\log. x)^n dx = \frac{x^a}{a}\left[(\log. x)^n - \frac{n}{a}(\log. x)^{n-1}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{a^2}(\log. x)^{n-2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{a^n}\right] + \text{const.}$$

$$\int \frac{x^{a-1} dx}{(\log)x^n} = -x^a\left[\frac{1}{(n-1)(\log. x)^{n-1}} + \frac{a}{(n-1)(n-2)(\log. x)^{n-2}} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + \frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 \log. x}\right] + \frac{a^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}\int \frac{x^{a-1} dx}{\log. x}.$$

Setzt man $x^a = y$, ſo wird das Integral:

$$\int \frac{x^{a-1} dx}{\log. x} \text{ auf } \int \frac{dy}{\log. y}$$

zurückgeführt, und vermöge der Relation $z = \log. x$ hat man auch:

$$\int x^{a-1} (\log. x)^n dx = \int x^n e^{ax} dz, \quad \int \frac{x^{ax-1} dx}{(\log. x)^n} = \int \frac{e^{az} dz}{z^n}.$$

Die beiden vorhin erhaltenen Formeln geben alſo ohne alle weitere Rechnung und durch eine bloße Vertauſchung der Buchſtaben z und x:

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[x^n - \frac{n}{a}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2}x^{n-1} - \ldots\right.$$

$$\left. \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{a^n}\right] + \text{const.} \qquad (a)$$

$$\int \frac{e^{ax} dx}{x^n} = -e^{ax}\left[\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + \frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot x}\right] + \frac{a^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}\int \frac{e^{ax} dx}{x}.$$

Da die Integrale:

$$\int x^{a-1} (\log. x)^n dx, \quad \int x^n e^{ax} dx,$$

immer unter endlicher Form erhalten werden können, wenn n eine poſitive Zahl iſt, ſo iſt klar, daß man auch die Integrale:

$$\int fx \cdot (\log. x)^n dx, \quad \int fx \cdot e^{ax} dx$$

unter endlicher Form wird angeben können, wenn fx eine rationale ganze algebraiſche Function bezeichnet.

§. 314. Wenn wir in der Formel (a) die Größe a in $a\sqrt{-1}$ verwandeln, für die imaginäre Exponentialgröße ihren durch Sinus und Cosinus ausgedrückten Werth setzen und die reellen, so wie die imaginären Glieder beider Theile einander gleich setzen; so erhalten wir:

$$\int x^n \cos. ax \cdot dx =$$

$$\frac{\sin. ax}{a}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{a^2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{a^4}x^{n-4} - \ldots\right]$$

$$+ \frac{\cos. ax}{a}\left[\frac{n}{a}x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3}x^{n-3} + \ldots\right] + \text{const.}$$

$$\int x^n \sin. ax \cdot dx =$$

$$-\frac{\cos. ax}{a}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{a^2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{a^4}x^{n-4} - \ldots\right]$$

$$-\frac{\sin. ax}{a}\left[\frac{n}{a}x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3}x^{n-3} + \ldots\right] + \text{const.}$$

Alle diese Formeln erhielte man auch direct, wenn man auf die Integrale in den ersten Theilen der Gleichungen die Regel der theilweisen Integration anwendete.

Ebenso könnte man die Bestimmung der Integrale:

$$\int \frac{\cos. ax \cdot dx}{x^n}, \quad \int \frac{\sin. ax \cdot dx}{x^n}$$

auf die der einfachern Integrale:

$$\int \frac{\cos. ax \cdot dx}{x}, \quad \int \frac{\sin. ax \cdot dx}{x}.$$

zurückführen.

Die theilweise Integration gibt ferner:

$$\int e^{ax} \cos. bx \cdot dx = \frac{e^{ax} \cos. bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin. bx \cdot dx,$$

$$\int e^{ax} \sin. bx \cdot dx = \frac{e^{ax} \sin. bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cos. bx \cdot dx,$$

woraus sich durch Elimination ergibt:

$$\left.\begin{aligned}\int e^{ax} \sin. bx \cdot dx &= \frac{a \sin. bx - b \cos. bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} + \text{const.} \\ \int e^{ax} \cos. bx \cdot dx &= \frac{a \cos. bx + b \sin. bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} + \text{const.}\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Aus der Formel (a) ergäben sich auch die Werthe der Integrale:

$$\int x^n e^{ax} \cos. bx \cdot dx, \quad \int x^n e^{ax} \sin. bx \cdot dx,$$

wenn man darin $a + b\sqrt{-1}$ für a und für die imaginäre Exponentialgröße $e^{bx\sqrt{-1}}$ ihren Werth, durch den Sinus und Cosinus ausgedrückt, substituirte und endlich die reellen, so wie die imaginären Glieder der beiden Theile einzeln einander gleich setzte.

Man kann also die Integrale:

$$\int fx \cdot e^{ax} \cos. bx \cdot dx, \quad \int fx \cdot e^{ax} \sin. bx \cdot dx,$$

wo fx wieder eine rationale ganze algebraische Function bezeichnet, unter endlicher Form erhalten.

Drittes Kapitel.

Integration durch Reihen. — Ueber die merkwürdigen Fälle, welche sich bei dem Uebergange von den unbestimmten zu den bestimmten Integralen darbieten.

I. Integration durch Reihen.

§. 315. Wenn man eine Differenzialfunction in eine convergirende Reihe entwickeln kann, wovon sich jedes Glied integriren läßt, so erhält man das Integral dieser Function unter der Form einer Reihe, welche man dadurch vervollständigt, daß man eine willkührliche Constante hinzufügt, und wenn die durch die Integration erhaltene Reihe zwischen gegebenen Grenzen convergent ist, so gibt sie den Zahlenwerth des bestimmten, zwischen denselben Grenzen genommenen Integrales der gegebenen Function mit jedem beliebigen Grade von Annäherung.

Wir wollen z. B. das bereits am Ende des vorhergehenden Kapitels angeführte Integral:

$$\int \frac{e^{ax}dx}{x}$$

betrachten, so haben wir in einer sehr convergirenden Reihe:

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{1\cdot 2} + \frac{a^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.} \qquad (1)$$

folglich:

$$\int \frac{e^{ax}dx}{x} = \int dx \left\{ \frac{1}{x} + a + \frac{a^2x}{1\cdot 2} + \frac{a^3x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.} \right\}, \qquad (2)$$

oder vielmehr:

$$\int \frac{e^{ax}dx}{x} = \text{const.} + \log. x + ax + \frac{a^2x^2}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{a^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3} + \text{ꝛc.} \qquad (3)$$

Da die Reihe (1) convergent ist, so ist leicht einzusehen, daß die Reihe (3) um so mehr für alle Werthe von x convergirt. Man hat also für beliebige Werthe der Grenzen x_0, x_1; aber von demselben Zeichen:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{ax}dx}{x} = \log. \left(\frac{x_1}{x_0}\right) + a(x_1 - x_0) + \frac{a^2}{1\cdot 2\cdot 2}(x_1^2 - x_0^2) + \text{ꝛc.}$$

Die Formel würde unbrauchbar werden, wenn die Werthe der Grenzen entgegengesetzte Zeichen hätten, weil in diesem Falle das Glied $\log. \left(\frac{x_1}{x_0}\right)$ imaginär würde. Dieses rührt davon her, daß die unter dem Integrationszeichen $\int$ stehende Function für $x = 0$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt, welchen besondern Fall wir bereits bei der Auseinandersetzung der Grundlehren der Theorie der Quadraturen (§. 35 u. 54) angedeutet haben, und auf welchen wir wieder zurückkommen wollen.

Wenn man die Wurzelgröße $\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}$ in eine Reihe entwickelt; so erhält man:

$$\int \sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}\cdot d\varphi = \int d\varphi\,[1-\frac{1}{2}c^2\sin.^2\varphi-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}c^4\sin.^4\varphi$$
$$-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}c^6\sin.^6\varphi-\text{ꝛc.}]$$
$$=\text{const.}+\varphi-\frac{1}{2}c^2\int\sin.^2\varphi d\varphi-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}c^4\int\sin.^4\varphi d\varphi$$
$$-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}c^6\int\sin.^6\varphi d\varphi-\text{ꝛc.}$$

Jedes einzelne Integral von der Form $\int\sin.^{2i}\varphi d\varphi$, wo i eine ganze Zahl iſt, wird nach den im vorhergehenden Kapitel mitgetheilten Regeln erhalten. Da man ferner $c^2<1$ ſetzen kann (§. 310) und man offenbar für beliebige Grenzen φ_0, φ_1

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sin.^{2i}\varphi d\varphi<\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}d\varphi,\quad\text{oder}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sin.^{2i}\varphi d\varphi<\varphi_1-\varphi_0$$

hat, ſo iſt der Werth des beſtimmmten Integrales:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}\cdot d\varphi=\varphi_1-\varphi_0-\frac{1}{2}c^2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sin.^2\varphi d\varphi$$
$$-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}c^4\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sin.^4\varphi d\varphi-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}c^6\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sin.^6\varphi d\varphi-\text{ꝛc.}$$

in eine Reihe entwickelt, welche ſtets convergirt, und zwar gewöhnlich ſehr ſchnell.

§. 316. Wenn man eine Differenzialfunction, deren Integral unter endlicher Form eine bekannte Function iſt, durch Reihen integrirt; ſo erhält man die Reihenentwicklung dieſer Function oft auf die einfachſte Weiſe, und es iſt z. B.

$$\text{arc. sin.}x=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int dx\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\text{ꝛc.}\right]$$
$$=\text{const.}+x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\text{ꝛc.}\qquad(4)$$

Wenn man die willkührliche Conſtante durch die Bedingung beſtimmt, daß der Bogen mit dem Sinus zugleich verſchwindet, ſo gibt dieſe Reihe nur die zwiſchen $\pm\frac{1}{2}\pi$ liegende Bogen. Allein man kann auch annehmen, daß die Formel auch die dieſe Grenzen überſchreitenden Bogen gibt, wenn man der willkührlichen Conſtante andere Werthe beilegt, oder wenn man dieſe Conſtante jedesmal verändert, wenn die Function unter dem Zeichen $\int$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt. Die Reihe hat für jeden Werth von x in allen Fällen, und was für einen Werth die Conſtante auch haben mag, nur einen einzigen beſtimmten Werth, während die Function arc. sin. x unendlich viele Werthe haben kann. Die Reihe iſt convergent oder divergent, je nachdem die Zahlenwerthe von x größer oder kleiner als die Einheit ſind.

Die eben durch die Integration vermittelſt der Reihen ſehr einfach erhaltene Reihenentwicklung der Function arc. sin. x nach den Potenzen von x, würde auf ſehr conmplicirte Rechnungen geführt haben, wenn man die Maclaurin'ſche Formel zu dieſem Zwecke hätte anwenden wollen.

§. 317. Wir wollen nun noch das Integral $\int e^{-x^2}dx$, welches ſehr häufig in der Wahrſcheinlichkeitsrechnung vorkommt, in eine Reihe entwickeln.

Es ist:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1\cdot 2} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.},$$

folglich:

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{ꝛc.},$$

eine immer convergirende Reihe.

Die theilweise Integration gibt:

$$\int e^{-x^2}\,dx = e^{-x^2}x + 2\int e^{-x^2}x^2\,dx,$$

$$\int e^{-x^2}x^2\,dx = e^{-x^2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\int e^{-x^2}x^4\,dx, \text{ ꝛc.}$$

was auf folgende andere convergirende Reihe führt:

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = e^{-x^2}x\left[1 + \frac{2x^2}{1\cdot 3} + \frac{(2x^2)^2}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{(2x^2)^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \text{ꝛc.}\right].$$

Endlich gibt die theilweise Integration auch:

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int\frac{1}{x}\cdot e^{-x^2}x\,dx = -\frac{1}{2x}\cdot e^{-x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{e^{-x^2}\,dx}{x^2}$$

$$\int\frac{e^{-x^2}\,dx}{x^2} = \int\frac{1}{x^3}\cdot e^{-x^2}x\,dx = -\frac{1}{2x^3}\cdot e^{-x^2} - \frac{3}{2}\int\frac{e^{-x^2}\,dx}{x^4}, \text{ ꝛc.}$$

folglich:

$$\int e^{-x^2}\,dx = \text{const.} - \frac{e^{-x^2}}{2x}\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \text{ꝛc.}\right],$$

und wenn man bemerkt, daß alle Glieder der Reihe für $x = \infty$ verschwinden:

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{e^{-x^2}}{2x}\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \text{ꝛc.}\right].$$

Diese letzte Reihe wird zuletzt immer divergent, aber sie bleibt desto länger convergent, je größer der Zahlenwerth von x ist, und man darf daher von dem convergirenden Theile der Reihe zu numerischen Näherungsrechnungen Gebrauch machen (§. 25), weil man immer die Grenzen der Werthe der Integrale:

$$\int_x^\infty\frac{e^{-x^2}\,dx}{x^2}, \quad \int_x^\infty\frac{e^{-x^2}\,dx}{x^4}, \text{ ꝛc.}$$

und folglich die Grenzen des Fehlers angeben kann, welchen man begeht, wenn man bei irgend einem Gliede der Reihe stehen bleibt. Dieses ist der Vortheil, welchen die Reihenentwicklungen durch successive theilweise Integrationen darbieten.

§. 318. Aus der Maclaurin'schen Formel:

$$fx = f(0) + f'(0)\cdot\frac{x}{1} + f''(0)\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + f'''(0)\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.} \quad (a)$$

folgt allgemein:

$$\int fx\,dx = \text{const.} + f(0)\cdot\frac{x}{1} + f'(0)\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + f''(0)\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.}$$

oder:

$$\int_0^x fxdx = f(0)\cdot\frac{x}{1} + f'(0)\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + f''(0)\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.} \quad (a_1)$$

Wenn die Reihe (a) convergent iſt, ſo iſt es die Reihe (a_1) auch; denn wenn man die erſte mit dem Gliede vom i^{ten} Range ſchließt, ſo begeht man einen Fehler, welcher durch:

$$f^{(i)}(\theta x)\cdot\frac{x^i}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}, \quad (e)$$

ausgedrückt wird, wo θx ein Werth der veränderlichen Größe iſt, welcher zwiſchen 0 und x liegt, und wenn man folglich die zweite Reihe mit dem Gliede von demſelben Range ſchließt, ſo wird die Größe des begangenen Fehlers ausgedrückt durch:

$$f^{(i)}(\theta x)\cdot\int_0^x \frac{x^i dx}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i} = f^{(i)}(\theta x)\cdot\frac{x^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i(i+1)}. \quad (e_1)$$

Sollen die Reihen (a), (a_1) convergent ſein, ſo iſt erforderlich, aber auch zureichend, daß die vernachläſſigten Größen (e), (e_1) für entſprechende Werthe von i und für alle zwiſchen den Integrationsgrenzen liegenden Werthe von x kleiner werden können, als jede gegebene Größe. Wenn dieſe Bedingung aber in Beziehung auf die Größe (e) erfüllt wird, ſo wird ſie es um ſo mehr in Beziehung auf die Größe (e_1).

§. 319. Die theilweiſe Integration gibt:

$$\int fxdx = xfx - \int f'x\cdot xdx,$$

$$\int f'x\cdot xdx = \frac{1}{2}x^2f'x - \frac{1}{2}\int f''x\cdot xdx,$$

$$\int f''x\cdot x^2dx = \frac{1}{3}x^3f''x - \frac{1}{3}\int f'''x\cdot x^3dx, \text{ ꝛc.},$$

woraus ſich die folgende von Johann Bernoulli herrührende Reihe ergibt:

$$\int fxdx = \text{const.} + fx\cdot\frac{x}{1} - f'x\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + f''x\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{ꝛc.} \quad (f)$$

welche man auch direct aus der Taylor'ſchen Reihe:

$$Fx+h = Fx + F'x\cdot\frac{h}{1} + F''x\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2} + F'''x\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.}$$

ableiten könnte; denn wenn man in dieſer $h = -x$ ſetzt, ſo erhält man:

$$Fx = F(0) + F'x\cdot\frac{x}{1} - F''x\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + F'''x\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{ꝛc.}$$

und wenn man $F'x = fx$ ſetzt:

$$\int fxdx = F(0) = fx\cdot\frac{x}{1} - f'x\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + f''x\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{ꝛc.}$$

Nun iſt aber klar, daß F(0) oder der Werth von $\int fxdx$ für $x = 0$ auch der Werth der in der Gleichung (f) vorkommenden willkührlichen Conſtante iſt.

§. 320. Wenn ſich die Function fx nicht in eine hinreichend ſchnell convergirende Reihe entwickeln läßt, oder wenn man den analytiſchen Ausdruck derſelben nicht kannte, ſondern blos eine Reihe von Werthen derſelben hätte,

welche einander hinreichend genäherten Werthen der unabhängigen veränderlichen Größe entsprechen; so kann man das Integral $\int fx\,dx$ oder die Fläche der Curve, welche fx zur Ordinate hat, doch immer näherungsweiſe berechnen, wenn man das Intervall zwiſchen den Integrationsgrenzen in hinreichend kleine Theile Δx theilt und die Summe der Flächen der Rechtecke beſtimmt, welche Δx zur Grundlinie und fx oder $f(x+\Delta x)$ oder eine zwiſchenliegende Ordinate zur Höhe haben (§. 33). Das Integral $\int fx\,dx$ kann durch dieſes Verfahren mit einer beliebigen Annäherung beſtimmt werden, wenn die Function fx einen mathematiſchen Ausdruck hat, woraus man die Werthe von fx für einander unbeſtimmt nahe kommende Werthe von x ableiten kann, indem wieder angenommen wird, daß dieſe Function nicht für Werthe von x unendlich werden kann, welche zwiſchen den Integrationsgrenzen liegen. Bei der Abhandlung der Rechnung mit endlichen Differenzen und ihren Summen werden wir über dieſe Art der näherungsweiſen Berechnung der Zahlenwerthe der Integrale das Nöthige mittheilen.

II. Ueber die merkwürdigen Fälle, welche ſich bei dem Uebergange von den unbeſtimmten zu den beſtimmten Integralen darbieten.

§. 321. Es iſt gleich im Anfange dieſes Werkes (§. 54) bemerkt worden, daß, wenn die Function fx für einen zwiſchen x_0 und x_1 liegenden Werth ξ von x durch das Unendliche geht, ſo daß das Differenzial $fx\,dx$ für $x=\xi$ einen unendlichen oder unbeſtimmten Werth annimmt, das aus dem unbeſtimmten Integrale:

$$\int fx\,dx = Fx + \text{const.}$$

abgeleitete beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} fx\,dx = Fx_1 - Fx_0, \tag{5}$$

nicht mehr die Summe der Werthe des Differenziales $fx\,dx$ zwiſchen den Grenzen x_0, x_1 oder die Grenze, gegen welche die Summe der Producte $fx\cdot\Delta x$ convergirt, wenn das Intervall x_1-x_0 in immer kleinere Theile Δx getheilt wird, ausdrücken kann. Denn in dem in Rede ſtehenden Falle hat dieſe Summe oder dieſe Grenze keinen angebbaren Werth mehr, und exiſtirt eigentlich nicht mehr. Als ein paar einfache Beiſpiele von dieſem Ausnahmefalle hat man:

$$\int \frac{dx}{(x-\xi)^2} = -\frac{1}{x-\xi} + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{x-\xi} = \log(x-\xi) + \text{const.},$$

woraus folgt, wenn man zu den beſtimmten Integralen übergeht:

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{(x-\xi)^2} = -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{x_1-\xi}, \tag{6}$$

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{x-\xi} = \log\left(\frac{x_1-\xi}{-\xi}\right). \tag{7}$$

Aber wenn man $\xi > 0$ und $< x_1$ ſetzt, ſo hat das beſtimmte Integral (6) einen negativen Werth, während die Größe unter dem Integrationszeichen $\int$ beſtändig poſitiv bleibt, woraus a posteriori folgt, daß dieſes beſtimmte Integral nicht als eine Summe der verſchiedenen Differenzialelemente betrachtet werden kann. Eben ſo nimmt das beſtimmte Integral (7) in derſelben Vorausſetzung

einen imaginären Werth an, während die Größe unter dem Integrationszeichen $\int$ stets reell bleibt.

Wenn man jedoch, wie Poisson bemerkt hat, die veränderliche Größe x zwischen gegebenen Grenzen durch eine stetige Reihe imaginärer Werthe (§. 17), wovon keiner das Differenzial fxdx unendlich oder unbestimmt macht, gehen läßt, so hindert nichts, das neue bestimmte Integral (5) als die Summe der imaginären Werthe zu betrachten, welche das Differenzialelement fxdx in diesem Intervalle angenommen hat, und diese Summe kann, je nach den Umständen, reell oder imaginär sein. In den vorhergehenden Beispielen kann man

$$x = \frac{1}{2} x_1 (1 - \cos.\theta + \sqrt{-1} \cdot \sin.\theta),$$

setzen, woraus folgt:

$$dx = \frac{1}{2} x_1 (\sin.\theta + \sqrt{-1} \cdot \cos.\theta) d\theta,$$

und die den Grenzen $x = 0$, $x = x_1$, entsprechenden Grenzen der neuen veränderlichen Größe θ können sein:

$$\theta = 0, \quad \theta = (2i + 1)\pi,$$

wo i eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

§. 322. Obgleich die Function fx für den zwischen den Grenzen x_0, x_1 liegenden Werth $x = \xi$ unendlich wird, so kann es doch geschehen, daß das Differenzial fxdx für $x = \xi$ keinen unendlichen oder unbestimmten Werth annimmt, und in diesem Falle drückt das bestimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} fxdx$$

noch die Summe der Werthe des Differenziales innerhalb der Integrationsgrenzen aus. Dieser Fall ist bereits früher (§. 35 u. 54) durch die Betrachtung der Curven im Allgemeinen erörtert, und um die Rechnung darauf anzuwenden, wollen wir bemerken, daß die Function fx, wenn sie für $x = \xi$ unendlich wird unter der Form:

$$\frac{fx}{(x - \xi)^k},$$

gedacht werden kann, wo k einen Exponenten von solcher Beschaffenheit bezeichnet, daß die Function fx für $x = \xi$ nicht Null oder unendlich wird. Setzt man alsdann:

$$(x - \xi)^{1-k} = t, \quad \frac{(1-k)dx}{(x-\xi)^k} = dt,$$

so kommt:

$$\int_{x_0}^{x_1} fxdx = \frac{1}{1-k} \int_{t_0}^{t_1} \Phi t dt, \tag{8}$$

wo t_0, t_1 die Werthe von t bezeichnen, welche $x = x_0$, $x = x_1$ entsprechen und Φt die Function ist, welche von der Substitution des durch t ausgedrückten Werthes von x in die Function fx herrührt. Die Function Φt behält nach der Voraussetzung einen endlichen Werth, und wenn der Exponent k zwischen 0 und 1 fällt, so behält t zwischen den Integrationsgrenzen ebenfalls immer einen endlichen Werth, so daß das Differenzial:

$$fxdx = \frac{1}{1-k} \Phi t dt$$

ſtets einen unendlich kleinen Werth behält, und das Integral (8) die Summe der Werthe dieſes Differenzziales innerhalb der Integrationsgrenzen iſt.

Die Transformation findet in dem Falle nicht ſtatt, wenn $k = 1$ iſt, und in dieſem Falle nimmt das Differenzialelement $fx\,dx$ für $x = \xi$ einen endlichen und unbeſtimmten Werth an, wofern die Function fx nicht plötzlich von einem Werthe zu einem andern übergeht, wenn x den Werth ξ erreicht. Denn man kann dieſes Differenzialelement als die Grenze betrachten, gegen welche das beſtimmte Integral:

$$\int_{\xi-\varepsilon\xi_0}^{\xi+\varepsilon\xi_1} fx\,dx = \int_{\xi-\varepsilon\xi_0}^{\xi+\varepsilon\xi_1} \frac{fx}{x-\xi}\,dx,$$

convergirt, wenn man für ε eine immer kleinere und kleinere poſitive Zahl nimmt, und wenn ξ_0, ξ_1 beliebige endliche conſtante und poſitive Zahlen bezeichnen. Bei dem Uebergange zu dieſer Grenze convergirt das Glied fx nach der Vorausſetzung gegen den einzigen endlichen Werth $f\xi$, und man hat folglich:

$$\lim. \int_{\xi-\varepsilon\xi_0}^{\xi+\varepsilon\xi_1} fx\,dx = f\xi \cdot \lim. \int_{\xi-\varepsilon\xi_0}^{\xi+\varepsilon\xi_1} \frac{dx}{x-\xi} = f\xi \cdot \log.\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}\right),$$

welches wegen der Unbeſtimmtheit der Conſtanten ξ_0, ξ_1 eine unbeſtimmte Größe iſt.

Allgemein, die Function fx ſei eine algebraiſche oder transcendente, ſo kann man doch ſetzen:

$$(x-\xi)\,fx\,dx = fx,$$

wo ξ wieder den Werth von x bezeichnet, welcher fx unendlich macht, und je nachdem die Größe $f\xi$ Null, endlich, oder unendlich iſt, hat das Differenzialelement $fx\,dx$ einen unendlich kleinen, endlichen oder unbeſtimmten, oder vielmehr einen unendlich großen Werth, und blos im erſten Fall kann das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} fx\,dx$$

als eine Summe von Differenzialelementen betrachtet werden.

§. 323. Wenn die Function fx in dem Integrale:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,\varepsilon)\,dx,$$

nicht unendlich wird für Werthe von x, welche zwiſchen den Grenzen x_0, x_1 liegen, was für einen Werth man dem Parameter ε auch beilegen mag; ſo iſt es gleichgültig, ob man dieſem ε vor oder nach der Integration einen beſtimmten Werth, z. B. den Werth Null beilegt. Aber dieſe Eigenſchaft kommt den beſtimmten Integralen nur ſo lange zu, als ſie eine Summe von Differenzialelementen ausdrücken und findet im Allgemeinen nicht mehr ſtatt, wenn die Function f zwiſchen den Integrationsgrenzen durch das Unendliche geht.

Wir wollen z. B. das beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\varepsilon\,dx}{\varepsilon^2+x^2} = \text{arc. tang.}\frac{x_1}{\varepsilon} - \text{arc. tang.}\frac{x_0}{\varepsilon}. \qquad (9)$$

nehmen. Wenn die Zahlen x_0, x_1 beide poſitiv ſind, ſo daß die Function unter dem Integralzeichen ſelbſt für $\varepsilon = 0$ zwiſchen den Grenzen x_0, x_1 nicht durch das Unendliche geht; ſo gibt dieſe Vorausſetzung einerſeits:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\varepsilon dx}{\varepsilon^2+x^2} = \int_{x_0}^{x_1} 0 \cdot dx = 0,$$

und andererſeits:

$$\text{arc. tang.}\frac{x_1}{\varepsilon} - \text{arc. tang.}\frac{x_0}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

ſo daß es in der That gleichgültig iſt, ob man den Werth von ε vor oder nach der Integration ſubſtituirt. Aber wenn die Zahl x_1 poſitiv und die Zahl x_0 negativ wäre, ſo würde die erſte Subſtitution den Werth des Integrales immer $= 0$ geben, während die zweite

$$\text{arc. tang.}\frac{x_1}{\varepsilon} - \text{arc tang.}\frac{x_0}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

gäbe. Der Grund hiervon liegt darin, daß, indem die Function unter dem Integralzeichen für $x = 0$ unendlich wird, das dieſem beſondern Werthe entſprechende Element einen endlichen Werth annimmt, während alle übrigen Elemente in Folge des der Conſtante ε beigelegten Werthes $= 0$ bleiben.

Daß in der That die übrigen Elemente des Integrales Null ſind, geht daraus hervor, daß man den Zahlen x_0, x_1 beliebige endliche und ſelbſt unendliche Werthe beilegen, d. h. mit andern Worten, die Grenzen des Integrales beliebig ausdehnen oder zuſammenziehen kann, ohne den Werth deſſelben zu verändern. Wenn nur die obere Grenze poſitiv und die untere negativ bleibt, ſo iſt der Werth des beſtimmten Integrales immer der Conſtante π gleich.

Cauchy hat die beſtimmten Integrale, welche ſich wegen ihrer anomalen Eigenſchaften den gewöhnlichen Regeln der Berechnung der beſtimmten Integrale entziehen, wie das Integral (9), ſinguläre Integrale genannt.

§. 324. Wenn eine der Grenzen des Integrales unendlich, poſitiv oder negativ iſt, oder wenn die eine dieſer Grenzen das poſitive, und die andere das negative Unendliche iſt; ſo muß, damit das Integral $\int fx dx$ einen endlichen Werth behalten kann, die Function:

$$xfx = fx$$

für $x = \pm\infty$ verſchwinden. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß $-\infty$ und $+\infty$ die Grenzen des Integrales ſind, ſo kann man, wenn ε wieder eine unbeſtimmt gegen Null convergirende poſitive Zahl und ξ_0, ξ_1 beliebige endliche poſitive Conſtanten bezeichnen, ſetzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} fx dx = \lim.\left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon\xi_0}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \frac{fx dx}{x} + \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{fx dx}{x} + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\xi_1}} \frac{fx dx}{x}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} fx dx + \lim.\left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon\xi_1}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \frac{fx dx}{x} + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\xi_1}} \frac{fx dx}{x}\right].$$

Man muß alſo haben:

$$0 = \lim.\left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon\xi_0}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \frac{fx dx}{x} + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\xi_1}} \frac{fx dx}{x}\right]$$

$$= f(-\infty)\log.\xi_0 + f(\infty)\log.\left(\frac{1}{\xi_1}\right),$$

und folglich wegen der der Unbeſtimmtheit der Conſtanten ξ_0, ξ_1:

$$f(-\infty)=0, \quad f(\infty)=0$$

§. 325. Wenn die Function fx periodiſch iſt, ſo daß jedem Werthe von fx innerhalb einer Periode ein anderer numeriſch gleicher Werth, aber mit entgegengeſetztem Zeichen, entſpricht; ſo iſt der Werth des beſtimmten Integrals nothwendig unbeſtimmt. So ergibt ſich z. B. aus der Gleichung:

$$\int_0^x \text{sin. mxdx} = \frac{1}{m}(1-\text{cos. mx})$$

der unbeſtimmte Werth:

$$\int_0^\infty \text{sin. mxdx} = \frac{1}{m}(1-\text{cos.}\infty),$$

weil es keine Grenze gibt, gegen welche der Coſinus eines Bogens convergirt, wenn der Bogen ſelbſt immer größer und größer wird; aber dennoch liegt dieſer unbeſtimmte Werth zwiſchen den Grenzen 0, $\frac{2}{m}$.

Wir wollen nun annehmen, daß die periodiſche Function fx durch eine Function $\varphi(\varepsilon x)$ von ſolcher Beſchaffenheit multiplicirt werde, daß $\varphi(0)=1$ iſt, und daß das zwiſchen unendlichen Grenzen genommene Integral $\int \varphi(\varepsilon x)\,dx$ einen endlichen Werth behält; ſo iſt daſſelbe um ſo mehr mit dem Integrale $\int \varphi(\varepsilon x)\cdot fx\,dx$ der Fall. Der Werth dieſes Integrales ändert ſich im Allgemeinen mit dem des Parameters ε, indem er ebenfalls im Allgemeinen gegen eine gewiſſe Grenze convergirt, wenn ε immer kleiner und kleiner genommen wird, und da ſich die Grenze des Factors $\varphi(\varepsilon x)$ auf die Einheit reducirt, ſo kann man die Grenze, gegen welche das Integral $\int \varphi(\varepsilon x)\,fx\,dx$ convergirt, als den Werth des Integrales $\int fx\,dx$ betrachten, wodurch die Unbeſtimmtheit dieſes letzten Integrales beſeitigt wird.

So iſt z. B. nach den Formeln (b) im §. 314:

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon x}\,\text{sin. mxdx} = \frac{m}{\varepsilon^2+m^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon x}\,\text{cos. mxdx} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+m^2},$$

woraus ſich für $\varepsilon=0$ die beſtimmten Gleichungen:

$$\int_0^\infty \text{sin. mxdx} = \frac{1}{m}, \quad \int_0^\infty \text{cos. mxdx} = 0$$

ergeben, welche aber nach der eben getroffenen Convention interpretirt werden müſſen.

Viertes Kapitel.

Principien der Theorie der elliptiſchen Functionen.

§. 326. In den beiden erſten Kapiteln des gegenwärtigen Buches haben wir geſehen, wie die Integration ganzer Claſſen algebraiſcher und trigonometriſcher Differenzialfunctionen auf die Integration der drei Formeln:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}}, \qquad (I)$$

$$\int \sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi} \cdot d\varphi, \qquad (II)$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+a \sin.^2 \varphi)\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}} \qquad (III)$$

zurückgeführt wird, so daß, wenn diese drei Integrale sich unter endlicher Form durch Wurzelgrößen, Logarithmen, Sinus oder Kreisbogen als Functionen von φ ausdrücken ließen, man auch unter endlicher Form die unbestimmten, und folglich die bestimmten Integrale sehr vieler anderer zusammengesetzterer Functionen haben würde.

Allein dieses ist nicht möglich *), sondern die Integrale (I), (II), (III) sind neue transcendente Größen, welche man der Kürze wegen durch besondere Zeichen darstellen kann, eben so, wie man das bestimmte Integral:

$$\int_1^x \frac{dx}{x},$$

der Kürze wegen mit log. x bezeichnet, weil es sich nicht durch einen geschlossenen algebraischen Ausdruck darstellen läßt (§. 70 u. 139).

Legendre hat daher die folgenden Bezeichnungen vorgeschlagen, welche auch allgemein angenommen sind:

$$F(c, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}},$$

$$E(c, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi} \cdot d\varphi,$$

$$\Pi(c, a, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+a \sin.^2 \varphi)\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}},$$

so daß die unbestimmten Integrale (I), (II), (III) resp. ausgedrückt werden durch:

$$F(c, \varphi) + \text{const.}, \quad E(c, \varphi) + \text{const.}, \quad \Pi(c, a, \varphi) + \text{const.}$$

§. 327. Es sei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung einer auf ihren Mittelpunkt und auf ihre Axen bezogenen Ellipse, so wird, wenn wir

$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = c^2$$

setzen, so daß c die Excentricität der Ellipse bezeichnet, die Länge des Bogens Bm (Fig. 77), welcher sich von der Spitze B der kleinen Axe bis zu dem Punkte m, dessen Abscisse x ist, erstreckt, ausgedrückt durch:

$$s = \int_0^x \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2-c^2x^2}{a^2-x^2}} \cdot dx. \quad (\S.174)$$

*) Vergl. eine Abhandlung von Liouville im 23. Hefte des Journal de l'École polytechnique, p. 37

Wir wollen

$$x = a \sin. \varphi$$

ſetzen, ſo kommt:

$$\frac{s}{a} = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi} \cdot d\varphi = E(c, \varphi).$$

Wegen dieſer merkwürdigen Eigenſchaft der Function E, daß ſie die Länge des Bogens einer Ellipſe von der Excentricität c ausdrückt, wenn man den Winkel φ zur unabhängigen veränderlichen Größe und den Scheitel der kleinen Axe zum Anfangspunkte der Bogen nimmt, haben die drei Functionen F, E, Π den Namen elliptiſche Functionen erhalten, und zwar unterſcheidet man ſie reſp. in elliptiſche Functionen der erſten, zweiten und dritten Art.

Die Conſtante c, welche in den elliptiſchen Functionen der zweiten Art die Excentricität einer Ellipſe ausdrückt, wird im Allgemeinen der Modulus genannt, während die Conſtante a, welche nur in den elliptiſchen Functionen der dritten Art vorkommt, und poſitiv oder negativ, reell oder imaginär ſein kann, vorzugsweiſe den Namen Parameter behält.

Die unabhängige Veränderliche φ wird die Amplitude genannt. Wenn man aus dem Punkte O als Mittelpunkt mit dem Halbmeſſer OA einen Kreis beſchreibt, und die Ordinate pm bis zum Durchſchneiden mit dem Kreiſe in n verlängert; ſo iſt $Op = On \sin. BOn$. Die Amplitude φ wird alſo geometriſch durch den Winkel BOn dargeſtellt, wenn die Function $E(c, \varphi)$ durch den elliptiſchen Bogen Bm dargeſtellt wird.

Die drei elliptiſche Functionen ſind offenbar impaare oder ungerade Functionen von φ (§. 18), weil das Differenzial $d\varphi$ durch die Veränderung von φ in $-\varphi$ das Zeichen verändert, während der Factor, womit $d\varphi$ unter dem Integralzeichen $\int$ multiplicirt iſt, dadurch nicht verändert wird.

Wenn die Amplitude φ einen Viertelkreis beträgt, oder wenn man $\frac{1}{2}\pi$ für die obere Grenze der Integrale nimmt, ſo heißen die elliptiſche Functionen vollſtändige, und man bezeichnet ſie blos durch:

$$F(c), \quad E(c), \quad \Pi(c, a).$$

Wenn die Werthe der elliptiſchen Functionen für einen Viertelumkreis, d. h. für alle Werthe von φ zwiſchen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ berechnet ſind, ſo ſind ſie wegen der unter dem Integrationszeichen vorkommenden periodiſchen Function $\sin.^2 \varphi$ auch für alle beliebigen Werthe von φ beſtimmt, und man hat z. B.

$$F(c, \tfrac{1}{2}\pi + \varphi) = 2F(c) - F(c, \tfrac{1}{2}\pi - \varphi),$$
$$F(c, \pi + \varphi) = 2F(c) + F(c, \varphi),$$
$$F(c, \tfrac{3}{2}\pi + \varphi) = 4F(c) - F(c, \tfrac{1}{2}\pi - \varphi),$$
$$F(c, 2\pi + \varphi) = 4F(c) + F(c, \varphi), \quad \text{u. ſ. f.}$$

Der Modulus c muß immer größer als 1 vorausgeſetzt werden (§. 310), und wenn zwei Moduli c, c' durch die Gleichung $c^2 + c'^2 = 1$ mit einander verbunden ſind, ſo werden ſie Complementarmoduli genannt.

§. 328. Wir wollen mit φ, ψ, μ die drei Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes bezeichnen, worin der der Seite μ gegenüberliegende Winkel M durch die Gleichung $\sin. M = c \sin. \mu$ gegeben wird; ſo daß, wenn man der Kürze wegen

$$\cos. M = \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \mu} = \Delta\mu$$

ſetzt, die Grundformel der ſphäriſchen Trigonometrie die Relation

$$\cos. \mu = \cos. \varphi \cos. \psi + \sin. \varphi \sin. \psi \cdot \Delta\mu, \qquad (1)$$

und folglich:

$$1 - \frac{1-(\Delta\mu)^2}{c^2} = (\cos.\varphi\cos.\psi + \sin.\varphi\sin.\psi \cdot \Delta\mu)^2$$

gibt. Wenn man dieſe letzte Gleichung in Beziehung auf Δu auflöſt und die Wurzel unberückſichtigt läßt, welche für $\Delta\mu$ einen negativen Werth geben würde, ſo findet man:

$$\Delta\mu(1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi) = -c^2\sin.\varphi\sin.\psi\cos.\varphi\cos.\psi + \sqrt{1-c^2(1-\cos.^2\varphi\cos.^2\psi+\sin.^2\varphi\sin.^2\psi-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)}.$$

Man überzeugt ſich aber leicht, daß ſich die Größe unter dem Wurzelzeichen auf:

$$(1-c^2\sin.^2\varphi)^2\,(1-c^2\sin.^2\psi)^2 = (\Delta\varphi)^2\cdot(\Delta\psi)^2$$

reducirt, wenn $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ Größen bezeichnen, welche reſp. aus φ und ψ eben ſo zuſammengeſetzt ſind, wie $\Delta\mu$ aus μ. Man hat alſo dieſer Bezeichnung zufolge:

$$\Delta\mu = \frac{\Delta\varphi\cdot\Delta\psi - c^2\sin.\varphi\sin.\psi\cos.\varphi\cos.\psi}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi}, \qquad (2)$$

und hieraus ergibt ſich nach einigen Transformationen:

$$\sin.^2\mu = \frac{1-(\Delta\mu)^2}{c^2} = \frac{(\sin.\varphi\cos.\psi\Delta\psi+\sin.\psi\cos.\varphi\Delta\varphi)^2}{(1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)^2},$$

oder:

$$\sin.\mu = \frac{\sin.\varphi\sos.\psi\Delta\psi+\sin.\psi\cos.\varphi\Delta\varphi}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi}. \qquad (3)$$

Wenn man dieſe letzte Gleichung differenzirt, indem man φ und ψ als veränderlich und μ als conſtant betrachtet, ſo erhält man:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\Omega(\varphi,\psi)}{(1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)^2} + \frac{d\psi}{\Delta\psi}\cdot\frac{\Omega(\varphi,\psi)}{(1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)^2} = 0. \qquad (4)$$

Der Kürze wegen wollen wir die Function:

$$(1+c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)\cos.\varphi\cos.\psi\Delta\varphi\Delta\psi - \sin.\varphi\sin.\psi + c^2\sin.\varphi\sin.\psi(\sin.^2\varphi+\sin.^2\psi-\cos.^2\varphi\cos.^2\psi-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)$$

mit $\Omega(\varphi,\psi)$ bezeichnen. Da die Gleichung (3) in Beziehung auf φ und ψ ſymmetriſch iſt, ſo braucht man nur den Coefficienten von $d\varphi$ zu bilden, woraus ſich alsdann der von $d\psi$ ergibt. Man könnte auch der Function $\Omega(\varphi,\psi)$ andere Formen geben, und wir wollen hier blos eine derſelben anführen, woraus die Eigenſchaft dieſer Function, daß ſie in Beziehung auf die beiden Veränderlichen φ, ψ ſymmetriſch iſt, deutlich erhellet.

Die Gleichung (4) reducirt ſich auf:

$$0 = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{\Delta\psi} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\psi}},$$

woraus ſich durch Integration ergibt:

$$F(c,\varphi)+F(c,\psi) = \text{const.}$$

Um die durch dieſe Integration eingeführte willkührliche Conſtante zu beſtimmen, ſetzt man in der Gleichung (1) $\psi = 0$, welches $\varphi = \mu$ gibt, und da $F(c,0) = 0$ iſt, ſo erhält man zwiſchen den Veränderlichen φ, ψ und der Conſtanten μ, welche ſchon durch die Gleichung (1) mit einander verbunden

ſind, und die drei Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes bilden, worin der der conſtanten Seite gegenüberliegende Winkel auch conſtant iſt, noch die andere Gleichung:

$$F(c, \varphi) + F(c, \psi) = F(c, \mu). \qquad (5)$$

Wenn man alſo die Werthe der elliptiſchen Function der erſten Art für zwei Amplituden φ, ψ hat, ſo erhält man durch Addition dieſer Werthe den Werth der elliptiſchen Function derſelben Art für eine Amplitude μ, wo μ durch die Gleichung (1) oder durch die Gleichung (3), welche eine Transformation davon iſt, als Function von φ, ψ beſtimmt wird.

§. 329. Wir wollen ſetzen:

$$u = F(c, \varphi), \quad v = F(c, \psi),$$

und um auszudrücken, daß φ die Amplitude iſt, für welche die Function F den Werth u hat, wollen wir mit Jacobi

$$\varphi = \operatorname{am} u$$

ſchreiben, ſo daß die Anfangsbuchſtaben am des Wortes Amplitude die inverſe Function von der bezeichnen, welche durch das Zeichen F angedeutet iſt. Nach dieſer Uebereinkunft ſchreibt man auch:

$$\psi = \operatorname{am} v,$$
$$\Delta\varphi = \Delta \operatorname{am} u, \quad \Delta\psi = \Delta \operatorname{am} v,$$

und folglich gibt die Verbindung der Gleichungen (3) und (5):

$$\sin.\operatorname{am}(u+v) = \frac{\sin.\operatorname{am} u \,.\, \cos.\operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} v + \sin.\operatorname{am} v \,.\, \cos.\operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{1 - c^2 \sin.^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin.^2 \operatorname{am} v}. \qquad (a)$$

Wenn ſich der Modulus c auf Null reducirt, ſo verwandelt ſich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$\sin.(u+v) = \sin. u \cos. v + \sin. v \cos. u.$$

Ebenſo fände man:

$$\sin.\operatorname{am}(u-v) = \frac{\sin.\operatorname{am} u \,.\, \cos.\operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} v - \sin.\operatorname{am} v \,.\, \cos.\operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{1 - c^2 \sin.^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin.^2 \operatorname{am} v}$$

$$\cos.\operatorname{am}(u \pm v) = \frac{\cos.\operatorname{am} u \,.\, \cos.\operatorname{am} v \,.\, \mp \sin.\operatorname{am} u \,.\, \sin.\operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} v}{1 - c^2 \sin.^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin.^2 \operatorname{am} v},$$

und im Allgemeinen haben alle Formeln, deren ſich die Analyſten häufig zur Transformation der trigonometriſchen Functionen bedienen, ihre analogen für die Transformation der inverſen elliptiſchen Functionen der erſten Art, oder können vielmehr als beſondere Fälle der elliptiſchen Formeln betrachtet werden, in welchen der Modulus gleich Null geſetzt iſt, ſo daß

$$\operatorname{am} u = u, \quad \Delta \operatorname{am} u = 1$$

iſt.

Die Entwickelung dieſer merkwürdigen Analogien iſt der Gegenſtand der ſchönen Unterſuchungen von Abel und Jacobi geweſen, welche von der gelehrten Welt mit vielem Intereſſe aufgenommen wurden. Dieſe beiden Geometer haben beſonders ihren Scharfſinn auf die vollſtändige Unterſuchung der inverſen elliptiſchen Functionen und auf die merkwürdigen Relationen, durch welche ſich

die Analyse der Winkelschnitte an die Theorie der Zahlen und an die höhere Algebra anschließt, gerichtet.

§. 330. Die Function sin. u und alle übrigen trigonometrischen Functionen, welche davon abhängen, sind für reelle Werthe der Veränderlichen u periodisch, aber sie hören auf, periodisch zu sein, wenn man die unabhängige Veränderliche eine Reihe imaginärer Werthe $u\sqrt{-1}$ durchlaufen läßt, weil sie sich alsdann in Exponentialfunctionen verwandeln. Für die Exponentialfunction e^u findet das Umgekehrte statt, und die Function sin. am u hat die Eigenschaft, daß sie periodisch bleibt, man mag die Veränderliche u eine Reihe reeller oder imaginärer Werthe durchlaufen lassen, so daß sie die Haupteigenschaft der gewöhnlichen trigonometrischen Functionen mit der der Exponentialfunctionen in sich vereinigt.

Wir wollen mit $\frac{1}{2}\omega$ den Werth von u bezeichnen, welcher der Amplitude $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ entspricht, oder den Werth der vollständigen Function $F(c)$, so ist (§. 329):

$$\text{sin. am } u = \text{sin. am } (u + 2\omega) = \text{sin. am } (u + 4\omega)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \text{sin. am } (u + 2i\omega),$$

wo i eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Die Function sin. am u ist also erstens periodisch für reelle Werthe von u.

Setzt man nun:

$$\text{sin. } \varphi = \sqrt{-1} \cdot \text{tang. } \theta, \quad c'^2 = 1 - c^2,$$

so ergibt sich:

$$\cos.^2 \varphi = 1 + \text{tang.}^2 \theta = \frac{1}{\cos.^2 \theta},$$

$$d\varphi = \sqrt{-1} \cdot \frac{d\theta}{\cos. \varphi \cos.^2 \theta} = \sqrt{-1} \cdot \frac{d\theta}{\cos. \theta},$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}} = \sqrt{-1} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{1 - c'^2 \sin.^2 \theta}},$$

$$F(c, \varphi) = \sqrt{-1} \cdot F(c', \theta);$$

und wenn man:

$$F(c', \theta) = u, \quad F(c, \varphi) = u\sqrt{-1}$$

setzt, so folgt (indem man den Modulus zwischen den Parenthesen auf das Zeichen sin. am folgen läßt, um die sich auf verschiedene Moduli beziehenden Amplituden zu unterscheiden):

$$\text{sin. } \theta = \text{sin. am } (u, c'), \quad \text{tang. } \theta = \text{tang. am } (u, c'),$$
$$\text{sin. } \varphi = \text{sin. am } (u\sqrt{-1}, c)$$

und folglich:

$$\text{sin. am } (u\sqrt{-1}, c) = \sqrt{-1} \cdot \text{tang. am } (u, c').$$

Wenn wir den Werth der vollständigen Function $F(c')$ mit $\frac{1}{2}\omega'$ bezeichnen, so haben wir:

$$\text{tang. am } (u, c') = \text{tang. am } (u + 2\omega', c') = \text{tang. am } (u + 4\omega', c')$$
$$\vdots\ldots\ldots = \text{tang. am } (u + 2i'\omega', c'),$$

wo i' eine beliebige ganze Zahl ist, und folglich:

$$\text{sin. am } (u\sqrt{-1}) = \text{sin. am } [(u + 2i'\omega')\sqrt{-1}],$$

wo ſich die Amplituden in dieſer letzten Formel auf den Modulus c beziehen. Es iſt folglich:

$$\text{sin. am}(2i'\omega'\sqrt{-1}) = \text{sin. am}(0) = 1,$$

$$\text{cos. am}(2i'\omega'\sqrt{-1}) = \text{cos. am}(0) = 1, \quad \Delta\,\text{am}(2i'\omega'\sqrt{-1}) = 1.$$

und wenn man in der Formel (a) $v = 2i\omega'\sqrt{-1}$ ſetzt, ſo gibt ſie vermöge dieſer letzten Relationen:

$$\text{sin. am}(u + 2i'\omega'\sqrt{-1}) = \text{sin. am}\,u.$$

Aber wir haben bereits gefunden:

$$\text{sin. am}(u + 2i\omega) = \text{sin. am}\,u,$$

folglich iſt:

$$\text{sin. am}\,u = \text{sin. am}(u + 2i\omega + 2i'\omega'\sqrt{-1}),$$

und dieſe letzte Formel drückt die beabſichtigte doppelte Periodicität aus, wo die eine Periode ein reelles, und die andere ein imaginäres Argument hat.

§. 331. Nach dem Vorhergehenden iſt leicht einzuſehen, wie man für einen gegebenen Werth des Modulus zwiſchen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ der Amplitude eine Tafel der Werthe der Function F berechnen könnte, oder was noch einfacher wäre, eine Tafel der Werthe der inverſen Function sin. am u zwiſchen den Grenzen $u = 0$, $u = \frac{1}{2}\omega$. Wir wollen in der Formel (a) $v = \delta u$ ſetzen und δu ſo klein annehmen, daß man ohne merklichen Fehler

$$\text{sin. am}\,\delta u = \text{sin.}\,\delta u = \delta u,$$

$$\text{cos. am}\,\delta u = \text{cos.}\,\delta u = 1, \quad \Delta(\delta u) = 1$$

ſetzen kann; ſo gibt dieſe Formel:

$$\text{sin. am}(u + \delta u) = \text{sin. am}\,u + \delta u \cdot \text{cos. am}\,u \cdot \Delta\,\text{am}\,u.$$

Setzt man in dieſer letzten Gleichung:

$$u = \delta u, \quad u = 2\delta u, \quad u = 3\delta u, \quad \text{ꝛc.}$$

ſo erhält man die Werthe der Function sin. am u für eine Reihe von Werthen von u, welche eine arithmetiſche Progreſſion von der Differenz δu bilden. Dieſes Verfahren würde ähnliche Vereinfachungen und Verificationen geſtatten, wie die, welche man für die Berechnung der gewöhnlichen trigonometriſchen Tafeln angibt. Uebrigens würde man leicht die Tafel der Werthe der Function sin. am u umkehren können, um daraus die Tafel der Werthe der Function $u = F(c, \varphi)$, welche den Bedürfniſſen der Integralrechnung beſſer entſpricht, zu bilden.

§. 332. Es kommt nun darauf an, zu zeigen, wie man ohne Wiederholung des im vorhergehenden § angegebenen Syſtemes von Operationen, die Function $F(c, \varphi)$ für jeden Werth des Modulus und der Amplitude direct berechnen kann, ohne genöthigt zu ſein, für jeden Modulus eine ſpecielle Tafel zu berechnen. Wir wollen daher mit c, c_1 beliebige Moduli bezeichnen und einen conſtanten Coefficienten k von ſolcher Beſchaffenheit zu beſtimmen ſuchen, daß:

$$F(c, \varphi) = kF(c_1, \varphi_1)$$

oder:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}} = k \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - c_1{}^2 \sin.^2 \varphi_1}} \qquad (6)$$

iſt. Dieſer Gleichung kann auf unendlich viele verſchiedene Arten genügt werden, wenn man zwiſchen den Moduli c, c_1 und den Veränderlichen φ, φ_1,

die gehörigen Relationen aufſtellt. Ohne die Aufgabe durch directe Methoden zu behandeln, welche zu weitläufige Entwickelungen erfordern würden, wollen wir annehmen, es werde

$$\sin.^2\varphi(1-c_1^2\sin^2\varphi_1)=k^2\sin.^2\varphi_1(1-\sin.^2\varphi_1), \qquad (7)$$

geſetzt; ſo erhält man durch Differenziation:

$$\frac{\sin.\varphi_1\cos.\varphi_1 d\varphi_1}{\sin.\varphi(1-c_1^2\sin.^2\varphi_1)}=\frac{\cos.\varphi d\varphi}{c_1^2\sin.^2\varphi+k^2(1-2\sin.^2\varphi_1)}.$$

In den erſten Theil dieſer Gleichung wollen wir den aus der Gleichung (7) abgeleiteten Werth von sin. φ und in den zweiten Theil den aus derſelben Gleichung abgeleiteten Werth von sin. φ_1 ſetzen, ſo erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{d\varphi_1}{k\sqrt{1-c_1^2\sin.^2\varphi_1}}=\frac{\cos.\varphi d\varphi}{\sqrt{(k+c_1^2\sin.^2\varphi)^2-4k^2\sin.^2\varphi}},$$

aus deren Vergleichung mit der Gleichung (6) ſich

$$\frac{d\varphi}{k^2\cos.\varphi\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}=\frac{d\varphi}{\sqrt{(k^2+c_1^2\sin.^2\varphi)^2-4k^2\sin.^2\varphi}}$$

oder:

$$k^4(1-\sin.^2\varphi)(1-c^2\sin.^2\varphi)=(k^2+c_1^2\sin.^2\varphi)^2-4k^2\sin.^2\varphi;$$

ergibt, und wenn dieſe letzte Gleichung in Beziehung auf φ identiſch ſein ſoll, ſo muß:

$$c_1^4=k^4c^2,\quad 4-2c_1^2=k^2(c^2+1),$$

folglich:

$$c_1=\frac{2\sqrt{c}}{1+c},\quad k=\frac{c_1}{\sqrt{c}}=\frac{2}{1+c}$$

ſein, und wenn wir dieſe Werthe von c_1 und k in die Gleichung (7) ſubſtituiren; ſo gibt ſie:

$$\sin.(2\varphi_1-\varphi)=c\sin.\varphi.$$

§. 333. Der auf dieſe Weiſe beſtimmte Werth von c_1 iſt immer größer als c, und wir wollen nun annehmen, daß man eine Reihe, oder, wie man ſich gewöhnlich ausdrückt, eine Scale der Moduli $c_1, c_2, c_3, \ldots$, welche unter ſich und mit dem urſprünglichen Modulus c durch die Gleichungen:

$$c_1=\frac{2\sqrt{c}}{1+c},\quad c_2=\frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1},\quad c_3=\frac{2\sqrt{c_2}}{1+c_2},\quad \text{ꝛc.} \qquad (b)$$

verbunden ſind, bis zu einem wenig von der Einheit verſchiedenen Werthe c_n berechnen, und außerdem eine Reihe von Amplituden $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ vermittelſt der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\sin.(2\varphi_1-\varphi)=c\sin.\varphi,\\&\sin.(2\varphi_2-\varphi_1)=c_1\sin.\varphi_1,\\&\sin.(2\varphi_3-\varphi_2)=c_2\sin.\varphi_2,\\&\text{u. ſ. w.}\end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

beſtimmen; ſo hat man auch:

$$F(c_1,\varphi_1)=\frac{1+c}{2}\cdot F(c,\varphi),$$

$$F(c_2, \varphi_2) = \frac{1+c_1}{2} \cdot F(c_1, \varphi_1) = \left(\frac{1+c_1}{2}\right)\left(\frac{1+c}{2}\right) \cdot F(c, \varphi),$$

$$F(c_3, \varphi_3) = \frac{1+c_2}{2} \cdot F(c_2, \varphi_2) = \left(\frac{1+c_2}{2}\right)\left(\frac{1+c_1}{2}\right)\left(\frac{1+c}{2}\right) \cdot F(c, \varphi),$$

u. s. w.

Aber wenn man in der Scale der Moduli bis zu dem wenig von der Einheit verschiedenen Gliede c_n gelangt ist (und gewöhnlich braucht man nur eine kleine Anzahl von Gliedern zu berechnen), so hat man sehr nahe:

$$F(c_n, \varphi_n) = \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin.^2\varphi}} = \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \log.\tang\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\varphi_n\right),$$

folglich:

$$F(c, \varphi) = \frac{2}{1+c} \cdot \frac{2}{1+c_1} \cdot \frac{2}{1+c_1} \cdots \frac{2}{1+c_{n-1}} \cdot \log.\tang.\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\varphi_n\right). \quad (d)$$

Nichts hindert, die Reihe (b) rückwärts über c hinaus durch die Glieder c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}, ..., welche nach demselben Gesetze aus einander entstehen, zu erweitern, so daß man hat:

$$c = \frac{2\sqrt{c_{-1}}}{1+c_{-1}}, \quad c_{-1} = \frac{2\sqrt{c_{-2}}}{1+c_{-2}}, \quad c_{-2} = \frac{2\sqrt{c_{-3}}}{1+c_{-3}}, \quad \text{ꝛc.} \quad (b')$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin.(2\varphi - \varphi_{-1}) = c_{-1} \sin.\varphi_{-1}, \\ &\sin.(2\varphi_{-1} - \varphi_{-2}) = c_{-2} \sin.\varphi_{-2}, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \quad (c')$$

Man gelangt bald bis zu einem sehr wenig von der Einheit verschiedenen Gliede c_{-n}, und alsdann hat man nahezu:

$$F(c_{-n}, \varphi_{-n}) = \int_0^{\varphi_{-n}} d\varphi = \varphi_{-n},$$

folglich:

$$F(c, \varphi) = \frac{1+c_{-1}}{1} \cdot \frac{1+c_{-2}}{2} \cdots \frac{1+c_{-n}}{2} \cdot \varphi_{-n}. \quad (d')$$

Unter den Formeln (d) und (d') wählt man die, welche den Werth von $F(c, \varphi)$ am schnellsten gibt, und auf diese Weise sind die Tafeln berechnet, welche Legendre in seinem großen Werke über die elliptischen Functionen mitgetheilt hat.

Wenn man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ setzt, so geben die Gleichungen (c'):

$$\varphi_{-1} = \pi, \quad \varphi_{-2} = 2\pi, \ldots \varphi_{-n} = 2^n\pi,$$

und wenn man folglich die Grenze, gegen welche das aus unendlich vielen gegen die Einheit convergirenden Factoren bestehende Product convergirt, mit K bezeichnet, so ist der Werth der vollständigen Function $F(c) = K \cdot \frac{\pi}{2}$.

§. 334. Gehen wir nun zu der elliptischen Function der zweiten Art:

$$E(c, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi} \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{(1-c^2\sin.^2\varphi)d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

über. Wenn man wieder durch φ, ψ zwei Winkel bezeichnet, welche der Gleichung (l) im §. 328, und folglich der Differenzialgleichung:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{d\psi}{\Delta\psi}=0 \qquad (8)$$

genügen; ſo hat man:

$$d\,.\,E(c,\varphi)+d\,.\,E(c,\psi)=\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{d\psi}{\Delta\psi}-c^2\left(\sin.^2\varphi\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\sin.^2\psi\,\frac{d\psi}{\Delta\psi}\right)$$

$$=c^2\,(\sin.^2\psi-\sin.^2\varphi)\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Nun gibt aber die Gleichung (1):

$$\Delta\mu\;d\,.\sin.\varphi\sin.\psi=\sin.\varphi\cos.\psi\,d\varphi+\sin.\psi\cos.\varphi\,d\psi,$$

und wenn man für $d\psi$ ſeinen aus der Gleichung (8) gezogenen Werth ſubſtituirt:

$$\Delta\mu\,.\,d\,.\sin.\varphi\sin.\psi=(\sin.\varphi\cos.\psi\Delta\varphi-\sin.\psi\cos.\varphi\Delta\psi)\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}. \qquad (9)$$

Außerdem hat man vermöge der Gleichungen (2) und (3):

$$\frac{\sin.\mu}{\Delta\mu}=\frac{\sin.\varphi\cos.\psi\Delta\varphi+\sin.\psi\cos.\varphi\Delta\varphi}{\Delta\varphi\Delta\psi-c^2\sin.\varphi\sin.\psi\cos.\varphi\cos.\psi}; \qquad (10)$$

und aus der Verbindung der Gleichungen (9) und (10) ergibt ſich leicht:

$$\sin.\mu\,d\,.\sin.\varphi\sin.\psi=(\sin.^2\varphi-\sin.^2\psi)\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}. \qquad (11)$$

Folglich iſt:

$$d\,.\,E(c,\varphi)+d\,.\,E(c,\psi)=-c^2\sin.\mu\,d\,.\sin.\varphi\sin.\psi,$$
$$E(c,\varphi)+E(c,\psi)=\text{const.}-c^2\sin.\mu\sin.\varphi\sin.\psi,$$

und wenn man die willkührliche Conſtante ſo beſtimmt, daß zugleich $\psi=0$, $\varphi=\mu$ iſt, ſo hat man:

$$E(c,\varphi)+E(c,\psi)=E(c,\mu)-c^2\sin.\mu\sin.\varphi\sin.\psi. \qquad (12)$$

Vergleicht man dieſe Formel mit der Gleichung (5), welche für die Function F die analoge Formel iſt, ſo ſieht man, weßwegen die Geometer, welche ſich mit der Unterſuchung der elliptiſchen Functionen beſchäftigt haben, die Function F als die einfachere in den erſten Rang geſetzt haben, obgleich nach der geometriſchen Analogie die Function E, welche einen elliptiſchen Bogen ausdrückt, erſt auf die ſcheint folgen zu müſſen, welche einen Kreisbogen ausdrückt.

§. 335. Betrachten wir nun, wie im §. 332, einen Modulus c_1 und eine Amplitude φ_1, welche mit c und φ durch die Gleichungen:

$$c_1=\frac{2\sqrt{c}}{1+c},\quad \sin.(2\varphi_1-\varphi)=c\sin.\varphi. \qquad (13)$$

verbunden ſind, ſo ergibt ſich daraus durch Differenziation:

$$d\varphi_1=d\varphi\cdot\frac{c\cos.\varphi+\cos.(2\varphi_1-\varphi)}{2\cos.(2\varphi_1-\varphi)},$$

oder, wenn man für $\cos.(2\varphi_1-\varphi)$ ſeinen aus der zweiten der Gleichungen (13) gezogenen Werth $\Delta\varphi$ ſetzt:

$$d\varphi_1=\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\cdot\frac{c\cos.\varphi+\Delta\varphi}{2}. \qquad (14)$$

Aber die Gleichung (6) gibt:

$$d\varphi_1 = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\sqrt{1-c_1^2 \sin.^2\varphi}}{k},$$

oder wenn man für k seinen Werth wieder setzt:

$$d\varphi_1 = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{1+c}{2} \cdot \sqrt{1-c_1^2 \sin.^2\varphi_1}. \qquad (15)$$

Da die Gleichungen (14) und (15) übereinstimmen müssen, so muß:

$$(1+c)\sqrt{1-c_1^2 \sin.^2\varphi_1} = c\cos.\varphi + \Delta\varphi. \qquad (16)$$

sein.

Wenn wir die correspondirenden Theile der Gleichungen (14) und (16) in einander multipliciren; so kommt:

$$(1+c)\sqrt{1-c_1^2 \sin.^2\varphi_1} \cdot d\varphi_1 = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{(c\cos.\varphi + \Delta\varphi)^2}{2}$$

$$= \sqrt{1-c^2 \sin.^2\varphi} \cdot d\varphi - \frac{1-c^2}{2} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2\varphi}} + c\cos.\varphi d\varphi;$$

folglich, wenn man integrirt:

$$(1+c)\mathbf{E}(c_1,\varphi_1) = \mathbf{E}(c,\varphi) - \frac{1-c^2}{2} \cdot \mathbf{F}(c,\varphi) + c\sin.\varphi. \qquad (17)$$

Wir fügen keine willkührliche Constante hinzu, weil alle Glieder dieser Gleichung für $\varphi = 0$ einzeln verschwinden.

Vermöge der Formel (17) wird die Function $\mathbf{E}(c_1, \varphi_1)$ durch zwei elliptische Functionen, die eine von der ersten, und die andere von der zweiten Art, welche denselben Modulus und dieselbe Amplitude haben, ausgedrückt, und umgekehrt wird die elliptische Function der ersten Art durch zwei elliptische Functionen der zweiten Art von verschiedenem Modulus und von verschiedener Amplitude bestimmt.

Wenn man $\varphi = \pi$ setzt, so hat man $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$,

$$\mathbf{E}(c,\pi) = 2\mathbf{E}(c,\tfrac{1}{2}\pi) = 2\mathbf{E}(c),$$
$$\mathbf{F}(c,\pi) = 2\mathbf{F}(c,\tfrac{1}{2}\pi) = 2\mathbf{F}(c),$$

und die Formel (17) gibt zwischen den vollständigen elliptischen Functionen folgende Relation:

$$(1+c)\mathbf{E}(c_1) = 2\mathbf{E}(c) - (1-c^2)\mathbf{F}(c). \qquad (18)$$

§. 336. Wenn man die Scale der Moduli und der Amplituden, deren Gesetz im §. 333 angegeben ist, verfolgt, so findet man:

$$(1+c_1)\mathbf{E}(c_2,\varphi_2) = \mathbf{E}(c_1,\varphi_1) - \frac{1-c_1^2}{2} \cdot \mathbf{F}(c_1,\varphi_1) + c_1 \sin.\varphi_1, \qquad (19)$$

$$\mathbf{F}(c_1,\varphi_1) = \frac{1+c}{2} \cdot \mathbf{F}(c,\varphi). \qquad (20)$$

Wenn man $\mathbf{F}(c, \varphi)$ und $\mathbf{F}(c_1, \varphi_1)$ zwischen den Gleichungen (17), (19) und (20) eliminirt und dann für c_1 seinen durch c ausgedrückten Werth substituirt; so erhält man endlich:

$$\mathbf{E}(c,\varphi)=\frac{(1+c)(3-c)}{1-c}\mathbf{E}(c_1,\varphi_1)-\frac{2(1-c)}{(1-\sqrt{c})^2}\cdot\mathbf{E}(c_2,\varphi_2)$$
$$-c\sin.\varphi+\frac{4\sqrt{c}}{1-c}\cdot\sin.\varphi_1. \qquad (21)$$

Da man dieſelbe Rechnung beliebig wiederholen kann, indem man die auf- oder abſteigende Scale der Moduli verfolgt, ſo kann man die Function $\mathbf{E}(c,\varphi)$ immer von zwei andern Functionen derſelben Art abhängig machen, für welche der Modulus einen ſehr wenig von Null oder der Einheit verſchiedenen Werth hat. Wenn aber der Modulus c_n ſehr wenig von Null oder der Einheit verſchieden iſt, ſo hat man ohne merklichen Fehler:

$$\mathbf{E}(c_n,\varphi_n)=\int_0^{\varphi_n}\sqrt{1-c_n^2\sin.^2\varphi}\cdot d\varphi=\int_0^{\varphi_n}d\varphi=\varphi_n,$$

oder vielmehr:

$$\mathbf{E}(c_n,\varphi_n)=\int_0^{\varphi_n}\cos.\varphi\cdot d\varphi=\sin.\varphi_n.$$

§. 337. In Beziehung auf die elliptiſchen Functionen der dritten Art wollen wir nur einen Lehrſatz anführen, nämlich den analogen von denen, welche in Beziehung auf die elliptiſchen Functionen der erſten und zweiten Art durch die Formeln (5) und (12) ausgedrückt werden. Wenn wir wieder mit φ, ψ zwei veränderliche Amplituden bezeichnen, welche den Gleichungen (1), (3) und (8) genügen, ſo iſt:

$$d\cdot\Pi(c,a,\varphi)+d\cdot\Pi(c,a,\psi)=a\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\sin.\psi-\sin.\varphi}{(1+a\sin.^2\varphi)(1+a\sin.^2\psi)},$$

oder vielmehr wegen der Gleichung (11):

$$d\cdot\Pi(c,a,\varphi)+d\cdot\Pi(c,a,\psi)=-a\sin.\mu\cdot\frac{d\cdot\sin.\varphi\sin.\psi}{(1+a\sin.^2\varphi)(1+a\sin.^2\psi)}. \qquad (22)$$

Wenn man ſetzt:

$$\sin.\varphi\sin.\psi=\alpha,\quad \sin.^2\varphi+\sin.^2\psi=\beta,$$

ſo verwandelt ſich der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung in:

$$-a\sin.\mu\cdot\frac{d\alpha}{1+a\beta+a^2\alpha^2}.$$

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$\cos.^2\varphi\cos.^2\psi=\cos.^2\mu-2\cos.\mu\Delta\mu\sin.\varphi\sin.\psi$$
$$+(1-c^2\sin.^2\mu)\sin.^2\varphi\sin.^2\psi;$$

und da

$$\cos.^2\varphi\cos.^2\psi=1-(\sin.^2\varphi+\sin.^2\psi)+\sin.^2\varphi\sin.^2\psi=1-\beta+\alpha^2,$$

iſt, ſo kommt:

$$1-\beta+\alpha^2=\cos.^2\mu-2\alpha\cos.\mu\Delta\mu+\alpha^2(1-c^2\sin.^2\mu);$$

folglich:

$$\beta=\sin.^2\mu+2\alpha\cos.\mu\Delta\mu+\alpha^2c^2\sin.^2\mu,$$

und mithin:

$$\frac{d\alpha}{1+a\beta+a^2\alpha^2}=\frac{d\alpha}{p+2q\alpha+r\alpha^2},$$

wo der Kürze wegen:

$$1 + a \sin.^2 \mu = p, \quad a \cos. \mu \Delta \mu = q, \quad ac^2 \sin.^2 \mu + a^2 = r.$$

geſetzt iſt.

Wenn man folglich das Integral:

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{p + 2q\alpha + r\alpha^2},$$

welches ſich immer durch Logarithmen oder durch Kreisbogen ausdrücken läßt, mit $\Phi(\alpha)$ bezeichnet, ſo gibt die Gleichung (22):

$$\Pi(c,a,\varphi) + \Pi(c,a,\psi) = \text{const.} - a \sin. \mu \cdot \Phi(\sin. \varphi \sin. \psi).$$

Aber für $\psi = 0$ hat man $\varphi = \mu$, $\Pi(c, a, \psi) = 0$, $\Phi(0) = 0$; folglich:

$$\Pi(c,a,\varphi) + \Pi(c,a,\psi) = \Pi(c,a,\mu) - a \sin. \mu \cdot \Phi(\sin. \varphi \sin. \psi).$$

Fünftes Kapitel.

Geometriſche Anwendungen der Berechnung der einfachen beſtimmten Integrale.

I. Quadratur ebener Curven.

§. 338. Wir haben ſchon mehrere Male zu bemerken Gelegenheit gehabt, daß das Integral:

$$u = \int_{x_0}^{x_1} fx \cdot dx$$

die Größe der Fläche ausdrückt, welche von dem Bogen einer Curve, deren rechtwinkelige Coordinaten x und fx ſind, welcher zwiſchen den Coordinaten fx_0, fx_1 liegt, von dieſen Ordinaten ſelbſt und von der Axe x eingeſchloſſen wird. Dieſe Anwendung der Integralrechnung bietet ſich ſo natürlich dar, daß man ſie gleich vom Anfange an die Methode der Quadraturen genannt hat, und noch jetzt verſteht man unter der Quadratur (§. 33) die Operationen, durch welche man den Werth eines beſtimmten Integrales genau oder näherungsweiſe erhält. Ohne hier den Beweis eines Lehrſatzes zu wiederholen, mit welchem wir ſchon vertraut ſind, wollen wir denſelben auf einige der Curven anwenden, welche beſonders unſere Aufmerkſamkeit verdienen.

Wenn die Gleichung der gewöhnlichen Parabel auf die Form:

$$y = \sqrt{2px},$$

gebracht iſt, ſo findet man für die von dem Scheitel aus gemeſſene Fläche dieſer Curve:

$$u = \sqrt{2p} \cdot \int_0^x \sqrt{x} \cdot dx = \frac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot x\sqrt{x} = \frac{2}{3} xy.$$

Die Fläche des paraboliſchen Dreieckes Omp (Fig. 78) beträgt folglich $\frac{2}{3}$ von der Fläche des aus der Ordinate und der Abſciſſe des Punktes m conſtruirten Rechteckes Opmq. Dieſer von Archimedes entdeckte Satz iſt der

Gegenſtand eines Werkchens dieſes großen Geometers, worin er dieſen Satz auf zwei ſehr merkwürdige Arten beweiſt, nämlich einmal durch Sätze aus der Statik, welche er ebenfalls ſelbſt gefunden hatte, und das andere Mal durch die Summation einer abnehmenden geometriſchen Progreſſion, worauf alsdann der Uebergang von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen nach der Art der Alten durch die Zurückführung auf das Abſurde gerechtfertigt wird (§. 49).

Wenn man die auf ihren Mittelpunkt und auf ihre Axen bezogene Ellipſe betrachtet, deren Gleichung alſo

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

iſt, ſo, wird die Fläche des elliptiſchen Trapezes OpmB (Fig. 77) ausgedrückt durch:

$$u = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\cdot dx,$$

und hieraus könnte man ſofort, wie es auch in den Elementarwerken über die Kegelſchnitte geſchieht, das Verhältniß des elliptiſchen Trapezes OpmB zu dem Kreistrapeze OpnC ableiten. Um aber durch Anwendung der gewöhnlichen Integrationsregeln zu demſelben Reſultate zu gelangen, ſetzt man:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = tx, \quad \text{oder} \quad x^2 = \frac{a^2}{1 + t^2},$$

folglich:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\cdot dx = \int txdx = \frac{1}{2}tx^2 - \frac{1}{2}\int x^2 dt$$

$$= \frac{1}{2}tx^2 - \frac{a^2}{2}\,\text{arc. tang. } t + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{2}a^2\,\text{arc. tang.}\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) + \text{const.},$$

und folglich:

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\cdot dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc. tang.}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2\,\text{arc. sin.}\,\frac{x}{a};$$

ſo daß man endlich hat:

$$u = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2}\,\text{arc. sin.}\,\frac{x}{a} = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2}\,\text{arc. sin.}\,\frac{x}{a}.$$

Hieraus folgt, daß die Fläche des elliptiſchen Quadranten OAmB durch $\frac{\pi ab}{4}$ und die der ganzen Ellipſe folglich durch πab ausgedrückt wird.

Da $\frac{xy}{2}$ die Fläche des Dreieckes Omp ausdrückt, ſo wird die des elliptiſchen Sectors BOm ausgedrückt durch $\frac{ab}{2}\,\text{sin.}\,\frac{x}{a}$.

§. 339. Wenn man die Gleichung der Hyperbel unter der Form:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

anwendet und zur Erleichterung der Rechnung

$$\sqrt{x^2 - a^2} = tx,$$

ſetzt, ſo hat man:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{4} \log. \left[\frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}}\right] + \text{const.}$$

oder was daſſelbe iſt:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log. (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + \text{const.},$$

wenn man das Glied:

$$\frac{a^2}{4} \log. a^2 = \frac{a^2}{4} \log. \left[\frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right] + \frac{a^2}{2} \log. (x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

unter der willkürlichen Conſtante mit verſteht.

Man erhält alſo für den Werth der hyperboliſchen Fläche Apm (Fig. 84):

$$u = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2} \log. \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$$

$$= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \log. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Folglich iſt:

$$\text{Sector OmA} = \frac{ab}{2} \log. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

woraus folgt, daß die Fläche zwiſchen der Hyperbel und ihren Aſymptoten unendlich iſt.

Die Fläche der Hyperbel hängt ebenſo von einer logarithmiſchen Function ab, wie die Fläche der Ellipſe von einer Kreisfunction. Die zwiſchen der Ellipſe und Hyperbel ſtattfindende geometriſche Analogie entſpricht der Analogie der trigonometriſchen und der Exponentialfunctionen und ihre inverſen Functionen den Kreisbogen und den Logarithmen.

Da die Gleichung der auf ihre Aſymptoten bezogenen gleichſeitigen Hyperbel:

$$xy = \frac{a^2}{2},$$

iſt, ſo wird die Größe der zwiſchen den Ordinaten, welche den Abſciſſen x_0, x, entſprechen, liegenden aſymptotiſchen Fläche ausgedrückt durch:

$$u = \frac{a^2}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \frac{a^2}{2} \log. \left(\frac{x}{x_0}\right); \qquad (1)$$

und wenn man $a = \sqrt{2}$, $x_0 = 1$ ſetzt, ſo hat man blos $u = \log. x$. Die Neper'ſchen Logarithmen können alſo, als durch die Flächen einer gleichſeitigen Hyperbel ausgedrückt, betrachtet werden, aus welchem Grunde man ſie auch ſeit langer Zeit hyperboliſche Logarithmen genannt hat, welche Benennung aber ganz unſchicklich iſt, weil, wenn man der Conſtante a einen ſchicklichen

Werth gibt, die durch die Gleichung (1) bestimmte Function u ebenso gut jedes andere Logarithmensystem ausdrückt, und in der That ergeben sich die Logarithmen für eine beliebige Basis bekanntlich aus den Neper'schen Logarithmen, wenn man diese durch einen für jede Basis constanten Modulus multiplicirt (§. 64).

Nach §. 99 findet die Gleichung (1) nicht mehr statt, wenn der Werth $x = 0$, welcher den Coefficienten von dx unter dem Integralzeichen $\int$ unendlich macht, zwischen die Integrationsgrenzen fällt, und folglich könnte man durch diese Formel nicht die Fläche ausdrücken, welche zwischen zwei Ordinaten mit entgegengesetzten Zeichen, die also beiden Zweigen der Curve angehören, liegt.

Man kann immer mittelst Additionen oder Subtractionen geradliniger Polygone zu oder von der Fläche einer auf ein System geradliniger, schiefer oder rechtwinkliger Coordinaten bezogenen Curve zu der Fläche dieser auf ein anderes geradliniges Coordinatensystem bezogenen Curve übergehen, und hierin liegt der Grund, daß die logarithmische Function, welche sich bei der Berechnung der Fläche der auf ihre Asymptoten bezogenen Hyperbel unmittelbar darbietet, in Folge der verschiedenen Transformationen wieder erscheint, wenn man die Hyperbel auf ihre Axen bezieht.

§. 340. Wenn man die Gleichung der logarithmischen Linie auf die Form $y = e^x$ bringt, so hat man:

$$u = \int_0^x e^x dx = e^x - 1,$$

welcher Werth sich für $x = -\infty$ auf -1 reducirt. Folglich hat die zwischen der Ordinate OB (Fig. 79), zwischen der auf der Seite der negativen Abscissen ins Unendliche fortlaufenden Curve BM′ und zwischen der ebenfalls ins Unendliche fortlaufenden Asymptote OX′ liegende Fläche einen endlichen Werth und ist der Fläche des aus der geraden Linie OB construirten Quadrates gleich.

Wenn die Cycloide, wie im §. 176, durch das System der beiden Gleichungen:

$$x = R(\varphi - \sin.\varphi), \quad y = R(1 - \cos.\varphi),$$

ausgedrückt wird, so hat man:

$$u = \int_0^x y dx = R^2 \int_0^\varphi (1 - \cos.\varphi)^2 d\varphi$$

$$= R^2 (\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin.\varphi + \tfrac{1}{4}\sin.2\varphi).$$

Man nimmt $\varphi = 2\pi$ zur obern Grenze des Integrales, um die zwischen einem einzelnen Cycloidenbogen und der Basis der Cycloide liegende Fläche zu erhalten, welche man $= u = 3\pi R^2$ findet, d. h. sie ist dreimal so groß, als die Fläche des erzeugenden Kreises. Die vorhergehende Formel erstreckt sich auch auf beliebige Werthe von φ und auf die Quadratur von einer beliebigen Anzahl von Cycloidenbogen eingeschlossener Flächen.

§. 341. Die von einer ebenen Curve eingeschlossene Fläche ist eine von dem Coordinatensysteme, auf welches man die Curve bezieht, unabhängige Größe und diese Fläche, welche wir mit U bezeichnen wollen, ist es gewöhnlich, welche man in dem Probleme der Quadratur bestimmen will. Wenn die Curve eine algebraische ist, so gibt ihre Gleichung $F(x,y) = 0$ wenigstens zwei derselben Abscisse entsprechende Wurzeln $y = f_1 x$, $y = f_2 x$, und in diesem Falle hat man:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} (f_1 x - f_2 x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f_1 x\,dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2 x\,dx:$$

wo $f_1 x$ die Ordinate des Bogens $m_0\ n_1\ m_1$ (Fig. 80), $f_2 x$ die des Bogens $m_0\ n_0\ m_1$ und x_0, x_1 die Abscissen der geraden Linien $m_0\ p_0$, $m_1\ p_1$ bezeichnen, welche die Curve parallel zu der Axe der y begrenzen. Die Bogen $m_0\ n_1\ m_1$, $m_0\ n_0\ m_1$ könnten übrigens verschiedenen algebraischen oder nicht algebraischen Curven angehören, und in ihrem Verlaufe Stetigkeitsunterbrechungen der zweiten oder einer höhern Ordnung erfahren. Das Integral U würde sich leicht in eine größere Anzahl einzelner Integrale zerlegen lassen, wenn die geschlossene Curve verschiedene Biegungen darböte, wie die in Fig. 81 angegebenen.

Da das Differenzial der Fläche einer durch Polarcoordinaten ausgedrückten Curve

$$du = \tfrac{1}{2} r^2 d\varphi$$

ist (§. 180) so wird die ganze Fläche der Curve durch die Formel:

$$u = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 d\varphi$$

ausgedrückt, in welche man für r^2 seinen durch die Polargleichung der Curve gegebenen Werth als Function von φ substituiren muß. Wenn die Curve eine geschlossene ist und der Pol oder der Anfangspunkt der Radienvectoren innerhalb derselben liegt, so daß r^2 für jeden zwischen 0 und 2π liegenden Werth von φ einen einzigen reellen Werth hat, so ist:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi.$$

Wenn die Curve wieder geschlossen ist, und der Pol innerhalb derselben liegt, so kann es, wenn sie Biegungen darbietet, geschehen, daß r^2 für die zwischen gewissen Grenzen liegenden Werthe von φ, drei, fünf, oder überhaupt eine ungerade Anzahl reeller Werthe hat. Wenn dagegen der Pol außerhalb der von der Curve umschlossenen Fläche läge, so würde r^2 immer eine gerade Anzahl reeller Wurzeln haben, und in allen diesen Fällen läßt sich das Integral U in verschiedene einzelne Integrale zerlegen, wovon jedes seine besondere Grenzen hat.

II. Rectification der Curven.

§. 342. Das Problem der Rectification der Curven ist eine wichtige Anwendung der Integralrechnung, und wir glauben daher, hier etwas tiefer in diesen Gegenstand eingehen zu müssen, als es gewöhnlich geschieht.

Wenn man die Länge des Bogens einer Curve, deren rechtwinklige Coordinaten x und fx sind, mit s bezeichnet, so hat man (§. 174):

$$ds = \sqrt{1 + (f'x)^2}\cdot dx$$

und folglich:

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (f'x)^2}\cdot dx, \qquad (s)$$

wo x_0 die Abscisse des Punktes der Curve ist, von welchem aus der Bogen gemessen wird.

Soll der Coefficient von dx unter dem Integralzeichen $\int$ unendlich werden, so ist erforderlich, aber auch zureichend, daß $f'x$ ebenfalls durch das Unendliche geht; aber selbst in diesem Falle wird die Formel (s) nicht illusorisch,

wenn fx einen endlichen Werth behält. Denn es sei ξ der Werth von x, welcher f'x unendlich macht, so behält nach dem im §. 322 Gesagten fx dennoch einen endlichen Werth, wenn das Product $(x-\xi)\,f'x$ gegen einen endlichen Werth oder gegen Null convergirt, während sich x dem Werthe ξ immer mehr und mehr nähert. Diese Grenze des Werthes von fx ist aber keine andere, als die des Productes:

$$(x-\xi)\sqrt{1+(f'x)^2},$$

und folglich bleibt die Formel (s) immer anwendbar, wenn die Ordinate der Curve einen endlichen Werth behält, obgleich die Tangente derselben auf der Axe der x senkrecht wird.

Diese Formel würde unbrauchbar werden, aber auf eine andere Weise, wenn fx und f'x für gewisse Werthe von x imaginär würden, und die Wurzelgröße $\sqrt{1+(f'x)^2}$ dennoch reell bliebe. Wenn man z. B.

$$f'x=\sqrt{x^2-1}$$

oder (§. 339):

$$fx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\log.(x+\sqrt{x^2-1})+\text{const.}$$

hätte, so gäbe die Formel (s):

$$s=\int_{x_0}^{x}xdx=\frac{1}{2}(x^2-x_0^2)$$

und der Werth von s würde sogar für kleinere Zahlenwerthe von x als die Einheit, welche f'x und fx imaginär machen, reell bleiben.

§. 343. Die Wurzelgröße:

$$\sqrt{1+(f'x)^2}=R$$

muß im Allgemeinen innerhalb der ganzen Ausdehnung der Integration mit demselben Zeichen genommen werden, damit der Werth des Bogens positiv ist, wenn seine Endpunkte jenseits des zum Anfangspunkte der Bogen genommenen Punktes liegen und negativ, wenn diese Endpunkte des Bogens diesseits dieses Anfangspunktes liegen, oder umgekehrt. Wenn also das Integral unter endlicher Form erhalten werden kann, so muß die wieder darin erscheinende Wurzelgröße R nicht als mit dem doppelten Zeichen behaftet betrachtet werden (§. 299), wogegen die etwa in $(f'x)^2$ vorkommenden Wurzelgrößen, welche von den vielfachen Zweigen der Curve herrühren, in dem Integrale das doppelte Zeichen haben müssen, damit der Ausdruck für den Bogen der Curve seine ganze Allgemeinheit behält und nicht blos auf einen, sondern auf alle Zweige der Curve anwendbar ist.

Wenn die Curve in Beziehung auf eine zu der Axe der x parallele gerade Linie zwei symmetrische Zweige hätte, so hätte f'x zwar zwei gleiche und entgegengesetzte Zahlenwerthe; aber das Quadrat $(f'x)^2$, welches in dem Integrale (s) vorkommt, würde nur einen einzigen Werth haben. Wenn sich in diesem Falle die beiden Curvenzweige in einem zum Anfangspunkte der Bogen genommenen Punkte m_0 (Fig. 82) vereinigten, so müßte die Wurzelgröße R mit dem doppelten Zeichen genommen werden, damit derselben Abscisse $Op=x$ zwei Bogen $m_0\,m$, $m_0\,m'$, wovon der eine positiv und der andere negativ ist, entsprechen könnten.

Wenn dagegen die beiden im Punkte m_0 (Fig. 83) zusammenstoßenden Curvenzweige nicht in Beziehung auf eine zu der Axe der x parallele gerade Linie symmetrisch wären, so würde die Größe $(f'x)^2$ eine Wurzelgröße ϱ ent-

halten, und man müßte alsdann in dem Integrale das Zeichen + der Wurzelgröße R mit dem, dem Curvenzweige $m_0\, m$ entsprechenden Zeichen der Wurzelgröße ϱ, dagegen das Zeichen — der Wurzelgröße R mit dem, dem Curvenzweige $m_0\, m^1$ entsprechenden Zeichen der Wurzelgröße ϱ verbinden, und alle übrigen Verbindungen zwischen den Zeichen dieser Wurzelgrößen müßten als unzulässig verworfen werden.

Man sieht also, daß man, um die analytischen Formeln den Formen der zu rectificirenden Curven entsprechend zu machen, diesen Formeln bald alle algebraische Ausdehnung, welche sie nur gestatten, geben, und bald diese algebraische Allgemeinheit beschränken muß.

§. 344. Wir wollen zunächst die Rectificationsformel auf die gewöhnliche Parabel anwenden, deren Gleichung wir auf folgende Form bringen wollen:

$$y = \frac{m}{2} \cdot x^2.$$

Nimmt man den Anfangspunkt der Bogen im Scheitel der Parabel an, so hat man:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + m^2 x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + m^2 x^2} + \frac{1}{2m} \log. (mx + \sqrt{1 + m^2 x^2}). \qquad (2)$$

Es ist leicht einzusehen, daß dieser Ausdruck denselben Zahlenwerth erhält, aber das Zeichen verändert, wenn man x in — x verwandelt, was auch mit der Lage der Parabel gegen die Axen übereinstimmt. Uebrigens kann man die Wurzelgröße $\sqrt{1 + m^2 x^2}$ nicht negativ nehmen, weil man sonst einen imaginären Logarithmus erhalten würde.

Wir wollen nun die Neil'sche Parabel (§. 197) betrachten, ihrer Gleichung die Form:

$$my^2 = x^3$$

geben und den Anfangspunkt der Coordinaten, welcher ein Wendepunkt der ersten Art ist, zum Anfangspunkte der Bogen nehmen (Fig. 53); so gibt die Formel (s):

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{x}{m}} \cdot dx = \frac{8}{27} \cdot m \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{x}{m}\right)^3} - 1 \right]. \qquad (3)$$

Diese Formel gehört unter den im §. 342 angeführten Ausnahmefall und müßte für s imaginäre Werthe geben, sobald x negative Werthe annähme, während sie einen reellen Werth für s gibt, so lange x zwischen den Grenzen 0 und $-\frac{4}{9} m$ liegt.

Bekanntlich ist die Neil'sche Parabel die Evolute einer gewöhnlichen Parabel (§. 197) und aus der Theorie der Evoluten ebener Curven folgt, daß sich der Unterschied der Krümmungshalbmesser einer algebraischen Curve für zwei verschiedene Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) derselben, oder was dasselbe ist, daß sich die Länge des Bogens der Evolute dieser Curve zwischen den Punkten (ξ_0, η_0), (ξ_1, η_1), welches die den Punkten (x_0, y_0), (x_1, y_1) entsprechenden Krümmungsmittelpunkte der Evolvente sind, immer algebraisch ausdrücken läßt. Andererseits können die Coordinaten ξ_0, η_0; ξ_1, η_1 immer durch die Coordinaten x_0, y_0; x_1, y_1 algebraisch ausgedrückt werden, und

umgekehrt. Folglich müſſen alle Curven, welche Evoluten algebraiſcher Curven ſind, wie die Neil'ſche Parabel, rectificabel ſein, d. h. die Länge ihres Bogens muß ſich durch eine algebraiſche Function der Coordinaten ſeiner Endpunkte ausdrücken laſſen.

Der Theil der Axe der x, deſſen Endpunkte, die Abſciſſen $x = 0$, $x = -\frac{4}{9}m$ haben und in deſſen Ausdehnung die Formel (3) unbrauchbar wird, iſt der Krümmungshalbmeſſer des Scheitels der paraboliſchen Evolvente.

§. 345. Alles im letzten Kapitel über die Eigenſchaften der elliptiſchen Function der zweiten Art Geſagte läßt ſich unmittelbar auf die Vergleichung elliptiſcher Bogen anwenden. So drückt z. B. die Gleichung (12) im §. 334 eine lineare Relation zwiſchen den Längen dreier auf derſelben Ellipſe genommener Bogen, deren Amplituden die drei Seiten eines gewiſſen ſphäriſchen Dreieckes meſſen, aus, und vermöge der Formel (21) wird die Rectification einer beliebigen Ellipſe auf die einer ſehr excentriſchen Ellipſe, deren Bogen faſt mit Theilen der geraden Linie zuſammenfallen, oder umgekehrt auf die Rectification einer ſehr wenig excentriſchen Ellipſe, deren Bogen faſt mit denen des Kreiſes zuſammenfallen, zurückgeführt.

Die Gleichung der auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen bezogenen Hyperbel iſt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und wenn man

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} = c^2, \quad x = \frac{a}{\sin.\varphi}$$

ſetzt, ſo wird die Länge des von dem Scheitel eines Zweiges der Curve aus gezählten Bogens derſelben ausgedrückt durch:

$$s = \frac{1}{c}\int_a^x \sqrt{\frac{x^2 - a^2c^2}{x^2 - a^2}} \cdot dx = -\frac{a}{c}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sin.^2\varphi}.$$

Aber die theilweiſe Integration gibt:

$$\int \sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sin.^2\varphi} = -\cot.\varphi \cdot \sqrt{1 - c^2.\sin.^2\varphi} - c^2\int \frac{\cos.^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi}}$$

und andererſeits hat man:

$$\frac{\cos.^2\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi}} = \frac{1}{c^2} \cdot \sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi} - \frac{1 - c^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi}};$$

folglich:

$$s = \frac{a}{c}\left[\cot.\varphi \cdot \sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi} + E(c,\varphi) - E(c) - (1 - c^2)[F(c,\varphi) - F(c)]\right];$$

ſo daß der Bogen der Hyperbel durch zwei elliptiſche Functionen der erſten und zweiten Art ausgedrückt wird.

Vermittelſt der Gleichungen (17) und (18) im §. 335 kann man die Functionen $F(c,\varphi)$, $F(c)$ fortſchaffen, wodurch man erhält:

$$\frac{cs}{a} = \cot.\varphi \cdot \sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi} - 2c\sin.\varphi + E(c) - E(c,\varphi)$$
$$+ 2(1 + c)\,E(c_1,\varphi_1) - (1 + c)\,E(c_1).$$

Die Rectification der Hyperbel ist also auf die zweier Ellipsen von verschiedenen Excentricitäten zurückgeführt, welcher Lehrsatz von Landen entdeckt ist.

Um zu finden, was in diesem Falle die Amplitude φ bedeutet, wollen wir aus dem Punkte O als Mittelpunkt mit der Halbaxe OA (Fig. 84) als Halbmesser einen Kreis beschreiben, von dem der Abscisse x entsprechenden Punkte m die Ordinate mp fällen und durch den Fußpunkt p derselben eine gerade Linie ziehen, welche den Kreis in t berührt; so ist:

$$x = \frac{a}{\cos. tOp} = \frac{a}{\sin. BOt},$$

und folglich Winkel $BOt = \varphi$.

Wenn man die Ordinate pm bis zum Durchschneiden der Asymptote in n verlängert und die Länge $On = r$ setzt, so ist:

$$r = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2} = \frac{x}{c} = \frac{a}{c \sin. \varphi},$$

folglich:

$$\frac{c}{a}(r - s) = \frac{1 - \cos. \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}}{\sin. \varphi} + 2c \sin. \varphi - E(c) + E(c,\varphi)$$
$$- 2(1 + c) E(c_1,\varphi_1) + (1 + c) E(c_1).$$

Wenn man in diesem Ausdrucke $\varphi = 0$ setzt, welches $x = 0$ entspricht, so hat man:

$$\sin. \varphi = 0, \quad E(c,\varphi) = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad E(c_1,\varphi_1) = 0,$$

während das Glied:

$$\frac{1 - \cos. \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}}{\sin. \varphi}$$

unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, und sich nach der bekannten Regel auf Null reducirt. Man hat also in diesem Falle:

$$\frac{c}{a}(r - s) = (1 + c) E(c_1) - E(c),$$

d. h., wenn die Länge Am, On ohne Ende zunehmen, so convergirt die Differenz On — Am gegen die Grenze:

$$\frac{a}{c}[(1 + c) E(c_1) - E(c)].$$

§. 346. Im §. 180 haben wir für das Differenzial des Bogens einer ebenen Curve, in Polarcoordinaten ausgedrückt, gefunden:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2},$$

und hieraus folgt:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{f\varphi} \cdot d\varphi, \quad \text{oder} \quad s = \int_{r_0}^{r} \sqrt{fr} \cdot dr,$$

je nachdem man die Veränderliche r oder die Veränderliche φ vermittelst der Polargleichung der Curve eliminiren will.

So verwandelt sich z. B. die Gleichung der Lemniscate:

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad (\text{§. } 213)$$

durch Polarcoordinaten ausgedrückt, in:

$$r^2 = a^2(\cos.^2\varphi - \sin.^2\varphi),$$

und wenn man den Punkt A (Fig. 60), wo die Lemniscate die Axe der x schneidet, zum Anfangspunkte der Bogen nimmt, so hat man:

$$\frac{s}{a} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos.^2\varphi - \sin.^2\varphi}}. \qquad (4)$$

Setzt man:

$$\sin.\varphi = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \cdot \sin.\psi,$$

so verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$\frac{s}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin.^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \psi\right). \qquad (5)$$

Die Eigenschaften der elliptischen Function der ersten Art lassen sich also in Eigenschaften der Lemniscate umsetzen, welche in dieser Beziehung sehr merkwürdige Analogieen mit dem Kreise darbietet. Fagnani ist der erste, welcher die Lemniscate in dieser Beziehung untersucht hat, und seine Untersuchungen bilden den Anfang der Theorie der elliptischen Functionen.

Es ist zu bemerken, daß die Gleichungen (4) oder (5) die Werthe von s nur für die zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{1}{4}\pi$ liegenden Werthe von φ, oder für die zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ liegenden Werthe von ψ geben, so daß sie sich nicht über den Inflexionspunkt der Lemniscate erstrecken.

§. 347. Da die Differenzialgleichung der Cycloide:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2Ry - y^2}}{y}$$

ist (§. 177), so hat man, wenn die Bogen vom Anfangspunkte der Coordinaten aus gezählt werden:

$$s = \sqrt{2R} \cdot \int_0^{y} \frac{dy}{\sqrt{2R - y}} = 4R - 2\sqrt{2R} \cdot \sqrt{2R - y}.$$

Dieser Ausdruck von s durch y wird offenbar für negative Werthe von y unbrauchbar, weil die durch die Formel gegebenen zugehörigen Werthe von s reell und negativ würden, obgleich sich die Curve durchaus nicht auf die Seite der negativen y erstreckt. Die letzte Formel gibt den Werth von s auch nur für einen einzigen Cycloidenbogen und hat folglich nicht die der geometrischen Beschreibung der Curve entsprechende Allgemeinheit. Man muß sogar, um die Formel auf einen ganzen Cycloidenbogen zu erstrecken, die in dem Werthe von s vorkommende Wurzelgröße successive mit verschiedenen Zeichen nehmen, und alle diese Anomalien erklären sich nach den weiter oben (§. 342 und 343) gemachten Bemerkungen.

Wenn man $y = 2R$ nimmt, so erhält man die Länge eines halben Cycloidenbogens $s = 4R$, was mit dem bei der Bestimmung der Evolute der Cycloide erhaltenen Resultate übereinstimmt (§. 198).

Der Ausdruck für die Länge des Cycloidenbogens nimmt eine sehr einfache Form an, wenn der Scheitel Q (Fig. 42) eines Cycloidenbogens zum Anfangspunkte der Bogen, sowie auch zum Anfangspunkte der von Q nach S gezählten Ordinaten y genommen wird, d. h., wenn man $4R - s$ für s und $2R - y$ statt y setzt, wodurch man den Werth:

$$s = 2\sqrt{2Ry}$$

erhält, welchen man wegen der Symmetrie der Curve in Beziehung auf die gerade Linie QS mit dem doppelten Zeichen nehmen muß.

Der Bogen der logarithmiſchen Spirale, deren Polargleichung $r = e^{m\varphi}$ iſt (§. 181), wird durch die Formel:

$$s = \int_{\varphi_0}^{x} \sqrt{1+m^2} \cdot e^{m\varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} (e^{m\varphi} - e^{m\varphi_0}) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \cdot (r - r_0)$$

ausgedrückt, welche eine ſehr einfache Folge von der charakteriſtiſchen Eigenſchaft dieſer Spirale iſt, daß ſie alle Radienvectoren unter einem conſtanten Winkel durchſchneidet, deſſen Coſinus $= \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ iſt.

§. 348. Es ſeien $y = fx$, $z = fx$, die Gleichungen einer Curve im Raume, und x_0 ſei die Abſciſſe des Punktes der Curve, welcher zum Anfangspunkte der Bogen genommen wird, ſo hat man (§. 223):

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (f'x)^2 + (f'x)^2} \cdot dx. \qquad (S)$$

Es iſt klar, daß die Wurzelgröße nicht blos in dem Falle, wo $f'x$ und $f'x$ imaginär, aber ihre Quadrate reell ſind, ſondern auch in dem Falle, wo die imaginären Theile von $(f'x)^2$, $(f'x)^2$, abgeſehen vom Zeichen, einander gleich ſind, reell bleiben kann. Alsdann wird die Formel für die Rectification der Curven von doppelter Krümmung ebenſowohl unbrauchbar, als die Formel für die Rectification ebener Curven.

Um von der Formel (S) eine Anwendung zu geben, wollen wir die Schraubenlinie nehmen, welche nach §. 234 durch das Syſtem der drei Gleichungen:

$$x = R \cos. \varphi, \quad y = R \sin. \varphi, \quad z = aR\varphi,$$

ausgedrückt wird, woraus folgt:

$$dx = -R \sin. \varphi d\varphi, \quad dy = R \cos. \varphi d\varphi, \quad dz = aR d\varphi,$$

und folglich iſt:

$$f'x = \frac{dy}{dx} = -\cot. \varphi, \quad f'x = \frac{dz}{dx} = -\frac{a}{\sin. \varphi};$$

$$s = R\sqrt{1+a^2} \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = R\sqrt{1+a^2} \cdot (\varphi - \varphi_0).$$

Denſelben Ausdruck hätte man auch direct erhalten können, wenn man erwägt, daß ſich die Schraubenlinie in eine gerade Linie verwandelt, wenn man die cylindriſche Fläche, in welcher ſie ſich befindet, abwickelt.

III. Cubatur der Rotationskörper.

§. 349. Die Beſtimmung des Volumens eines Rotationskörpers läßt ſich leicht auf die Quadraturen oder auf die Integration der Differenzialfunctionen mit einer einzigen veränderlichen Größe zurückführen; denn wenn man die Rotationsaxe für die der x nimmt und $y = fx$ die Ordinate der Meridiancurve, v das Volumen einer Schicht des Körpers, welche zwiſchen zwei auf der Rotationsaxe ſenkrechten Ebenen liegt, deren Abſciſſen reſp. die Conſtante x_0 und die Veränderliche x ſind, bezeichnet; ſo liegt das Increment Δv zwiſchen dem

Cylinder, deſſen Volumen $= \pi y^2 \Delta x$, und zwiſchen dem Cylinder, deſſen Volumen $= \pi(y+\Delta y)^2 \Delta x$ iſt, wenigſtens wenn man Δx ſo klein nimmt, daß die Ordinate y in dem Intervalle Δx beſtändig zu- oder beſtändig abnimmt. Nun iſt aber:

$$\lim. \frac{\pi y^2 \Delta x}{\pi(y+\Delta y)^2 \Delta x} = 1;$$

folglich:

$$\lim. \frac{\Delta v}{\pi y^2 \Delta x} = 1, \quad \text{oder} \quad dv = \pi y^2 dx,$$

und mithin:

$$v = \pi \int_{x_0}^{x} (fx)^2 dx.$$

Die letzte Formel wird bei geometriſchen Anwendungen unbrauchbar, wenn $(fx)^2$ eine reelle Größe bleibt, wenngleich fx einen imaginären Werth annimmt.

Die Meridiancurve ſei die Ellipſe:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

und wir wollen $x_0 = 0$ ſetzen, ſo erhalten wir den Ausdruck:

$$v = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^x (a^2 - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right),$$

welcher für beliebige Werthe von x reell und für kleinere Werthe von x, als $a\sqrt{3}$, poſitiv bleibt, während ſich die Meridiancurve nicht über die Abſciſſe a hinauserſtreckt. Die Formel gibt das Volumen des ganzen Rotationsellipſoides $= \frac{4}{3}\pi ab^2$.

Wir wollen nun noch das Volumen des ringförmigen Körpers zu beſtimmen ſuchen, welcher durch die Umdrehung des Kreiſes MNM'N' (Fig. 73) um die in der Ebene dieſes Kreiſes gezogene und zur Axe der x genommene gerade Linie PP' beſchrieben wird. Die Axe der y legen wir durch den Mittelpunkt des Kreiſes von dem Halbmeſſer r, indem die Ordinate des Mittelpunktes durch R bezeichnet wird, ſo daß:

$$y_1 = R + \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$y_2 = R - \sqrt{r^2 - x^2},$$

die Ordinaten der Halbkreiſe MNM', MN'M' ſind, und alsdann wird das Volumen des Ringes ausgedrückt durch:

$$v = \pi \int_{-r}^{r} (y_1^2 - y_2^2) dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx.$$

Aber nach §. 338 iſt:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2} r^2 \cdot \text{arc. sin.} \frac{x}{r} + \text{const.};$$

folglich:

$$v = 2\pi^2 r^2 R.$$

IV. Quadratur der Rotationsoberflächen.

§. 350. Wenn man in den Meridiandurchschnitt einer Rotationsoberfläche ein Vieleck beschreibt und sich dasselbe mit der umschriebenen Curve um die Rotationsaxe drehen läßt, so beschreibt jede Vieleckseite die abwickelbare Fläche eines abgestumpften Kegels. Nun versteht man aber unter dem Flächeninhalt einer Rotationsfläche die Gränze, welcher sich die Summe dieser Kegelflächen ohne Ende nähert, wenn die Seiten des eben erwähnten Vieleckes ohne Ende abnehmen, oder wenn sich das in die Meridiancurve beschriebene Vieleck dieser Curve immer mehr und mehr nähert und zuletzt damit zusammenfällt. Diese Definition ist der analog, welche wir im §. 174 von der Länge krummer Linien gegeben haben, und wir werden in dem folgenden Kapitel, wo von der Bestimmung des Flächeninhaltes beliebiger krummer Flächen die Rede sein wird, wieder auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Wenn wir alle Bezeichnungen im vorhergehenden §. beibehalten und mit u den Flächeninhalt des Theiles der Rotationsfläche bezeichnen, welcher zwischen den beiden auf der Axe der x senkrechten Ebenen liegt, so wird der Flächeninhalt der Kegelfläche, welche durch die die beiden Punkte (x,y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ verbindende Seite des eingeschriebenen Vieleckes erzeugt wird, ausgedrückt durch:

$$\pi(2y+\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

und die Grenze ihres Verhältnisses zu dem Increamente Δx ist:

$$=2\pi y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Nach der Definition der Größe u hat man also:

$$\frac{du}{dx}=2\pi y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

woraus folgt:

$$u=2\pi\int_{x_0}^{x} fx\cdot\sqrt{1+(f'x)^2}\cdot dx.$$

Diese Formel kann bei geometrischen Anwendungen für gewisse Werthe von x unbrauchbar werden, wenn die Function unter dem Integralzeichen $\int$ reell bleibt, während fx imaginäre Werthe annimmt.

Wenden wir diese Formel auf das weiter oben betrachtete Rotationsellipsoid an, so haben wir:

$$u=2\pi\frac{b}{a}\cdot\int_0^x\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}\cdot dx.$$

Wir wollen zuvörderst das Ellipsoid länglich oder $a>b$ annehmen und $\frac{a^2-b^2}{a^2}=c^2$ setzen, so kommt:

$$u=\pi b\left(x\sqrt{1-\frac{c^2x^2}{a^2}}+\frac{a}{c}\cdot\text{arc. sin.}\frac{cx}{a}\right).$$

Man könnte der Veränderlichen x Werthe beilegen, welche größer als a und kleiner als $\frac{a}{c}$ sind, ohne daß der Ausdruck von u aufhörte, reell zu sein;

allein man würde alsdann die Grenzen der geometriſchen Bedingungen der Aufgabe überſchreiten. Die vorhergehende Formel gibt für die ganze Oberfläche des länglichen Ellipſoides:

$$2\pi(b^2 + \frac{ab}{c} \text{ arc. sin. } c).$$

Wenn $c = 0$ iſt, ſo hat man $a = b$, $\frac{\text{arc. sin. } c}{c} = 1$, und man erhält den bekannten Ausdruck für die Kugeloberfläche wieder.

Wir wollen zweitens das Ellipſoid abgeplattet oder $a < b$ annehmen und $\frac{b^2 - a^2}{b^2} = c^2$ ſetzen, ſo erhalten wir den Ausdruck:

$$u = \pi b\left[x\sqrt{1 + \frac{b^2c^2x^2}{a^4}} + \frac{a^2}{bc}\log.\left(\frac{bcx}{a^2} + \sqrt{1 + \frac{b^2c^2x^2}{a^4}}\right)\right],$$

welcher für beliebige Werthe von x reell bleibt, und woraus ſich die ganze Oberfläche des abgeplatteten Ellipſoides

$$2\pi\left[b^2 + \frac{a^2}{2c}\log.\left(\frac{1+c}{1-c}\right)\right]$$

ergibt. Wenn $c = 0$ iſt, ſo findet man, daß der Ausdruck:

$$\frac{\log.\left(\frac{1+c}{1-c}\right)}{c} = 2$$

iſt, und man kommt auf dieſe Weiſe wieder auf den bekannten Ausdruck für die Kugeloberfläche.

Die durch die Umdrehung des Kreiſes MNM'N' (Fig. 73) erzeugte ringförmige Fläche wird ausgedrückt durch:

$$2\pi\int_{-r}^{r}\left[y_1\sqrt{1 + \frac{dy_1^2}{dx^2}} + y_2\sqrt{1 + \frac{dy_2^2}{dx^2}}\right]dx$$

$$= 4\pi rR\int_{-r}^{r}\frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4\pi^2 rR,$$

d. h. durch das Product der beiden Kreisumfänge, deren Halbmeſſer r und R ſind.

Sechstes Kapitel.

Vielfache beſtimmte Integrale. — Geometriſche und phyſikaliſche Anwendungen derſelben. —

§. 351. Es ſei $f(x,y)$ eine Function mit zwei unabhängigen Veränderlichen x,y, welche nach der Vorausſetzung innerhalb der Grenzen x_0, x; y_0, y immer endliche Werthe behält; ſo kann man zunächſt die Summe der un-

endlich kleinen Werthe von $f(x,y)\,dy$ zwiſchen den Grenzen y_0, y nehmen, und dieſe Summe oder das beſtimmte Integral:

$$\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy$$

iſt alsdann eine gewiſſe Function von x. Wenn man hierauf die Summe der unendlich kleinen Werthe von:

$$\left(\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\right)dx$$

zwiſchen den Grenzen x_0, x, oder das doppelte beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

oder, indem man der Kürze wegen die Klammern wegläßt:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx, \qquad (a)$$

nimmt, ſo iſt dieſe Summe offenbar die Summe aller unendlich kleinen Werthe der zweiten Ordnung, welche die Function:

$$f(x,y)\,dy\,dx$$

annimmt, wenn man darin x ſich zwiſchen den Grenzen x_0, x nach unendlich kleinen Incrementen dx, und y zwiſchen den Grenzen y_0, y ſich nach unendlich kleinen Incrementen dy ändern läßt.

Mit andern Worten, wenn man das Intervall $x - x_0$ in m gleiche Theile Δx, und das Intervall $y - y_0$ in n gleiche Theile Δy theilt und die Summe aller Werthe der Function:

$$f(x,y)\,\Delta y\,\Delta x \qquad (b)$$

nimmt, indem man alle Werthe von x in der Reihe:

$$x_0,\ x_0 + \Delta x,\ x_0 + 2\Delta x, \ldots x_0 + (m-1)\,\Delta x$$

mit allen Werthen von y in der Reihe:

$$y_0,\ y_0 + \Delta y,\ y_0 + 2\Delta y, \ldots y_0 + (n-1)\,\Delta y$$

verbindet; ſo convergirt dieſe Summe deſto mehr gegen eine gewiſſe Grenze, welche der genaue Werth des doppelten Integrales (a) iſt, je größer die Zahlen m und n, oder je kleiner die Differenzen Δx, Δy genommen werden.

Hieraus folgt, daß die Ordnung der Integrationen auf den Werth des doppelten Integrales keinen Einfluß hat und daß man folglich ohne Unterſchied

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx, \quad \text{oder} \quad \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx\,dy$$

ſchreiben kann.

§. 352. Wenn man die Fläche conſtruirt, deren rechtwinklige Coordinaten x, y und $z = f(x,y)$ ſind; ſo drückt die Größe (b) das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedums aus, welches das Product $\Delta x \cdot \Delta y$ zur Grundfläche und die Ordinate z zur Höhe hat. Die Durchſchnittslinie der Seitenflächen dieſes Parallelepipedums mit der krummen Oberfläche bilden ein krummliniges Viereck, deſſen Projection auf die Ebene der xy das Rechteck $\Delta x \cdot \Delta y$ iſt. Das Volumen zwiſchen dieſen Seitenflächen, der Grundfläche des Parallelepipedums (b) und der Fläche $z = f(x,y)$ iſt von dem Volumen des Parallelepipedums (b) nur um ein gewiſſes Volumen (β), kleiner als

$\Delta x \cdot \Delta y \cdot (\Delta z)$ verſchieden, wo (Δz) den Unterſchied der äußerſten Werthe bezeichnet, welche die Ordinate z für die Punkte der krummen Oberfläche annimmt, die ſich auf der Ebene der xy in das Innere oder auf den Umfang des Rechteckes $\Delta x \Delta y$ projiciren. Wenn die Function z keine Unterbrechung der Stetigkeit von der erſten Ordnung erfährt; ſo iſt (Δz) eine Größe von derſelben Größenordnung als Δx, Δy. Wenn alſo Δx, Δy ſehr kleine Größen der erſten Ordnung ſind, in welchem Falle das Volumen des Parallelepipedums (b) eine ſehr kleine Größe der zweiten Ordnung iſt; ſo reducirt ſich das Volumen (β) auf eine ſehr kleine Größe der dritten Ordnung. Das Integral (a), welches die Grenze iſt, gegen welche die Summe der Größen (b) ohne Ende convergirt, wenn die Dimenſionen Δx, Δy ohne Ende abnehmen, iſt alſo das Maß des Volumens, welches von der Ebene der xy, von der krummen Fläche und von vier Ebenen begrenzt wird, wovon zwei in den Entfernungen y_0, y zu der Ebene der xz parallel gelegt ſind.

Der Quotient:

$$\frac{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dx\,dy}{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} dy\,dx} = \frac{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx}{(x-x_0)(y-y_0)}$$

drückt auch das Mittel aus allen unendlich vielen Werthen aus, welche die Höhe z, oder allgemeiner, die Function $f(x,y)$, welche irgend eine geometriſche oder phyſicaliſche Bedeutung haben kann (§. 33) für alle Punkte der Ebene der xy annimmt, welche innerhalb des Rechteckes liegen, welches durch den Durchſchnitt dieſer Ebene mit den vier oben erwähnten ſenkrechten Ebenen gebildet wird.

§. 353. Wenn man die in dem Ausdrucke (a) angedeuteten beiden Integrationen verrichtet hat, ſo iſt das erhaltene Reſultat eine Function der obern Grenzen x, y, welches wir mit $F(x,y)$ bezeichnen wollen, ſo daß nach der Definition:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy, \quad \frac{dF(x,y)}{dy} = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx,$$

$$\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy} = \frac{d^2F(x,y)}{dy\,dx} = f(x,y) \qquad (c)$$

iſt.

Wenn man durch irgend welches Mittel eine Function $F(x,y)$ finden könnte, welche der Gleichung (c) genügte, ſo würde, wenn die Function $f(x,y)$ gegeben iſt, jede andere Function von der Form:

$$F(x,y) + \varphi x + \psi y, \qquad (c_1)$$

wo φ, ψ ganz willkürliche Functionen bezeichnen, der Gleichung (c) ebenfalls Genüge leiſten. Denn wenn man von der Function (c_1) die partielle Ableitung in Beziehung auf x nimmt, ſo verſchwindet die Function ψy, und wenn man hierauf von der Function:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} + \frac{d\varphi x}{dx}$$

die partielle Ableitung in Beziehung auf y nimmt, ſo verſchwindet die Function $\frac{d\varphi x}{dx}$, und das Reſultat würde ganz daſſelbe ſein, wenn man die beiden Differenziationen in umgekehrter Ordnung verrichtete.

Um eine Function $F(x,y)$ zu finden, welche der Gleichung (c) Genüge leiſtet, braucht man zuvörderſt nur das unbeſtimmte Integral:

$$\int f(x,y)\,dy$$

zu nehmen, indem man x als eine Conſtante betrachtet, und nachdem man das erhaltene Reſultat mit dx multiplicirt hat, wieder das unbeſtimmte Integral von dieſer Differenzialfunction zu nehmen, indem man bei der zweiten Integration x als veränderlich, und y als conſtant betrachtet. Man deutet dieſe doppelte Operation durch:

$$\iint f(x,y)\,dy\,dx \qquad \text{(d)}$$

an, und wenn man die unbeſtimmten Integrationen in einer umgekehrten Ordnung vornähme, wie es der Ausdruck:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

andeutet, ſo könnte ſich die erhaltene Function $F_1(x,y)$ von der im erſten Falle erhaltenen Function $F(x,y)$ nur durch das Hinzukommen der Glieder von der Form:

$$\varphi x + \psi y + \text{const.},$$

welche durch zwei partielle Differenziationen, die eine in Beziehung auf x und die andere in Beziehung auf y verſchwinden, unterſcheiden. Der Ausdruck (d) iſt der eines doppelten unbeſtimmten Integrales.

§. 354. Kommen wir nun wieder auf die beſtimmten Integrationen zurück, welche den ſpeciellen Gegenſtand dieſes Kapitels bilden. Statt das Integral:

$$\int f(x,y)\,dy$$

zwiſchen Grenzen y_0, y_1 zu nehmen, welche ſich nicht mit x ändern, könnte man es zwiſchen veränderlichen Grenzen $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$ nehmen, und alsdann wäre das beſtimmte Integral:

$$\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x,y)\,dy$$

ebenfalls noch eine Function, worin die Veränderliche x allein vorkäme. Wenn man in Beziehung auf x zwiſchen den Grenzen x_0, x_1 ein zweites Mal integrirte, ſo erhielte man das doppelte beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x,y)\,dy\,dx = V,$$

und um ſich von dem Reſultate dieſer Operation einen klaren Begriff zu bilden, kann man ſich vorſtellen, daß die Grenzwerthe x_0, x_1 durch die Abſciſſen Op_0, Op_1 (Fig. 80), die Functionen $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$ durch die Ordinaten der Linien $m_0 n_0 m_1$, $m_0 n_1 m_1$ oder ihrer Theile, und endlich die Function $f(x,y) = z$ durch die auf der Ebene der xy ſenkrechte Ordinate einer krummen Oberfläche dargeſtellt werden; ſo drückt nach dem im vorletzten §. Geſagten das Integral V das Volumen aus, welches von der Ebene der xy, von der krummen Fläche, deren Ordinate z iſt, und endlich von einer cylindriſchen Fläche, deren Normaldurchſchnitt der Umfang $m_0 n_0 m_1 n_1$ iſt, eingeſchloſſen wird.

Allgemeiner, wenn A die von dieſem Umfange eingeſchloſſene Fläche bezeichnet, ſo drückt das Verhältniß $\frac{V}{A}$ das Mittel aus allen unendlich vielen Werthen aus, welches die Function $f(x,y)$, die eine beliebige geometriſche oder

phyſikaliſche Bedeutung haben kann, für alle Punkte (x,y), welche in dem von dieſem Umfange eingeſchloſſenen Raume liegen, annimmt.

Uebrigens kann das Integral V reell ſein, obgleich die Function $f(x,y)$ imaginäre Werthe annimmt, oder ſelbſt innerhalb der Integrationsgrenzen beſtändig imaginär bleibt, und alsdann hat dieſes Integral keine geometriſche oder phyſikaliſche Bedeutung mehr.

Zu der Axe der x wollen wir die geraden Linien $n_0 q_0$, $n_1 q_1$, parallel ziehen, welche den Umfang begrenzen und mit y_0, y_1 die Ordinaten Oq_0, Oq_1, ſowie durch $\psi_0 y$, $\psi_1 y$ die Werthe der Abſciſſe x als Function von y für die Linienſtücke $n_0 m_0 n_1$, $n_0 m_1 n_1$ bezeichnen; ſo haben wir offenbar:

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{\psi_0 y}^{\psi_1 y} f(x,y)\,dxdy = \int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x,y)\,dydx = V.$$

§. 355. Wenn die Function $f(x,y)$ innerhalb der doppelten Integrationsgrenzen durch das Unendliche geht, ſo kann das Integral nicht mehr als eine Summe von Elementen betrachtet werden und alle ſich auf dieſe Betrachtungen gründenden Schlüſſe werden unzuläſſig. So hat z. B. Cauchy zuerſt bemerkt, daß die doppelte Integration in dieſem Falle verſchiedene Reſultate geben kann, wenn man die einfachen Integrationen in verſchiedener Ordnung verrichtet.

Wir wollen z. B. das doppelte Integral:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

nehmen, für welches der Coefficient von $dxdy$ unendlich wird, wenn man $x=0$, $y=0$ ſetzt. Integrirt man zuerſt in Beziehung auf die Veränderliche x, ſo hat man:

$$\int \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+y^2} + \text{const.}, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{2}{1+y^2}$$

und wenn man alsdann in Beziehung auf y integrirt, ſo erhält man:

$$2\int_{-1}^{1} \frac{dy}{1+y^2} = \pi.$$

Wenn die Integrationen in einer umgekehrten Ordnung verrichtet werden, ſo erhält man dagegen:

$$\int \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -\frac{y}{x^2+y^2} + \text{const.}, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -\frac{2}{1+x^2}$$

$$-2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -\pi,$$

ſo daß der Unterſchied der beiden erhaltenen Werthe $= 2\pi$ iſt.

Wir wollen durch $F(x,y)$ eine Function von ſolcher Beſchaffenheit bezeichnen, daß

$$\frac{d^2F(x,y)}{dxdy} = f(x,y)$$

iſt, und es ſei:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \varphi(x,y), \qquad \frac{dF(x,y)}{dy} = \psi(x,y),$$

oder, was daſſelbe iſt,

$$\varphi(x,y) = \int f(x,y)\,dy, \qquad \psi(x,y) = \int f(x,y)\,dx,$$

Um eine Function $F(x,y)$ zu finden, welche der Gleichung (c) Genüge leiſtet, braucht man zuvörderſt nur das unbeſtimmte Integral:

$$\int f(x,y)\,dy$$

zu nehmen, indem man x als eine Conſtante betrachtet, und nachdem man das erhaltene Reſultat mit dx multiplicirt hat, wieder das unbeſtimmte Integral von dieſer Differenzialfunction zu nehmen, indem man bei der zweiten Integration x als veränderlich, und y als conſtant betrachtet. Man deutet dieſe doppelte Operation durch:

$$\iint f(x,y)\,dy\,dx \qquad (d)$$

an, und wenn man die unbeſtimmten Integrationen in einer umgekehrten Ordnung vornähme, wie es der Ausdruck:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

andeutet, ſo könnte ſich die erhaltene Function $F_1(x,y)$ von der im erſten Falle erhaltenen Function $F(x,y)$ nur durch das Hinzukommen der Glieder von der Form:

$$\varphi x + \psi y + \text{const.},$$

welche durch zwei partielle Differenziationen, die eine in Beziehung auf x und die andere in Beziehung auf y verſchwinden, unterſcheiden. Der Ausdruck (d) iſt der eines **doppelten unbeſtimmten Integrales.**

§. 354. Kommen wir nun wieder auf die beſtimmten Integrationen zurück, welche den ſpeciellen Gegenſtand dieſes Kapitels bilden. Statt das Integral:

$$\int f(x,y)\,dy$$

zwiſchen Grenzen y_0, y_1 zu nehmen, welche ſich nicht mit x ändern, könnte man es zwiſchen veränderlichen Grenzen $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$ nehmen, und alsdann wäre das beſtimmte Integral:

$$\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x,y)\,dy$$

ebenfalls noch eine Function, worin die Veränderliche x allein vorkäme. Wenn man in Beziehung auf x zwiſchen den Grenzen x_0, x_1 ein zweites Mal integrirte, ſo erhielte man das doppelte beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x,y)\,dy\,dx = V,$$

und um ſich von dem Reſultate dieſer Operation einen klaren Begriff zu bilden, kann man ſich vorſtellen, daß die Grenzwerthe x_0, x_1 durch die Abſciſſen Op_0, Op_1 (Fig. 80), die Functionen $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$ durch die Ordinaten der Linien $m_0 n_0 m_1$, $m_0 n_1 m_1$ oder ihrer Theile, und endlich die Function $f(x,y) = z$ durch die auf der Ebene der xy ſenkrechte Ordinate einer krummen Oberfläche dargeſtellt werden; ſo drückt nach dem im vorletzten §. Geſagten das Integral V das Volumen aus, welches von der Ebene der xy, von der krummen Fläche, deren Ordinate z iſt, und endlich von einer cylindriſchen Fläche, deren Normaldurchſchnitt der Umfang $m_0 n_0 m_1 n_1$ iſt, eingeſchloſſen wird.

Allgemeiner, wenn A die von dieſem Umfange eingeſchloſſene Fläche bezeichnet, ſo drückt das Verhältniß $\frac{V}{A}$ das Mittel aus allen unendlich vielen Werthen aus, welches die Function $f(x,y)$, die eine beliebige geometriſche oder

phyſikaliſche Bedeutung haben kann, für alle Punkte (x,y), welche in dem von dieſem Umfange eingeſchloſſenen Raume liegen, annimmt.

Uebrigens kann das Integral V reell ſein, obgleich die Function $f(x,y)$ imaginäre Werthe annimmt, oder ſelbſt innerhalb der Integrationsgrenzen beſtändig imaginär bleibt, und alsdann hat dieſes Integral keine geometriſche oder phyſikaliſche Bedeutung mehr.

Zu der Axe der x wollen wir die geraden Linien $a_0 q_0$, $a_1 q_1$, parallel ziehen, welche den Umfang begrenzen und mit y_0, y_1 die Ordinaten Oq_0, Oq_1, ſowie durch $\psi_0 y$, $\psi_1 y$ die Werthe der Abſciſſe x als Function von y für die Linienſtücke $a_0 m_0 a_1$, $a_0 m_1 a_1$ bezeichnen; ſo haben wir offenbar:

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{\psi_0 y}^{\psi_1 y} f(x,y)\,dxdy = \int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x,y)\,dydx = V.$$

§. 355. Wenn die Function $f(x,y)$ innerhalb der doppelten Integrationsgrenzen durch das Unendliche geht, ſo kann das Integral nicht mehr als eine Summe von Elementen betrachtet werden und alle ſich auf dieſe Betrachtungen gründenden Schlüſſe werden unzuläſſig. So hat z. B. Cauchy zuerſt bemerkt, daß die doppelte Integration in dieſem Falle verſchiedene Reſultate geben kann, wenn man die einfachen Integrationen in verſchiedener Ordnung verrichtet.

Wir wollen z. B. das doppelte Integral:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

nehmen, für welches der Coefficient von $dxdy$ unendlich wird, wenn man $x=0$, $y=0$ ſetzt. Integrirt man zuerſt in Beziehung auf die Veränderliche x, ſo hat man:

$$\int \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+y^2} + \text{const.}, \quad \int_{-1}^{1} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{2}{1+y^2}$$

und wenn man alsdann in Beziehung auf y integrirt, ſo erhält man:

$$2\int_{-1}^{1} \frac{dy}{1+y^2} = \pi.$$

Wenn die Integrationen in einer umgekehrten Ordnung verrichtet werden, ſo erhält man dagegen:

$$\int \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -\frac{y}{x^2+y^2} + \text{const.}, \quad \int_{-1}^{1} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -\frac{2}{1+x^2}$$

$$-2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -\pi,$$

ſo daß der Unterſchied der beiden erhaltenen Werthe $= 2\pi$ iſt.

Wir wollen durch $F(x,y)$ eine Function von ſolcher Beſchaffenheit bezeichnen, daß

$$\frac{d^2F(x,y)}{dxdy} = f(x,y)$$

iſt, und es ſei:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \varphi(x,y), \quad \frac{dF(x,y)}{dy} = \psi(x,y),$$

oder, was daſſelbe iſt,

$$\varphi(x,y) = \int f(x,y)\,dy, \quad \psi(x,y) = \int f(x,y)\,dx,$$

ſo kann das doppelte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dydx$$

ſowohl durch:

$$\int_{x_0}^{x_1}[\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]\,dx,$$

als durch:

$$\int_{y_0}^{y_1}[\psi(x_1,y)-\psi(x_0,y)]\,dy$$

ausgedrückt werden, ſo daß im Allgemeinen, wofern $f(x,y)$ nicht durch das Unendliche geht, innerhalb der Ausdehnung der doppelten Integration

$$\int_{x_0}^{x_1}[\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]\,dx=\int_{y_0}^{y_1}[\psi(x_1,y)-\psi(x_0,y)]\,dy$$

iſt.

Wir wollen nun annehmen, daß $f(x,y)$ für $x=\xi$, $y=\eta$ unendlich wird und durch ε eine poſitive Zahl bezeichnen, welche ohne Ende gegen Null convergirt; ſo hat man nach der vorhergehenden Gleichung:

$$\int_{x_0}^{\xi-\varepsilon}[\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]\,dx+\int_{\xi+\varepsilon}^{x}[\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]\,dx$$

$$=\int_{y_0}^{y_1}[\psi(x_1,y)-\psi(\xi+\varepsilon,y+\psi(\xi-\varepsilon,y)-\psi(x_0,y)]\,dy$$

$$=\int_{y_0}^{y_1}[\psi(x_1,y)-\psi(x_0,y)]\,dy-\int_{y_0}^{y_1}[\psi(\xi+\varepsilon,y)-\psi(\xi-\varepsilon,y)]dy;$$

und an der Grenze hat man:

$$\int_{x_0}^{x_1}[\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]\,dx=\int_{y_0}^{y_1}[\psi(x_1,y)-\psi(x_0,y)]\,dy$$

$$-\lim.\int_{y_0}^{y_1}[\psi(\xi+\varepsilon,y)-\psi(\xi-\varepsilon,y)]\,dy$$

oder:

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dydx-\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\lim.\int_{y_0}^{y_1}[\psi(\xi+\varepsilon,y)-\psi(\xi-\varepsilon,y)]\,dy.$$

Um die angedeutete Grenze zu erhalten, muß man erſt nach verrichteter Integration in Beziehung auf y die Größe $\varepsilon=0$ ſetzen, weil die Function $\psi(x,y)$ nach der Vorausſetzung für einen zwiſchen den Integrationsgrenzen liegenden Werth von y unendlich wird (§. 323).

In dem weiter oben angeführten Beiſpiele hat man:

$$\psi(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \xi=0$$

$$\psi(\xi+\varepsilon,y)-\psi(\xi-\varepsilon,y)=\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2},$$

$$2\int_{-1}^{1}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}\,dy = 2\left[\text{arc. tang.}\frac{1}{\varepsilon} - \text{arc. tang.}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right],$$

welcher Werth ſich an der Grenze auf 2π reducirt, wenn man $\varepsilon = 0$ ſetzt, wie man durch directe Berechnung des doppelten Integrales findet, indem man die einfachen Integrale ſucceſſive in verſchiedenen Ordnungen nimmt.

Das einfache Integral:

$$\int_{y_0}^{y_1}[\psi(\xi+\varepsilon,y) - \psi(\xi-\varepsilon,y)]\,dy$$

gehört zu denen, welche man ſinguläre genannt hat, und da die Größe ε als unendlich klein betrachtet wird, ſo ſind alle Elemente dieſes Integrales Null, mit Ausnahme des einzigen, welches dem Werthe $y = \eta$ entſpricht, für welchen der Coefficient von dy unendlich wird.

Wenn man in einer umgekehrten Ordnung integrirte, ſo käme man auf das ſinguläre Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1}[\varphi(x,\eta+\varepsilon) - \varphi(x,\eta-\varepsilon)]\,dx = -2\pi.$$

Wenn innerhalb der doppelten Integrationsgrenzen mehrere Syſteme von Werthen von x,y vorkommen, für welche die Function $f(x,y)$ unendlich wird, ſo beſteht der Unterſchied zwiſchen den beiden Werthen, welche man für das doppelte Integral nach den verſchiedenen Ordnungen der einfachen Integrationen erhält, aus ſo vielen ſingulären Integralen, als es Syſteme ſolcher Werthe gibt.

§. 356. Wenn die Linie $m_0n_0m_1n_1$ (Fig. 85), welche die Ausdehnung des doppelten Integrales:

$$V = \iint f(x,y)\,dydx$$

begrenzt, durch eine Gleichung $r = f\varphi$ zwiſchen Polarcoordinaten gegeben iſt, ſo kann man für das Flächenelement, in deſſen Ausdehnung die doppelte Integrationen verrichtet wird, ſtatt des unendlich kleinen Rechteckes $dydx$ die Fläche $m\mu\nu n$ nehmen, welche von zwei Radienvectoren Omn, $O\mu\nu$, die einen unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ mit einandre bilden, und von zwei Kreisbogen $m\mu$, $n\nu$, wovon der eine mit dem Halbmeſſer $Om = r$ und der andere mit dem Halbmeſſer $On = r + dr$ beſchrieben iſt, eingeſchloſſen wird. Der Flächeninhalt dieſes Theiles des Kreisausſchnittes wird ausgedrückt durch:

$$\tfrac{1}{2}d\varphi[(r+dr)^2 - r^2],$$

oder blos durch $rdr\,d\varphi$, wenn man die unendlich kleine Größe der dritten Ordnung vernachläſſigt. Wenn man folglich mit $F(r,\varphi)$ den Werth von $f(x,y)$ nach der Subſtitution der durch r,φ ausgedrückten Werthe von x,y bezeichnet, ſo erhält man:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{f\varphi} F(r,\varphi)\,rdrd\varphi.$$

Wenn die Function $F(r,\varphi)$ ſich auf die Einheit reducirt, ſo drückt das Integral V blos die von der Curve $r = f\varphi$ begrenzte Fläche aus, und man hat:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(f\varphi)^2 d\varphi,$$

was mit §. 180 übereinſtimmt.

Der Einfachheit wegen haben wir vorausgeſetzt: 1) daß der Anfangspunkt der Radienvectoren innerhalb der von der Curve $r = f\varphi$ eingeſchloſſenen Fläche

liegt, und 2) daß der Radiusvector für jeden Werth von φ nur einen einzigen reellen und positiven Werth hat. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt werden, so müssen die Integrale zwischen andern Grenzen genommen werden, welche sich in jedem besondern Falle leicht angeben lassen.

§. 357. Im Allgemeinen kann es geschehen, daß durch die Vertauschung der Veränderlichen, welcher im geometrischen Sinne einer Coordinatenverwandlung entspricht, die Bestimmung des Integrales V vereinfacht wird, und in jedem Falle ist es von Wichtigkeit, zu untersuchen, was dieses Integral durch eine Vertauschung der Veränderlichen wird. Es seien daher α, β zwei neue Veränderliche, welche mit x,y durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(\alpha,\beta), \quad y = \psi(\alpha,\beta)$$

verbunden sind, und wir wollen setzen:

$$f(x,y) = F(\alpha,\beta)$$
$$dx = \varphi_1 d\alpha + \varphi_2 d\beta \qquad (e)$$
$$dy = \psi_1 d\alpha + \psi_2 d\beta. \qquad (f)$$

Um zunächst das Differenzial dy aus dem Integrale V wegzuschaffen, bemerke man, daß bei der Bestimmung dieses Differenzials x als constant betrachtet und folglich dx gleich Null oder

$$\varphi_1 d\alpha + \varphi_2 d\beta = 0$$

gesetzt ist.
Zieht man aus dieser Gleichung den Werth von $d\beta$ und substituirt denselben in die Gleichung (f); so hat man:

$$dy = \frac{\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1}{\varphi_2} d\alpha,$$

welches gibt:

$$dydx = \frac{\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1}{\varphi_2} d\alpha dx,$$

$$V = \int\int F(\alpha,\beta) \cdot \frac{\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1}{\varphi_2} d\alpha dx.$$

Nun muß man das Differenzial dx nehmen, indem man α als eine constante Größe betrachtet, oder in der Gleichung (e) das Differenzial $d\alpha = 0$, also $dx = \varphi_2 d\beta$ setzt; und folglich ist:

$$V = \int\int F(\alpha,\beta) \cdot (\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1) d\alpha d\beta.$$

Wenn man die Differenziale dx, dy in einer umgekehrten Ordnung eliminirt hätte, so würde man den Ausdruck:

$$V = \int\int F(\alpha,\beta) \cdot (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) d\alpha d\beta$$

erhalten haben, welcher sich von dem vorhergehenden nur durch das Zeichen unterscheidet. Da nun das zwischen denselben Grenzen als V genommene Integral:

$$\int\int dydx = \int\int (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) d\alpha d\beta$$

das Maß einer Fläche ist, welche selbst die Ausdehnung des Integrales V mißt, so muß man nur den absoluten Werth dieses Integrales betrachten und das Zeichen des Factors $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ ist gleichgültig.
Wenn man:

$$\alpha = r, \quad \beta = \varphi, \quad x = r\cos.\varphi, \quad y = r\sin.\varphi$$

setzt, so hat man:

$$\varphi_1 = \cos.\varphi, \quad \psi_1 = \sin.\varphi, \quad \varphi_2 = -r\sin.\varphi, \quad \psi_2 = r\cos.\varphi;$$

folglich:

$$\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 = r\cos.^2\varphi + r\sin.^2\varphi = r,$$

wie man durch geometriſche Betrachtungen, welche zu einfach ſind, als daß ſie ſich nicht hätten zuerſt darbieten ſollen, direct gefunden hat.

§. 358. Um ein Anwendungsbeiſpiel von der Berechnung der doppelten Integrale auf die Cubatur der von beliebigen krummen Flächen begrenzten Körper zu geben, wollen wir das Volumen des Ellipſoides mit drei ungleichen Axen beſtimmen, deſſen Oberfläche, auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen bezogen, durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{oder} \quad z = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2} - y^2}$$

ausgedrückt wird.

Die Gleichung des Durchſchnittes der krummen Fläche mit der Ebene der xy iſt:

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

und wenn man folglich der Kürze wegen

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = u$$

ſetzt; ſo wird die Schicht des Ellipſoides zwiſchen zwei zu der Ebene der yz parallelen und den Abſciſſen x_0, x entſprechenden Ebenen ausgedrückt durch:

$$V = \frac{2c}{b}\int_{x_0}^{x}\int_{-u}^{u}\sqrt{u^2 - y^2}\cdot dy\,dx.$$

Nun iſt aber:

$$\int_{-u}^{u}\sqrt{u^2 - y^2}\cdot dy = \frac{\pi}{2}u^2 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

folglich:

$$V = \pi\,\frac{bc}{a^2}\int_{x_0}^{x}(a^2 - x^2)\,dx = \pi bc\left[x - x_0 - \frac{1}{3a^2}(x^3 - x^3{}_0)\right].$$

Der Werth von V bleibt für beliebige Werthe von x_0, x reell; aber er verliert ſeine geometriſche Bedeutung, wenn man den Größen x_0, x größere Zahlenwerthe beilegt, als a, und wenn man $x_0 = -a$, $x = a$ ſetzt, ſo erhält man das Volumen des ganzen Ellipſoides $= \frac{4}{3}\pi abc$.

II. Beſtimmung des Flächeninhaltes beliebiger krummer Flächen.

§. 359. Wenn eine beliebige krumme Fläche S gegeben iſt, und man legt durch einander ſehr nahe liegende Punkte derſelben Berührungsebenen an ſie, ſo durchſchneiden ſich dieſe Ebenen gegenſeitig und bilden ein Polyeder mit ſehr kleinen Flächen, welches die krumme Fläche S umſchließt und ſich derſelben deſto mehr nähert, je näher die Punkte, an welche man Berührungsebenen gelegt hat, einander liegen. Einem begrenzten Theile der krummen Fläche S, wie er z. B. von einer cylindriſchen Fläche davon abgeſchnitten wird, deren gerader Durchſchnitt mit der Ebene der xy eine geſchloſſene Curve iſt, entſpricht auch ein begrenzter Theil der umgebenden polyederſchen Fläche,

nämlich der Theil, welcher von derſelben cylindriſchen Fläche davon abgeſchnitten wird. Nun verſteht man aber unter dem Flächeninhalte des betrachteten Theiles der krummen Fläche die Grenze Ω, welcher ſich der Flächeninhalt des correſpondirenden Theiles der umſchließenden polyederſchen Fläche ohne Ende nähert, wenn die Flächen der letztern in Folge der unbegrenzten gegenſeitigen Annäherung der Berührungspunkte der krummen mit der polyederſchen Fläche ohne Ende abnehmen.

Wir wollen in dem Punkte (x, y, z) an die krumme Fläche S eine Berührungsebene legen und die Projection dieſes Punktes auf die Ebene der xy für eine der Winkelſpitzen des Rechteckes, deſſen Seiten Δx, Δy reſp. zu den Axen der x und der y parallel ſind, nehmen (§. 352), ſo ſchneiden die durch die Seiten dieſes Rechteckes ſenkrecht auf die Ebene der xy gelegten Ebenen auf der krummen Fläche S ein Stück $\Delta\Omega$ und auf der Berührungsebene im Punkte (x, y, z) ein Parallelogramm ab, deſſen Flächeninhalt nach einem bekannten geometriſchen Lehrſatze durch:

$$\frac{\Delta y \Delta x}{\cos. \nu}$$

ausgedrückt wird, wo ν den ſpitzen Winkel bezeichnet, welchen die Berührungsebene mit der Ebene der xy bildet, oder vielmehr durch:

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot \Delta y \Delta x.$$

Folglich hat man nach der Definition der nun als Function der unabhängig veränderlichen Coordinaten x,y betrachteten Größe Ω:

$$d\Omega = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dy dx, \qquad (\omega)$$

alſo:

$$\Omega = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dy dx. \qquad (\Omega)$$

Aus der Gleichung der krummen Fläche leitet man die Werthe der partiellen Ableitungen p, q als Functionen von x, y ab, und die Grenzen der doppelten Integration werden durch den Umfang der Linie beſtimmt, welche die Projection des Theiles der krummen Oberfläche, deſſen Flächeninhalt Ω man beſtimmen will, auf der Ebene der xy umſchließt.

Die Elemente $d\Omega$ können unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung ſein, ſelbſt wenn die Ableitungen p, q unendlich werden, wenn nur die Ordinate z einen endlichen Werth behält (§. 342), oder wenn ſie keine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung erfährt.

Die Ordinate z und die partiellen Ableitungen p, q können imaginäre Werthe annehmen, ohne daß die Elemente $d\Omega$ aufhören, reelle Werthe zu haben, und alsdann wird die Formel (Ω) für geometriſche Anwendungen unbrauchbar.

Wir betrachten die Gleichung (ω) als die Definition der Function Ω, ganz ebenſo, wie wir die Gleichung:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

als die Definition der Function s betrachtet haben. Die phyſiſche Definition, welche man von der Länge eines Curvenbogens gibt, indem man ſich dieſe Curve als einen vollkommen biegſamen und unausdehnbaren Faden, oder vielmehr als einen Faden, deſſen Steifigkeit und Ausdehnbarkeit unmerklich ſind, vorſtellt, läßt ſich nicht auf krumme Flächen ausdehnen, wofern es nicht abwickelbare ſind, und hieraus ſelbſt können wir ſchließen, daß ſie nicht die wahre Definition der Function s iſt; denn die mathematiſche Analogie zwiſchen den

Functionen s, Ω muß sich in den Definitionen dieser beiden Größen wieder vorfinden, wenn sich diese Definitionen auf das Wesentliche der Natur der definirten Größen, und nicht auf ein zufälliges oder secundäres Merkmal derselben gründen.

§. 360. Wir wollen nun nach der Formel (Ω) den Ausdruck für den Flächeninhalt der krummen Oaerfläche eines beliebigen Ellipsoides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

suchen, so haben wir:

$$p^2 = \frac{c^4 x^2}{a^4 z^2}, \quad q^2 = \frac{c^4 y^2}{b^4 z^2},$$

sodaß, wenn die Ausdehnung des Integrales in der Ebene dor xy durch den Umfang der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

begrenzt und der Flächeninhalt des auf der einen Seite der Ebene der xy liegenden Theiles der krummen Oberfläche oder die Hälfte des Flächeninhaltes der Oberfläche des ganzen Ellipsoides durch Ω bezeichnet wird, man hat:

$$\Omega = \int\int \sqrt{\frac{1 - \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2} - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\, dy dx.$$

Wir wollen annehmen, daß $a > b > c$ ist, wodurch die Allgemeinheit der Auflösung nicht beschränkt wird, und

$$\frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y}{b} = \eta, \quad 1 - \frac{c^2}{a^2} = \alpha^2, \quad 1 - \frac{c^2}{b^2} = \beta^2$$

setzen, woraus folgt:

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1, \quad \beta < \alpha, \tag{1}$$

so haben wir:

$$\Omega = ab \int\int \sqrt{\frac{1 - \alpha^2\xi^2 - \beta^2\eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}} \cdot d\eta d\xi,$$

sodaß die Bestimmung von Ω auf die des doppelten Integrales

$$v = \int\int \sqrt{\frac{1 - \alpha^2\xi^2 - \beta^2\eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}} \cdot d\eta d\xi = \int\int \zeta d\eta d\xi$$

zurückgeführt ist, wo die Hülfsgröße ζ durch die Gleichung:

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - \alpha^2\xi^2 - \beta^2\eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}}$$

oder:

$$(\zeta^2 - \alpha^2)\xi^2 + (\zeta^2 - \beta^2)\eta^2 = \zeta^2 - 1 \tag{2}$$

bestimmt wird.

Aber nichts hindert, die neuen Veränderlichen ξ, η, ζ als rechtwinklige Coordinaten zu betrachten, und alsdann kann das Integral v auch als der

endlich kleinen Werthe von $f(x,y)\,dy$ zwiſchen den Grenzen y_0, y nehmen, und dieſe Summe oder das beſtimmte Integral:

$$\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy$$

iſt alsdann eine gewiſſe Function von x. Wenn man hierauf die Summe der unendlich kleinen Werthe von:

$$\left(\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\right)dx$$

zwiſchen den Grenzen x_0, x, oder das doppelte beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

oder, indem man der Kürze wegen die Klammern wegläßt:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx, \qquad (a)$$

nimmt, ſo iſt dieſe Summe offenbar die Summe aller unendlich kleinen Werthe der zweiten Ordnung, welche die Function:

$$f(x,y)\,dy\,dx$$

annimmt, wenn man darin x ſich zwiſchen den Grenzen x_0, x nach unendlich kleinen Incrementen dx, und y zwiſchen den Grenzen y_0, y ſich nach unendlich kleinen Incrementen dy ändern läßt.

Mit andern Worten, wenn man das Intervall $x - x_0$ in m gleiche Theile Δx, und das Intervall $y - y_0$ in n gleiche Theile Δy theilt und die Summe aller Werthe der Function:

$$f(x,y)\,\Delta y\,\Delta x \qquad (b)$$

nimmt, indem man alle Werthe von x in der Reihe:

$$x_0,\ x_0 + \Delta x,\ x_0 + 2\Delta x, \ldots x_0 + (m-1)\,\Delta x$$

mit allen Werthen von y in der Reihe:

$$y_0,\ y_0 + \Delta y,\ y_0 + 2\Delta y, \ldots y_0 + (n-1)\,\Delta y$$

verbindet; ſo convergirt dieſe Summe deſto mehr gegen eine gewiſſe Grenze, welche der genaue Werth des doppelten Integrales (a) iſt, je größer die Zahlen m und n, oder je kleiner die Differenzen Δx, Δy genommen werden.

Hieraus folgt, daß die Ordnung der Integrationen auf den Werth des doppelten Integrales keinen Einfluß hat und daß man folglich ohne Unterſchied

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx, \quad \text{oder} \quad \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx\,dy$$

ſchreiben kann.

§. 352. Wenn man die Fläche conſtruirt, deren rechtwinklige Coordinaten x, y und $z = f(x,y)$ ſind; ſo drückt die Größe (b) das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedums aus, welches das Product $\Delta x \cdot \Delta y$ zur Grundfläche und die Ordinate z zur Höhe hat. Die Durchſchnittslinie der Seitenflächen dieſes Parallelepipedums mit der krummen Oberfläche bilden ein krummliniges Viereck, deſſen Projection auf die Ebene der xy das Rechteck $\Delta x \cdot \Delta y$ iſt. Das Volumen zwiſchen dieſen Seitenflächen, der Grundfläche des Parallelepipedums (b) und der Fläche $z = f(x,y)$ iſt von dem Volumen des Parallelepipedums (b) nur um ein gewiſſes Volumen (β), kleiner als

$\Delta x \cdot \Delta y \cdot (\Delta z)$ verſchieden, wo (Δz) den Unterſchied der äußerſten Werthe bezeichnet, welche die Ordinate z für die Punkte der krummen Oberfläche annimmt, die ſich auf der Ebene der xy in das Innere oder auf den Umfang des Rechteckes $\Delta x \Delta y$ projiciren. Wenn die Function z keine Unterbrechung der Stetigkeit von der erſten Ordnung erfährt; ſo iſt (Δz) eine Größe von derſelben Größenordnung als Δx, Δy. Wenn alſo Δx, Δy ſehr kleine Größen der erſten Ordnung ſind, in welchem Falle das Volumen des Parallelepipedums (b) eine ſehr kleine Größe der zweiten Ordnung iſt; ſo reducirt ſich das Volumen (β) auf eine ſehr kleine Größe der dritten Ordnung. Das Integral (a), welches die Grenze iſt, gegen welche die Summe der Größen (b) ohne Ende convergirt, wenn die Dimenſionen Δx, Δy ohne Ende abnehmen, iſt alſo das Maß des Volumens, welches von der Ebene der xy, von der krummen Fläche und von vier Ebenen begrenzt wird, wovon zwei in den Entfernungen y_0, y zu der Ebene der xz parallel gelegt ſind.

Der Quotient:

$$\frac{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dx\,dy}{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} dy\,dx} = \frac{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx}{(x-x_0)(y-y_0)}$$

drückt auch das Mittel aus allen unendlich vielen Werthen aus, welche die Höhe z, oder allgemeiner, die Function $f(x,y)$, welche irgend eine geometriſche oder phyſicaliſche Bedeutung haben kann (§. 33) für alle Punkte der Ebene der xy annimmt, welche innerhalb des Rechteckes liegen, welches durch den Durchſchnitt dieſer Ebene mit den vier oben erwähnten ſenkrechten Ebenen gebildet wird.

§. 353. Wenn man die in dem Ausdrucke (a) angedeuteten beiden Integrationen verrichtet hat, ſo iſt das erhaltene Reſultat eine Function der obern Grenzen x, y, welches wir mit $F(x,y)$ bezeichnen wollen, ſo daß nach der Definition:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy, \quad \frac{dF(x,y)}{dy} = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx,$$

$$\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy} = \frac{d^2F(x,y)}{dy\,dx} = f(x,y) \qquad (c)$$

iſt.

Wenn man durch irgend welches Mittel eine Function $F(x,y)$ finden könnte, welche der Gleichung (c) genügte, ſo würde, wenn die Function $f(x,y)$ gegeben iſt, jede andere Function von der Form:

$$F(x,y) + \varphi x + \psi y, \qquad (c_1)$$

wo φ, ψ ganz willkürliche Functionen bezeichnen, der Gleichung (c) ebenfalls Genüge leiſten. Denn wenn man von der Function (c_1) die partielle Ableitung in Beziehung auf x nimmt, ſo verſchwindet die Function ψy, und wenn man hierauf von der Function:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} + \frac{d\varphi x}{dx}$$

die partielle Ableitung in Beziehung auf y nimmt, ſo verſchwindet die Function $\frac{d\varphi x}{dx}$, und das Reſultat würde ganz daſſelbe ſein, wenn man die beiden Differenziationen in umgekehrter Ordnung verrichtete.

Um eine Function $F(x,y)$ zu finden, welche der Gleichung (c) Genüge leiſtet, braucht man zuvörderſt nur das unbeſtimmte Integral:

$$\int f(x,y)\,dy$$

zu nehmen, indem man x als eine Conſtante betrachtet, und nachdem man das erhaltene Reſultat mit dx multiplicirt hat, wieder das unbeſtimmte Integral von dieſer Differenzialfunction zu nehmen, indem man bei der zweiten Integration x als veränderlich, und y als conſtant betrachtet. Man deutet dieſe doppelte Operation durch:

$$\iint f(x,y)\,dy\,dx \qquad (d)$$

an, und wenn man die unbeſtimmten Integrationen in einer umgekehrten Ordnung vornähme, wie es der Ausdruck:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

andeutet, ſo könnte ſich die erhaltene Function $F_1(x,y)$ von der im erſten Falle erhaltenen Function $F(x,y)$ nur durch das Hinzukommen der Glieder von der Form:

$$\varphi x + \psi y + \text{const.},$$

welche durch zwei partielle Differenziationen, die eine in Beziehung auf x und die andere in Beziehung auf y verſchwinden, unterſcheiden. Der Ausdruck (d) iſt der eines **doppelten unbeſtimmten Integrales.**

§. 354. Kommen wir nun wieder auf die beſtimmten Integrationen zurück, welche den ſpeciellen Gegenſtand dieſes Kapitels bilden. Statt das Integral:

$$\int f(x,y)\,dy$$

zwiſchen Grenzen y_0, y_1 zu nehmen, welche ſich nicht mit x ändern, könnte man es zwiſchen veränderlichen Grenzen $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$ nehmen, und alsdann wäre das beſtimmte Integral:

$$\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x,y)\,dy$$

ebenfalls noch eine Function, worin die Veränderliche x allein vorkäme. Wenn man in Beziehung auf x zwiſchen den Grenzen x_0, x_1 ein zweites Mal integrirte, ſo erhielte man das doppelte beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x,y)\,dy\,dx = V,$$

und um ſich von dem Reſultate dieſer Operation einen klaren Begriff zu bilden, kann man ſich vorſtellen, daß die Grenzwerthe x_0, x_1 durch die Abſciſſen Op_0, Op_1 (Fig. 80), die Functionen $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$ durch die Ordinaten der Linien $m_0 n_0 m_1$, $m_0 n_1 m_1$ oder ihrer Theile, und endlich die Function $f(x,y) = z$ durch die auf der Ebene der xy ſenkrechte Ordinate einer krummen Oberfläche dargeſtellt werden; ſo drückt nach dem im vorletzten §. Geſagten das Integral V das Volumen aus, welches von der Ebene der xy, von der krummen Fläche, deren Ordinate z iſt, und endlich von einer cylindriſchen Fläche, deren Normaldurchſchnitt der Umfang $m_0 n_0 m_1 n_1$ iſt, eingeſchloſſen wird.

Allgemeiner, wenn A die von dieſem Umfange eingeſchloſſene Fläche bezeichnet, ſo drückt das Verhältniß $\frac{V}{A}$ das Mittel aus allen unendlich vielen Werthen aus, welches die Function $f(x,y)$, die eine beliebige geometriſche oder

phyſikaliſche Bedeutung haben kann, für alle Punkte (x,y), welche in dem von dieſem Umfange eingeſchloſſenen Raume liegen, annimmt.

Uebrigens kann das Integral V reell ſein, obgleich die Function $f(x,y)$ imaginäre Werthe annimmt, oder ſelbſt innerhalb der Integrationsgrenzen beſtändig imaginär bleibt, und alsdann hat dieſes Integral keine geometriſche oder phyſikaliſche Bedeutung mehr.

Zu der Axe der x wollen wir die geraden Linier $n_0 q_0$, $n_1 q_1$, parallel ziehen, welche den Umfang begrenzen und mit y_0, y_1 die Ordinaten Oq_0, Oq_1, ſowie durch $\psi_0 y$, $\psi_1 y$ die Werthe der Abſciſſe x als Function von y für die Linienſtücke $n_0 m_0 n_1$, $n_0 m_1 n_1$ bezeichnen; ſo haben wir offenbar:

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{\psi_0 y}^{\psi_1 y} f(x,y)\,dxdy = \int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x,y)\,dydx = V.$$

§. 355. Wenn die Function $f(x,y)$ innerhalb der doppelten Integrationsgrenzen durch das Unendliche geht, ſo kann das Integral nicht mehr als eine Summe von Elementen betrachtet werden und alle ſich auf dieſe Betrachtungen gründenden Schlüſſe werden unzuläſſig. So hat z. B. Cauchy zuerſt bemerkt, daß die doppelte Integration in dieſem Falle verſchiedene Reſultate geben kann, wenn man die einfachen Integrationen in verſchiedener Ordnung verrichtet.

Wir wollen z. B. das doppelte Integral:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

nehmen, für welches der Coefficient von $dxdy$ unendlich wird, wenn man $x=0$, $y=0$ ſetzt. Integrirt man zuerſt in Beziehung auf die Veränderliche x, ſo hat man:

$$\int \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+y^2} + \text{const.}, \quad \int_{-1}^{1} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{2}{1+y^2}$$

und wenn man alsdann in Beziehung auf y integrirt, ſo erhält man:

$$2\int_{-1}^{1} \frac{dy}{1+y^2} = \pi.$$

Wenn die Integrationen in einer umgekehrten Ordnung verrichtet werden, ſo erhält man dagegen:

$$\int \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -\frac{y}{x^2+y^2} + \text{const.}, \quad \int_{-1}^{1} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -\frac{2}{1+x^2}$$

$$-2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -\pi,$$

ſo daß der Unterſchied der beiden erhaltenen Werthe $= 2\pi$ iſt.

Wir wollen durch $F(x,y)$ eine Function von ſolcher Beſchaffenheit bezeichnen, daß

$$\frac{d^2F(x,y)}{dxdy} = f(x,y)$$

iſt, und es ſei:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \varphi(x,y), \quad \frac{dF(x,y)}{dy} = \psi(x,y),$$

oder, was daſſelbe iſt,

$$\varphi(x,y) = \int f(x,y)\,dy, \quad \psi(x,y) = \int f(x,y)\,dx,$$

ſo kann das doppelte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dydx$$

ſowohl durch:

$$\int_{x_0}^{x_1}[\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]\,dx,$$

als durch:

$$\int_{y_0}^{y_1}[\psi(x_1,y)-\psi(x_0,y)]\,dy$$

ausgedrückt werden, ſo daß im Allgemeinen, wofern $f(x,y)$ nicht durch das Unendliche geht, innerhalb der Ausdehnung der doppelten Integration

$$\int_{x_0}^{x_1}[\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]\,dx=\int_{y_0}^{y_1}[\psi(x_1,y)-\psi(x_0,y)]\,dy$$

iſt.

Wir wollen nun annehmen, daß $f(x,y)$ für $x=\xi$, $y=\eta$ unendlich wird und durch ε eine poſitive Zahl bezeichnen, welche ohne Ende gegen Null convergirt; ſo hat man nach der vorhergehenden Gleichung:

$$\int_{x_0}^{\xi-\varepsilon}[\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]\,dx+\int_{\xi+\varepsilon}^{x}[\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]\,dx$$

$$=\int_{y_0}^{y_1}[\psi(x_1,y)-\psi(\xi+\varepsilon,y+\psi(\xi-\varepsilon,y)-\psi(x_0,y)]\,dy$$

$$=\int_{y_0}^{y_1}[\psi(x_1,y)-\psi(x_0,y)]\,dy-\int_{y_0}^{y_1}[\psi(\xi+\varepsilon,y)-\psi(\xi-\varepsilon,y)]dy;$$

und an der Grenze hat man:

$$\int_{x_0}^{x_1}[\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_0)]\,dx=\int_{y_0}^{y_1}[\psi(x_1,y)-\psi(x_0,y)]\,dy$$

$$-\lim.\int_{y_0}^{y_1}[\psi(\xi+\varepsilon,y)-\psi(\xi-\varepsilon,y)]\,dy$$

oder:

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dydx-\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\lim.\int_{y_0}^{y_1}[\psi(\xi+\varepsilon,y)-\psi(\xi-\varepsilon,y)]\,dy.$$

Um die angedeutete Grenze zu erhalten, muß man erſt nach verrichteter Integration in Beziehung auf y die Größe $\varepsilon=0$ ſetzen, weil die Function $\psi(x,y)$ nach der Vorausſetzung für einen zwiſchen den Integrationsgrenzen liegenden Werth von y unendlich wird (§. 323).

In dem weiter oben angeführten Beiſpiele hat man:

$$\psi(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \xi=0$$

$$\psi(\xi+\varepsilon,y)-\psi(\xi-\varepsilon,y)=\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2},$$

$$2\int_{-1}^{1}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}\,dy = 2\left[\text{arc. tang.}\,\frac{1}{\varepsilon} - \text{arc. tang.}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right],$$

welcher Werth ſich an der Grenze auf 2π reducirt, wenn man $\varepsilon = 0$ ſetzt, wie man durch directe Berechnung des doppelten Integrales findet, indem man die einfachen Integrale ſucceſſive in verſchiedenen Ordnungen nimmt.

Das einfache Integral:

$$\int_{y_0}^{y_1}[\psi(\xi+\varepsilon,y) - \psi(\xi-\varepsilon,y)]\,dy$$

gehört zu denen, welche man ſinguläre genannt hat, und da die Größe ε als unendlich klein betrachtet wird, ſo ſind alle Elemente dieſes Integrales Null, mit Ausnahme des einzigen, welches dem Werthe $y = \eta$ entſpricht, für welchen der Coefficient von dy unendlich wird.

Wenn man in einer umgekehrten Ordnung integrirte, ſo käme man auf das ſinguläre Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1}[\varphi(x,\eta+\varepsilon) - \varphi(x,\eta-\varepsilon)]\,dx = -2\pi.$$

Wenn innerhalb der doppelten Integrationsgrenzen mehrere Syſteme von Werthen von x,y vorkommen, für welche die Function $f(x,y)$ unendlich wird, ſo beſteht der Unterſchied zwiſchen den beiden Werthen, welche man für das doppelte Integral nach den verſchiedenen Ordnungen der einfachen Integrationen erhält, aus ſo vielen ſingulären Integralen, als es Syſteme ſolcher Werthe gibt.

§. 356. Wenn die Linie $m_0n_0m_1n_1$ (Fig. 85), welche die Ausdehnung des doppelten Integrales:

$$V = \iint f(x,y)\,dydx$$

begrenzt, durch eine Gleichung $r = f\varphi$ zwiſchen Polarcoordinaten gegeben iſt, ſo kann man für das Flächenelement, in deſſen Ausdehnung die doppelte Integrationen verrichtet wird, ſtatt des unendlich kleinen Rechteckes $dydx$ die Fläche $m\mu\nu n$ nehmen, welche von zwei Radienvectoren Omn, $O\mu\nu$, die einen unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ mit einandre bilden, und von zwei Kreisbogen $m\mu$, $n\nu$, wovon der eine mit dem Halbmeſſer $Om = r$ und der andere mit dem Halbmeſſer $On = r + dr$ beſchrieben iſt, eingeſchloſſen wird. Der Flächeninhalt dieſes Theiles des Kreisausſchnittes wird ausgedrückt durch:

$$\tfrac{1}{2}d\varphi[(r+dr)^2 - r^2],$$

oder blos durch $rdr\,d\varphi$, wenn man die unendlich kleine Größe der dritten Ordnung vernachläſſigt. Wenn man folglich mit $F(r,\varphi)$ den Werth von $f(x,y)$ nach der Subſtitution der durch r,φ ausgedrückten Werthe von x,y bezeichnet, ſo erhält man:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{f\varphi} F(r,\varphi)\,rdrd\varphi.$$

Wenn die Function $F(r,\varphi)$ ſich auf die Einheit reducirt, ſo drückt das Integral V blos die von der Curve $r = f\varphi$ begrenzte Fläche aus, und man hat:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(f\varphi)^2\,d\varphi,$$

was mit §. 180 übereinſtimmt.

Der Einfachheit wegen haben wir vorausgeſetzt: 1) daß der Anfangspunkt der Radienvectoren innerhalb der von der Curve $r = f\varphi$ eingeſchloſſenen Fläche

liegt, und 2) daß der Radiusvector für jeden Werth von φ nur einen einzigen reellen und positiven Werth hat. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt werden, so müssen die Integrale zwischen andern Grenzen genommen werden, welche sich in jedem besondern Falle leicht angeben lassen.

§. 357. Im Allgemeinen kann es geschehen, daß durch die Vertauschung der Veränderlichen, welcher im geometrischen Sinne einer Coordinatenverwandlung entspricht, die Bestimmung des Integrales V vereinfacht wird, und in jedem Falle ist es von Wichtigkeit, zu untersuchen, was dieses Integral durch eine Vertauschung der Veränderlichen wird. Es seien daher α, β zwei neue Veränderliche, welche mit x,y durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(\alpha,\beta), \quad y = \psi(\alpha,\beta)$$

verbunden sind, und wir wollen setzen:

$$f(x,y) = F(\alpha,\beta)$$
$$dx = \varphi_1 d\alpha + \varphi_2 d\beta \qquad (e)$$
$$dy = \psi_1 d\alpha + \psi_2 d\beta. \qquad (f)$$

Um zunächst das Differenzial dy aus dem Integrale V wegzuschaffen, bemerke man, daß bei der Bestimmung dieses Differenzials x als constant betrachtet und folglich dx gleich Null oder

$$\varphi_1 d\alpha + \varphi_2 d\beta = 0$$

gesetzt ist.
Zieht man aus dieser Gleichung den Werth von $d\beta$ und substituirt denselben in die Gleichung (f); so hat man:

$$dy = \frac{\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1}{\varphi_2} d\alpha,$$

welches gibt:

$$dydx = \frac{\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1}{\varphi_2} d\alpha dx,$$

$$V = \int\int F(\alpha,\beta) \cdot \frac{\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1}{\varphi_2} d\alpha dx.$$

Nun muß man das Differenzial dx nehmen, indem man α als eine constante Größe betrachtet, oder in der Gleichung (e) das Differenzial $d\alpha = 0$, also $dx = \varphi_2 d\beta$ setzt; und folglich ist:

$$V = \int\int F(\alpha,\beta) \cdot (\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1) d\alpha d\beta.$$

Wenn man die Differenziale dx, dy in einer umgekehrten Ordnung eliminirt hätte, so würde man den Ausdruck:

$$V = \int\int F(\alpha,\beta) \cdot (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) d\alpha d\beta$$

erhalten haben, welcher sich von dem vorhergehenden nur durch das Zeichen unterscheidet. Da nun das zwischen denselben Grenzen als V genommene Integral:

$$\int\int dydx = \int\int (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) d\alpha d\beta$$

das Maß einer Fläche ist, welche selbst die Ausdehnung des Integrales V mißt, so muß man nur den absoluten Werth dieses Integrales betrachten und das Zeichen des Factors $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ ist gleichgültig.
Wenn man:

$$\alpha = r, \quad \beta = \varphi, \quad x = r\cos.\varphi, \quad y = r\sin.\varphi$$

setzt, so hat man:

$$\varphi_1 = \cos.\varphi, \quad \psi_1 = \sin.\varphi, \quad \varphi_2 = -r\sin.\varphi, \quad \psi_2 = r\cos.\varphi;$$

folglich:

$$\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 = r\cos.^2\varphi + r\sin.^2\varphi = r,$$

wie man durch geometriſche Betrachtungen, welche zu einfach ſind, als daß ſie ſich nicht hätten zuerſt darbieten ſollen, direct gefunden hat.

§. 358. Um ein Anwendungsbeiſpiel von der Berechnung der doppelten Integrale auf die Cubatur der von beliebigen krummen Flächen begrenzten Körper zu geben, wollen wir das Volumen des Ellipſoides mit drei ungleichen Axen beſtimmen, deſſen Oberfläche, auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen bezogen, durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{oder} \quad z = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2} - y^2}$$

ausgedrückt wird.

Die Gleichung des Durchſchnittes der krummen Fläche mit der Ebene der xy iſt:

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

und wenn man folglich der Kürze wegen

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = u$$

ſetzt; ſo wird die Schicht des Ellipſoides zwiſchen zwei zu der Ebene der yz parallelen und den Abſciſſen x_0, x entſprechenden Ebenen ausgedrückt durch:

$$V = \frac{2c}{b}\int_{x_0}^{x}\int_{-u}^{u}\sqrt{u^2 - y^2}\cdot dy\,dx.$$

Nun iſt aber:

$$\int_{-u}^{u}\sqrt{u^2 - y^2}\cdot dy = \frac{\pi}{2}u^2 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

folglich:

$$V = \pi\,\frac{bc}{a^2}\int_{x_0}^{x}(a^2 - x^2)\,dx = \pi bc\left[x - x_0 - \frac{1}{3a^2}(x^3 - x^3{}_0)\right].$$

Der Werth von V bleibt für beliebige Werthe von x_0, x reell; aber er verliert ſeine geometriſche Bedeutung, wenn man den Größen x_0, x größere Zahlenwerthe beilegt, als a, und wenn man $x_0 = -a$, $x = a$ ſetzt, ſo erhält man das Volumen des ganzen Ellipſoides $= \frac{4}{3}\pi abc$.

II. Beſtimmung des Flächeninhaltes beliebiger krummer Flächen.

§. 359. Wenn eine beliebige krumme Fläche S gegeben iſt, und man legt durch einander ſehr nahe liegende Punkte derſelben Berührungsebenen an ſie, ſo durchſchneiden ſich dieſe Ebenen gegenſeitig und bilden ein Polyeder mit ſehr kleinen Flächen, welches die krumme Fläche S umſchließt und ſich derſelben deſto mehr nähert, je näher die Punkte, an welche man Berührungsebenen gelegt hat, einander liegen. Einem begrenzten Theile der krummen Fläche S, wie er z. B. von einer cylindriſchen Fläche davon abgeſchnitten wird, deren gerader Durchſchnitt mit der Ebene der xy eine geſchloſſene Curve iſt, entſpricht auch ein begrenzter Theil der umgebenden polyederſchen Fläche,

nämlich der Theil, welcher von derſelben cylindriſchen Fläche davon abgeſchnitten wird. Nun verſteht man aber unter dem Flächeninhalte des betrachteten Theiles der krummen Fläche die Grenze Ω, welcher ſich der Flächeninhalt des correſpondirenden Theiles der umſchließenden polyederſchen Fläche ohne Ende nähert, wenn die Flächen der letztern in Folge der unbegrenzten gegenſeitigen Annäherung der Berührungspunkte der krummen mit der polyederſchen Fläche ohne Ende abnehmen.

Wir wollen in dem Punkte (x, y, z) an die krumme Fläche S eine Berührungsebene legen und die Projection dieſes Punktes auf die Ebene der xy für eine der Winkelſpitzen des Rechteckes, deſſen Seiten Δx, Δy reſp. zu den Axen der x und der y parallel ſind, nehmen (§. 352), ſo ſchneiden die durch die Seiten dieſes Rechteckes ſenkrecht auf die Ebene der xy gelegten Ebenen auf der krummen Fläche S ein Stück $\Delta\Omega$ und auf der Berührungsebene im Punkte (x, y, z) ein Parallelogramm ab, deſſen Flächeninhalt nach einem bekannten geometriſchen Lehrſatze durch:

$$\frac{\Delta y \Delta x}{\cos. \nu}$$

ausgedrückt wird, wo ν den ſpitzen Winkel bezeichnet, welchen die Berührungsebene mit der Ebene der xy bildet, oder vielmehr durch:

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot \Delta y \Delta x.$$

Folglich hat man nach der Definition der nun als Function der unabhängig veränderlichen Coordinaten x, y betrachteten Größe Ω:

$$d\Omega = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dy dx, \qquad (\omega)$$

alſo:

$$\Omega = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dy dx. \qquad (\Omega)$$

Aus der Gleichung der krummen Fläche leitet man die Werthe der partiellen Ableitungen p, q als Functionen von x, y ab, und die Grenzen der doppelten Integration werden durch den Umfang der Linie beſtimmt, welche die Projection des Theiles der krummen Oberfläche, deſſen Flächeninhalt Ω man beſtimmen will, auf der Ebene der xy umſchließt.

Die Elemente $d\Omega$ können unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung ſein, ſelbſt wenn die Ableitungen p, q unendlich werden, wenn nur die Ordinate z einen endlichen Werth behält (§. 342), oder wenn ſie keine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung erfährt.

Die Ordinate z und die partiellen Ableitungen p, q können imaginäre Werthe annehmen, ohne daß die Elemente $d\Omega$ aufhören, reelle Werthe zu haben, und alsdann wird die Formel (Ω) für geometriſche Anwendungen unbrauchbar.

Wir betrachten die Gleichung (ω) als die Definition der Function Ω, ganz ebenſo, wie wir die Gleichung:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

als die Definition der Function s betrachtet haben. Die phyſiſche Definition, welche man von der Länge eines Curvenbogens gibt, indem man ſich dieſe Curve als einen vollkommen biegſamen und unausdehnbaren Faden, oder vielmehr als einen Faden, deſſen Steifigkeit und Ausdehnbarkeit unmerklich ſind, vorſtellt, läßt ſich nicht auf krumme Flächen ausdehnen, wofern es nicht abwickelbare ſind, und hieraus ſelbſt können wir ſchließen, daß ſie nicht die wahre Definition der Function s iſt; denn die mathematiſche Analogie zwiſchen den

Functionen s, Ω muß ſich in den Definitionen dieſer beiden Größen wieder vorfinden, wenn ſich dieſe Definitionen auf das Weſentliche der Natur der definirten Größen, und nicht auf ein zufälliges oder ſecundäres Merkmal derſelben gründen.

§. 360. Wir wollen nun nach der Formel (Ω) den Ausdruck für den Flächeninhalt der krummen Oaerfläche eines beliebigen Ellipſoides:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ſuchen, ſo haben wir:

$$p^2=\frac{c^4x^2}{a^4z^2},\quad q^2=\frac{c^4y^2}{b^4z^2},$$

ſodaß, wenn die Ausdehnung des Integrales in der Ebene dor xy durch den Umfang der Ellipſe:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

begrenzt und der Flächeninhalt des auf der einen Seite der Ebene der xy liegenden Theiles der krummen Oberfläche oder die Hälfte des Flächeninhaltes der Oberfläche des ganzen Ellipſoides durch Ω bezeichnet wird, man hat:

$$\Omega=\iint\sqrt{\frac{1-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{z^2}-\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,dydx.$$

Wir wollen annehmen, daß $a>b>c$ iſt, wodurch die Allgemeinheit der Auflöſung nicht beſchränkt wird, und

$$\frac{x}{a}=\xi,\quad \frac{y}{b}=\eta,\quad 1-\frac{c^2}{a^2}=\alpha^2,\quad 1-\frac{c^2}{b^2}=\beta^2$$

ſetzen, woraus folgt:

$$\alpha<1,\quad \beta<1,\quad \beta<\alpha, \tag{1}$$

ſo haben wir:

$$\Omega=ab\iint\sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}\cdot d\eta d\xi,$$

ſodaß die Beſtimmung von Ω auf die des doppelten Integrales

$$v=\iint\sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}\cdot d\eta d\xi=\iint\zeta d\eta d\xi$$

zurückgeführt iſt, wo die Hülfsgröße ζ durch die Gleichung:

$$\zeta=\sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}$$

oder:

$$(\zeta^2-\alpha^2)\xi^2+(\zeta^2-\beta^2)\eta^2=\zeta^2-1 \tag{2}$$

beſtimmt wird.

Aber nichts hindert, die neuen Veränderlichen ξ, η, ζ als rechtwinklige Coordinaten zu betrachten, und alsdann kann das Integral v auch als der

Ausdruck des Volumens betrachtet werden, welches von der Ebene der $\xi\eta$, von der cylindrischen Fläche:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 \qquad (3)$$

und von der als positiv betrachteten Ordinate ζ der Fläche (2) begrenzt wird. Läßt man nun eine Ebene in der Richtung der positiven ζ parallel zu der Ebene der $\xi\eta$ fortrücken, so trifft diese Ebene wegen der Ungleichheiten (1) die Fläche (2) innerhalb der cylindrischen Fläche (3) nur so lange, als $\zeta < 1$ ist. Wenn $\zeta = 1$ wird, so berührt die bewegliche Ebene die krumme Fläche in einem auf der Axe der ζ liegenden Punkte, und alsdann durchschneidet sie dieselbe nach einer Reihe von Ellipsen, deren Halbaxen gleich:

$$\Xi = \sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - \alpha^2}}, \quad \mathrm{H} = \sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - \beta^2}},$$

und für $\zeta = \infty$ unter sich und der Einheit gleich werden.

Hiernach kann man auch das Volumen v bestimmen, indem man zum Volumenelemente der unendlich kleinen Unterschied zwischen zwei Cylindern von der gemeinschaftlichen Höhe ζ und deren auf der Ebene der $\xi\eta$ liegenden Grundflächen Ellipsen sind, deren Flächen resp. durch:

$$\pi \cdot \Xi\mathrm{H}, \quad \pi\left(\Xi\mathrm{H} + \frac{\mathrm{d} \cdot \Xi\mathrm{H}}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta\right)$$

ausgedrückt werden (§. 338), nimmt. Man hat also:

$$v = \pi \int_1^\infty \zeta \frac{\mathrm{d} \cdot \Xi\mathrm{H}}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta$$

und durch diese sinnreiche Betrachtung Catalan's wird das doppelte Integral, welches den Werth von v ausdrückte, auf ein einfaches zurückgeführt. *)

Nun gibt aber die theilweise Integration:

$$\int \zeta \frac{\mathrm{d} \cdot \Xi\mathrm{H}}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta = \zeta\Xi\mathrm{H} - \int \Xi\mathrm{H}\mathrm{d}\zeta$$

$$= \frac{\zeta(\zeta^2 - 1)}{\sqrt{(\zeta^2 - \alpha^2)(\zeta^2 - \beta^2)}} - \int \frac{(\zeta^2 - 1)\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - \alpha^2)(\zeta^2 - \beta^2)}}.$$

Es sei:

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sin.\varphi},$$

so kommt:

$$\int \frac{(\zeta^2 - 1)\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - \alpha^2)(\zeta^2 - \beta^2)}} = \int \frac{(\sin.^2\varphi - \alpha^2)\mathrm{d}\varphi}{\sin.^2\varphi\sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin.^2\varphi}}$$

$$= (1 - \beta^2)\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin.^2\varphi}} - \int \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin.^2\varphi} \cdot \mathrm{d}\varphi}{\sin.^2\varphi}$$

$$\int \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin.^2\varphi} \cdot \mathrm{d}\varphi}{\sin.^2\varphi} = -\cot.\varphi\sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin.^2\varphi} - \beta^2 \int \frac{\cos.^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin.^2\varphi}}$$

*) Vergl. das Journal de mathématiques de M. Liouville, tom. IV. pag. 323, et tom. V. pag. 115.

Durch ſchickliche Subſtitutionen findet man, daß der Werth des beſtimmten Integrales $\frac{v}{\pi}$ aus zwei Theilen beſteht, wovon der eine die außerhalb des Integrationszeichens $\int$ ſtehende Größe iſt, welche dem Unterſchiede der Werthe gleich iſt, welche die Function:

$$\frac{(\alpha^2 + \beta^2 \cos.^2 \varphi - 1) \sin. \varphi}{\cos. \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin.^2 \varphi}}$$

annimmt, wenn man an der obern Grenze $\sin. \varphi = 0$, und an der untern Grenze $\sin. \varphi = \alpha$ ſetzt. Dieſer Unterſchied reducirt ſich auf:

$$\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} = \frac{c^2}{ab}.$$

Der andere Theil beſteht aus dem Integrale:

$$-(1-\beta^2)\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin.^2 \varphi}} - \beta^2 \int \frac{\cos.^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin.^2 \varphi}}$$

$$= -\int \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin.^2 \varphi} \cdot d\varphi - (1-\alpha^2) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin.^2 \varphi}},$$

welches ebenfalls zwiſchen den Grenzen $\sin. \varphi = 0$, $\sin. \varphi = \alpha$ oder $\varphi = 0$, $\varphi = \mu$ genommen wird, indem $\sin. \mu$ die Conſtante α bezeichnet, welche kleiner iſt, als die Einheit. Wenn wir die Ordnung der Grenzen umkehren und die Bezeichnungen der elliptiſchen Functionen anwenden, indem wir der Einfachheit wegen:

$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{a^2 - c^2}}$$

ſetzen, ſo wird dieſer Theil des Werthes von $\frac{v}{\pi}$ ausgedrückt durch:

$$\alpha \cdot E(k,\mu) + \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \cdot F(k,\mu),$$

oder, wenn man für α ſeinen Werth wieder ſetzt, durch:

$$\frac{1}{a\sqrt{a^2 - c^2}} \cdot [(a^2 - c^2) E(k,\mu) + c^2 F(k,\mu)].$$

Die Oberfläche des halben Ellipſoides wird alſo ausgedrückt durch:

$$\Omega = \pi c^2 + \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \cdot [(a^2 - c^2) E(k,\mu) + c^2 F(k,\mu)].$$

§. 361. Wir wollen nun noch die convexe Oberfläche eines ſchiefen Kegels mit kreisförmiger Baſis zu beſtimmen ſuchen, und zu dem Zwecke die Spitze des Kegels in den Anfangspunkt der Coordinaten, und ſeine Grundfläche in eine zu der Ebene der yx parallele Ebene fallen laſſen (Fig. 86), ſo daß der Mittelpunkt C dieſer Grundfläche in die Ebene der xy fällt; ſo ſind die Gleichungen der Grundfläche des Kegels:

$$x - \xi = 0, \quad z^2 + (y - \eta)^2 - \varrho^2 = 0,$$

und die der convexen Oberfläche deſſelben iſt:

$$\xi^2 z^2 + (\eta x - \xi y)^2 - \varrho^2 x^2 = 0. \qquad (4)$$

Wir wollen die Abscisse OP oder die Höhe des Kegels mit ξ, die Ordinate PC des Mittelpunktes der Grundfläche mit η und den Halbmesser $CR_0 = CR_1$ mit ϱ bezeichnen; so erhalten wir, wenn wir aus der Gleichung (4) die Werthe von p^2, q^2 ableiten:

$$\Omega = \frac{1}{\xi} \cdot \int\int \left(\frac{\xi^2 \varrho^2 x^2 + [\varrho^2 x - \eta(\eta x - \xi y)]^2}{\varrho^2 x^2 - (\eta x - \xi y)^2} \right)^{\frac{1}{2}} dy dx.$$

Wenn wir zur Erleichterung der Integration $y = \alpha x$ setzen, wo α eine neue Veränderliche bezeichnet (§. 357), so haben wir $dy = x d\alpha + \alpha dx$, und wenn man y sich ändern läßt, während x als constant betrachtet wird, so ist $dy = x d\alpha$, folglich:

$$\Omega = \frac{1}{\xi} \cdot \int\int \left(\frac{\xi^2 \varrho^2 + [\varrho^2 - \eta(\eta - \xi\alpha)]^2}{\varrho^2 - (\eta - \xi\alpha)^2} \right)^{\frac{1}{2}} x dx d\alpha.$$

Verrichten wir die Integration in Beziehung auf x zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = \xi$, und verdoppeln das Resultat, um den Flächeninhalt der beiden Theile der krummen Oberfläche zu erhalten, welche zu beiden Seiten der Ebene der xy liegen; so kommt:

$$\Omega = \xi \int \left(\frac{\xi^2 \varrho^2 + [\varrho^2 - \eta(\eta - \xi\alpha)]^2}{\varrho^2 - (\eta - \xi\alpha)^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\alpha.$$

Die $x = \xi$ und $y = \eta + \varrho$, $y = \eta - \varrho$ entsprechenden Grenzen des Integrales sind:

$$\alpha = \frac{\eta + \varrho}{\xi}, \quad \alpha = \frac{\eta - \varrho}{\xi},$$

Man erhielte einen einfachern Ausdruck, wenn man:

$$\eta - \xi\alpha = \varrho \cos. \varphi$$

setzte, woraus folgt:

$$\Omega = \varrho \int_0^{\pi} \sqrt{\xi^2 + (\varrho - \eta \cos. \varphi)^2} \cdot d\varphi,$$

und es ist leicht einzusehen, daß dieses Integral zu denjenigen gehört, welche sich durch elliptische Functionen ausdrücken lassen.

Allgemein, die Quadratur der Kegelflächen läuft, wie die der Rotationsoberflächen, auf die Bestimmung eines einfachen Integrales hinaus; denn da die allgemeine Gleichung der Oberflächen der ersten Art, wenn man, wie es erlaubt ist, den Mittelpunkt derselben in den Anfangspunkt der Coordinaten legt

$$z = x\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

ist (§. 249), so hat man:

$$\frac{dz}{dx} = \psi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{dz}{dy} = \psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

und nachdem man, wie oben:

$$y = \alpha x, \quad dy = x d\alpha$$

gesetzt hat, kommt:

$$\Omega = \iint \sqrt{1 + (\psi\alpha - \alpha\psi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2} \cdot x dx d\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2} \int \sqrt{1 + (\psi\alpha - \alpha\psi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2} \cdot x^2 d\alpha,$$

III. Dreifache Integrale.

§. 362. Durch rein geometrische Untersuchungen wird man nicht auf die Betrachtung dreifacher Integrale von der Form:

$$M = \iiint f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

geführt; aber dagegen ist einleuchtend, daß Integrale dieser Art bei allen physikalischen Untersuchungen vorkommen müssen, wo es nicht erlaubt ist, von einigen Dimensionen der Körper zu abstrahiren. Wenn es z. B. darauf ankommt, das Gewicht oder die Masse eines Körpers zu bestimmen, dessen, von einem Punkte zum andern veränderliche Dichtigkeit für den Punkt, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, durch $f(x, y, z)$ ausgedrückt wird; so wird dieses Gewicht oder diese Masse durch das Integral M bestimmt, dessen Grenzen so gewählt werden müssen, daß es genau den von dem Körper eingenommenen Raum umfaßt. Wenn man die Masse M des Körpers durch sein Volumen oder durch das zwischen denselben Grenzen genommene Integral:

$$V = \iiint dz\,dy\,dx$$

dividirt; so erhält man die mittlere Dichtigkeit des Körpers oder den mittleren Werth der Function f innerhalb der Grenzen der dreifachen Integration. Diese Definition beruht auf ebenso vielen offenbaren Folgerungen aus der Definition der Function f selbst (§. 130) und aus der vorausgesetzten Stetigkeit der Materie, und in der Folge werden wir die Modificationen näher erörtern, welche diese Theorie erfahren muß, wenn man die Körper als Systeme von einander getrennter materieller Theilchen betrachtet.

Wenn die Function f eine Temparatur ausdrückte; so wäre das Verhältniß $\frac{M}{V}$ die mittlere Temparatur des Körpers u. s. f.

Die erste Integration in Beziehung auf z findet zwischen Grenzen statt, welche Functionen der beiden andern unabhängigen Veränderlichen x, y sind, und welche die auf der Ebene der xy senkrechten Ordinaten der den Körper begrenzenden Flächen oder Flächentheile ausdrücken. Die Ausdehnung der beiden folgenden Integrationen in Beziehung auf x und auf y wird durch die der Fläche bestimmt, welche auf der Ebene der xy von dem Durchschnitte dieser Ebene mit einem, die Oberfläche des Körpers berührenden Cylinder, dessen Erzeugungslinien zu der Axe der z parallel sind, eingeschlossen wird.

Die Ordnung der einzelnen Integrationen ist gleichgültig, wenn die Function $f(x,y,z)$ innerhalb der Grenzen der dreifachen Integration nicht durch das Unendliche geht; aber wenn dieses der Fall ist, so kommt man auf ähnliche Singularitäten, wie die bei den doppelten Integralen erwähnten.

§. 363. Um innerhalb der Ausdehnung des von einem Körper eingenommenen Raumes ein bestimmtes dreifaches Integral zu nehmen, ist es oft zweckmäßig, für das System rechtwinkliger Coordinaten ein System von Polarcoordinaten zu substituiren, dessen Anwendung übrigens durch die Bedürfnisse der Astronomie und Geographie ganz natürlich an die Hand gegeben wird. Wir wollen uns eine durch den Anfangspunkt der Radienvectoren gelegte feste Ebene und in derselben einen festen Radiusvecten denken, so ist die Lage eines Punktes im Raume bestimmt, wenn man 1) die Länge r des Radiusvectors, 2) den Winkel θ, welchen der Radiusvector mit einer auf der festen Ebene senkrechten geraden Linie bildet, und 3) den Winkel ψ, welchen die Projection des Radiusvectors auf der festen Ebene mit dem festen Radiusvector bildet, kennt. Wenn man zu der festen oder Fundamentalebene, wie sie einige nennen, die Ebene der xy, und für den festen Radiusvector die Halbaxe der

positiven x nimmt, so geht man vermittelst der folgenden drei Formeln von rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten über:

$$x = r \sin.\theta \cos.\psi, \quad y = r \sin.\theta \sin.\psi, \quad z = r \cos.\theta.$$

In dem Systeme der geographischen Coordinaten entspricht der Winkel ψ der geographischen Länge, und der Winkel θ ist das Complement der geographischen Breite, wenn der Pol oder der Anfangspunkt der Radienvectoren im Mittelpunkte der Erde liegt. Der Radiusvector beschreibt einen Meridian, wenn man den Winkel θ variiren läßt, indem der Winkel ψ constant bleibt, und er beschreibt einen Parallelkreis, wenn der Winkel θ constant bleibt, und der Winkel ψ sich ändert.

Wir wollen uns eine Kugelfläche denken, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte O (Fig. 87) liegt und deren Halbmesser OR $= r$ ist, und auf der Oberfläche derselben wollen wir zwei einander unendlich nahe liegende Punkte m, ν betrachten, so daß man von dem Punkte m zu dem Punkte ν übergeht, indem man θ sich um $d\theta$, und ψ um $d\psi$ ändern läßt. Die Punkte m, ν sind zwei entgegengesetzte Winkelspitzen eines sphärischen Viereckes, welches von zwei einander unendlich nahe liegenden Meridianbogen $m\mu$, $n\nu$, und von zwei einander ebenfalls unendlich nahe liegenden Parallelkreisbogen mn, $\mu\nu$, gebildet wird. Es ist $m\mu = n\nu = r d\theta$ und mn, welches von $\mu\nu$ nur um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung verschieden ist, $= mp d\psi = r \sin.\theta d\psi$. Folglich wird der Flächeninhalt des sphärischen Viereckes, welches man als ein Rechteck betrachten kann, wenn man die unendlich kleinen Größen von den höhern Ordnungen als von der zweiten vernachlässigt, durch $r^2 \sin.\theta d\theta d\psi$ ausgedrückt, und wenn man diesen Flächeninhalt mit dr multiplicirt; so erhält man das Volumen eines Elementes der Pyramide $Omn\nu\mu$, und die ganze Masse des in solche Elemente zerlegten Körpers wird folglich ausgedrückt durch:

$$M = \int\int\int F(r,\theta,\psi)\, r^2\, dr \sin.\theta d\theta d\psi,$$

wo $F(r,\theta,\psi)$ den Ausdruck bezeichnet, in welchen sich die Function $f(x,y,z)$ verwandelt, wenn für die Coordinaten x,y,z ihre durch r,θ,ψ ausgedrückten Werthe substituirt werden. Das Volumen des Körpers oder die Ausdehnung des Integrales wird ausgedrückt durch:

$$V = \int\int\int r^2\, dr \sin.\theta d\theta d\psi.$$

Wenn der Anfangspunkt der Radienvectoren oder der Pol innerhalb des Körpers liegt und dieser Körper von einer Oberfläche begrenzt wird, welche in allen ihren Punkten convex ist, oder wenigstens von jedem Radiusvector nur in einem einzigen Punkte getroffen werden kann; so ist die Gleichung dieser Oberfläche von der Form:

$$r = f(\theta,\psi),$$

wo die Function f für jedes Werthesystem von θ,ψ nur einen einzigen reellen und positiven Werth hat, und folglich ist in diesem Falle:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{f(\theta,\psi)} F(r,\theta\psi)\, r^2\, dr \sin.\theta d\theta d\psi,$$

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [f(\theta,\psi)]^3 \sin.\theta d\theta d\psi.$$

Wenn die den Körper umschließende Oberfläche eine andere Form, oder der Anfangspunkt der Radienvectoren eine andere Lage hätte; so müßte man die Grenzen der drei einzelnen Integrationen für jeden Fall besonders bestimmen, was übrigens keine Schwierigkeiten darbieten kann.

Der Werth des doppelten Integrales:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin.\,\theta\,d\theta\,d\psi$$

ist $= 4\pi$, d. h. gleich der Kugeloberfläche von dem Halbmesser $= 1$, wie es sein muß.

§. 364. Die Bestimmung eines dreifachen Integrales läßt sich durch eine schickliche Wahl der veränderlichen Größen oder der Coordinaten sehr vereinfachen. Es seien daher α, β, γ drei neue veränderliche Größen, welche mit x, y, z durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(\alpha,\beta,\gamma),\quad y = \psi(\alpha,\beta,\gamma),\quad z = \omega(\alpha,\beta,\gamma),$$

verbunden sind, und wir wollen

$$f(x,y,z) = F(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$dx = \varphi_1\,d\alpha + \varphi_2\,d\beta + \varphi_3\,d\gamma \qquad (g)$$

$$dy = \psi_1\,d\alpha + \psi_2\,d\beta + \psi_3\,d\gamma \qquad (h)$$

$$dz = \omega_1\,d\alpha + \omega_2\,d\beta + \omega_3\,d\gamma \qquad (i)$$

setzen. Um nun zunächst das Differenzial dz aus dem Integrale M fortzuschaffen, bemerke man, daß die beiden Coordinaten x, y bei der Bestimmung desselben als constant betrachtet sind, und daß folglich $dx = 0$, $dy = 0$, oder:

$$\varphi_1\,d\alpha + \varphi_2\,d\beta + \varphi_3\,d\gamma = 0$$

$$\psi_1\,d\alpha + \psi_2\,d\beta + \psi_3\,d\gamma = 0$$

ist. Leitet man aus diesen beiden Gleichungen die Werthe von $d\alpha$, $d\beta$ ab, und substituirt sie in die Gleichung (i); so erhält man:

$$dz = \frac{\Theta}{\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2}\cdot d\gamma,$$

wo der Kürze wegen

$$\psi = \varphi_1\psi_2\omega_3 - \varphi_1\omega_2\psi_3 + \psi_1\omega_2\varphi_3 - \psi_1\varphi_2\omega_3 + \omega_1\varphi_2\psi_3 - \omega_1\psi_2\varphi_3$$

gesetzt ist. Man erhält also:

$$M = \iiint F(\alpha,\beta,\gamma)\cdot\frac{\Theta}{\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2}\,dx\,dy\,d\gamma.$$

Aber die Coordinate γ muß bei den Integrationen in Beziehung auf y und x als eine Constante betrachtet werden, wodurch die Gleichungen (g) und (h) auf die Gleichungen (e) und (f) im §. 357 reducirt werden, und nach dem in diesem §. Bewiesenen hat man:

$$\iint U\,dx\,dy = \iint U(\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2)\,d\alpha\,d\beta,$$

folglich:

$$M = \iiint F(\alpha,\beta,\gamma)\cdot\Theta\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

und:

$$V = \iiint \Theta\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

Das Polynom Θ kann wegen seiner symmetrischen Zusammensetzung das Zeichen nicht verändern, wenn man die Elimination der Differenziale dx, dy, dz in einer andern Ordnung verrichtet; aber außerdem ist das Zeichen von Θ auch gleichgültig, und man muß bloß den Zahlenwerth dieses Factors in Betracht ziehen, weil das Integral V ein Volumen mißt, welches seinerseits die Ausdehnung des dreifachen Integrales M mißt.

Wenn man:

$$\alpha = r, \quad \beta = \theta, \quad \gamma = \psi$$

$$x = r \sin.\theta \cos.\psi, \quad y = r \sin.\theta \sin.\psi, \quad z = r \cos.\theta$$

setzt, so kommt:

$$\varphi_1 = \sin.\theta \cos.\psi, \quad \varphi_2 = r \cos.\theta \cos.\psi, \quad \varphi_3 = -r \sin.\theta \sin.\psi,$$
$$\psi_1 = \sin.\theta \sin.\psi, \quad \psi_2 = r \cos.\theta \sin.\psi, \quad \psi_3 = r \sin.\theta \cos.\psi,$$
$$\omega_1 = \cos.\theta, \quad \omega_2 = -\sin.\theta, \quad \omega_3 = 0,$$

woraus $\Theta = r^2 \sin.\theta$ folgt, wie man auch direct durch geometrische Construction findet.

§. 365. Die Theorie der doppelten und dreifachen Integrale läßt sich leicht verallgemeinern und auf vierfache, fünffache, ꝛc. Integrale ausdehnen, und man sieht leicht ein, daß die Aufgaben der mathematischen Physik oft auf mehrfache als dreifache Integrale führen müssen. Wenn z. B. die Wirkung F eines Körpers M auf einen Körper M' die Summe der Wirkungen ist, welche jedes Element von M auf jedes Element von M' ausübt; so hat man, wenn man die Intensität der Wirkung, welche das Element m des Körpers M, dessen Coordinaten x, y, z sind, auf das Element m' des Körpers M', dessen Coordinaten x', y', z' sind, mit $f(x, y, z; x', y', z')$ bezeichnet:

$$F = \iiiiii f(x, y, z; x', y', z')\, dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz',$$

d. h. der Werth von F hängt nothwendig von einem sechsfachen Integrale ab, welches jedoch in gewissen Fällen durch eine schickliche Wahl der Coordinaten auf ein weniger vielfaches Integral zurückgeführt werden kann.

Siebentes Kapitel.

Theorie der Variation der Integrale. — Principien der Methode, welche insbesondere die Variationsrechnung genannt wird.

I. Ueber die Variation der Integrale.

§. 366. Ein bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

ändert sich mit dem Werthe, welchen man dem in der Function $f(x,\alpha)$ vorkommenden Parameter α beilegt. Es ist eine neue Function von α, woraus die Veränderliche x verschwunden ist, und welche wir durch $F\alpha$ bezeichnen können. Nehmen wir nun an, daß α ein unendlich kleines Increment $d\alpha$ erhält; so haben wir:

$$F\alpha + d \cdot F\alpha = \int_a^b \left[f(x,\alpha) + \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha}\, d\alpha\right] dx,$$

oder:

$$d \cdot F\alpha = \int_a^b \left[\frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} d\alpha\right] dx,$$

oder endlich, da ſich der Factor $d\alpha$ nicht mit x ändert:

$$\frac{d \cdot F\alpha}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} \cdot dx,$$

und wenn man für $F\alpha$ ſeinen Werth ſetzt:

$$\frac{d \cdot \int_a^b f(x,\alpha)\,dx}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} \cdot dx,$$

woraus erhellet, daß man das vor dem Integralzeichen $\int$ befindliche Differenziationszeichen d unter das erſtere treten laſſen kann, und umgekehrt, wenigſtens wenn die Integrationsgrenzen von dem veränderlichen Parameter unabhängig ſind.

Wenn man dagegen

$$a = \varphi\alpha, \quad b = \psi\alpha$$
$$da = \varphi'\alpha \cdot d\alpha, \quad db = \psi'\alpha \cdot d\alpha$$

hätte; ſo wäre in dem Falle, wo das Integral als eine Summe von Differenzialelementen behandelt werden könnte:

$$F\alpha + d \cdot F\alpha = \int_{a+da}^{b+db} [f(x,\alpha) + \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} d\alpha]\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x,\alpha) + \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} d\alpha]\,dx - [f(a,\alpha) + \frac{d \cdot f(a,\alpha)}{d\alpha} d\alpha]\,da$$

$$+ [f(b,\alpha) + \frac{d \cdot f(b,\alpha)}{d\alpha} d\alpha]\,db,$$

woraus folgt, wenn man die unendlich kleinen Größen der zweiten Ordnung vernachläſſigt und für a, b, da, db ihre Werthe ſetzt:

$$F\alpha + d \cdot F\alpha = \int_{\varphi\alpha}^{\psi\alpha} [f(x,\alpha) + \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} d\alpha]\,dx$$
$$- f(\varphi\alpha,\alpha) \cdot \varphi'\alpha\,d\alpha + f(\psi\alpha,\alpha) \cdot \psi'\alpha\,d\alpha,$$

und folglich:

$$\frac{dF\alpha}{d\alpha} = \int_{\varphi\alpha}^{\psi\alpha} \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} dx - f(\varphi\alpha,\alpha) \cdot \varphi'\alpha + f(\psi\alpha,\alpha) \cdot \psi'\alpha.$$

Dieſe Rechnung ſetzt voraus, daß die Function $f(x,\alpha)$ zwiſchen den Grenzen des Integrales nicht unendlich wird, und die erhaltenen Reſultate werden durch graphiſche Conſtruction anſchaulicher gemacht. Es ſei daher MN (Fig. 88) die Curve, deren Abſciſſe x und deren Ordinate $f(x,\alpha)$ iſt, ſo daß das beſtimmte Integral $F\alpha$ den Inhalt der zwiſchen der Curve MN, der Axe der Abſciſſen und den den Abſciſſen $OP = a$, $OQ = b$ entſprechenden Ordinaten MP, NQ liegenden Fläche ausdrückt. Durch die Variation der veränderlichen Ordinate (die Abſciſſen der Endpunkte bleiben ungeändert) geht die Curve in IM'KN' über, und die Fläche nimmt um das krummlinige Viereck MNKI zu. Durch die Veränderung der Grenzen a, b in $a + da = OP'$, $b + db = OQ'$ nimmt die Fläche, indem die laufende Ordinate ungeändert bleibt, um das Viereck NQQ'K' zu und um das Viereck MPP'I' ab. Dieſe

drei als unendlich kleine Größen der ersten Ordnung behandelte Vierecke werden resp. gemessen durch:

$$\int_a^b \left[\frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} d\alpha\right] dx, \quad f(a,\alpha)\, d\alpha, \quad f(b,\alpha)\, db$$

und die Vierecke MIM'I', NKN'K' werden durch die unendlich kleinen Größen der zweiten Ordnung:

$$\frac{d \cdot f(a,\alpha)}{d\alpha} d\alpha da, \quad \frac{d \cdot f(b,\alpha)}{d\alpha} d\alpha db$$

gemessen, welche man aber bei der Bestimmung der Totalveränderung der Fläche $F\alpha$ durch die gleichzeitige Veränderung der laufenden Ordinate $f(x,\alpha)$ und der Grenzen a, b vernachlässigt.

§. 367. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, daß die Grenzen a, b von α unabhängig sind; so kann man nach dem Zahlenwerthe des Parameters α fragen, welcher das bestimmte Integral:

$$F\alpha = \int_a^b f(x,\alpha)\, dx$$

zu einem Maximum oder Minimum macht. Wenn sich die Function $F\alpha$ algebraisch ausdrücken ließe, so würde der Aufgabe genügt, wenn man für α die Wurzel der Gleichung $F'\alpha = 0$ nähme, und da nach dem Vorhergehenden auch:

$$F'\alpha = \int_a^b \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} dx$$

ist; so ist blos erforderlich, daß man das Integral im zweiten Theile dieser letzten Gleichung unter algebraischer Formel erhalten kann, damit sich die in Rede stehende Aufgabe durch die gewöhnliche Methode der Maxima und Minima auflösen läßt. In dem entgegengesetzten Falle aber, einige Fälle ausgenommen, wo sich die Bedingungen des Maximums oder Minimums unmittelbar aus der Form des Integrales ergeben, muß man die Curve, deren Abscisse α und deren Ordinate $F\alpha$ ist, vermittelst der mechanischen Quadraturen durch Punkte construiren, indem man alsdann die Maxima und Minima der Ordinate graphisch bestimmt.

§. 368. Wir wollen nun annehmen, daß α nicht mehr eine in der ganzen Ausdehnung der Integration in Beziehung auf x constante, sondern eine mit x veränderliche Größe bezeichnet, und um diesen Umstand besser anzudeuten, wollen wir für den Buchstaben α den Buchstaben y setzen, wodurch man gewöhnlich eine Function von x zu bezeichnen pflegt. Man kann alsdann fragen, was für eine Function y von x sein muß, wenn sie das bestimmte Integral:

$$\int_a^b f(x,y)\, dx \qquad (1)$$

zu einem Maximum oder Minimum macht, und alsdann geschieht es sogar, daß sich diese Aufgabe, welche von der vorhergehenden sehr verschieden ist, ohne vorhergegangene Integration auflösen läßt. Denn wenn man den Werth von y als Function von x durch die Gleichung:

$$\frac{d \cdot f(x,y)}{dy} = 0 \qquad (2)$$

beſtimmt; ſo erhält jedes Element des Integrales ſeinen größten oder kleinſten Werth, welchen es annehmen kann, ſo daß das Integral ſelbſt, welches die Summe dieſer Elemente bildet, ſeinen größten oder kleinſten Werth bekommt. Dieſer Schluß ſetzt jedoch voraus: 1) daß man das Integral als eine Summe von Elementen betrachten kann, ſo daß die Function $f(x,y)$ innerhalb der Integrationsgrenzen nicht unendlich wird, und 2) daß der aus der Gleichung (2) abgeleitete und durch eine Function von x ausgedrückte Werth von y die Function $f(x,y)$ beſtändig zu einem Maximum oder Minimum macht, und zwar in der ganzen Ausdehnung der Integrationsgrenzen. Die Aufgabe würde ihre Natur ganz verändern, wenn dieſe Bedingungen nicht erfüllt würden.

II. Principien der unter dem Namen der Variationsrechnung bekannten Methode.

§. 369. Hierdurch werden wir auf die Unterſuchung eines allgemeinen Falles geführt, welcher weit wichtigere Anwendungen geſtattet, nämlich auf die Unterſuchung des Falles, wo die Function unter dem Integralzeichen $\int$ nicht blos die als Function von x betrachtete Größe y, ſondern auch ihre Ableitungen y', y'', ꝛc. enthält, und wo es darauf ankommt, den Werth von y als Function von x anzugeben, welcher das gegebene Integral zu einem Maximum oder Minimum macht. Offenbar kann man innerhalb der Integrationsgrenzen nicht die Functionen $y = \varphi x$ angeben, ohne dadurch die abgeleiteten Functionen $\varphi' x$, $\varphi'' x$, ꝛc. zu beſtimmen, und ebenſo wenig kann man dieſe Function verändern, ohne daß alle Ableitungen derſelben entſprechende Veränderungen erfahren. Die Variation oder Veränderung des Integrales iſt alſo implicite durch die Veränderung der Function y allein beſtimmt und die ganze Schwierigkeit der Aufgabe beſteht darin, den Zuſammenhang der Variation von y mit den ſubordinirten Variationen der Ableitungen y', y'', ꝛc. unmittelbar anzugeben. Dieſes iſt die Aufgabe, wovon Lagrange durch Anwendung eines beſondern Algorithmus, welchen man die Variationsrechnung genannt hat, und welcher im Grunde nichts anderes iſt, als eine glückliche Modification des Differenzialalgorithmus bei ſeiner Anwendung auf die Variation der Integrale, worin eine unbekannte Function mit ihren verſchiedenen Ableitungen unter dem Integralzeichen $\int$ vorkommt, die eleganteſte Auflöſung gegeben hat.

§. 370. Man wird in der Analyſis fortwährend auf die Betrachtung von Functionen geführt, welche beſondere und von einander unabhängige Variationen oder Veränderungen erfahren, und alle Functionen mit mehreren von einander unabhängigen veränderlichen Größen gehören zu dieſem Falle; allein nichts iſt mehr dazu geeignet, die Coexiſtenz mehrerer verſchiedener Arten der Veränderung zum deutlichen Bewußtſein zu bringen, als die Betrachtung der Bewegungen eines materiellen Syſtemes. Wir wollen uns einen biegſamen, nicht geſpannten und an ſeinen beiden Enden befeſtigten Faden denken, welcher ſeine Lage und Form verändert, und blos der Einfachheit wegen annehmen, daß die Curve, welche der Faden bildet, immer in derſelben Ebene liegt; ſo werden die Coordinaten x, y jedes auf feſte Axen, welche in dieſer Ebene liegen, bezogenen Punktes des Fadens, die Richtung der Tangente in dieſem Punkte, ſowie die Größe und Richtung des Krümmungshalbmeſſers in Folge der Formveränderung des Fadens verändert, und man muß dieſe Veränderungen nicht mit denen verwechſeln, welche bei dem Uebergange von einem Punkte des Fadens zu einem andern unendlich nahe liegenden ſtattfinden.

Allgemein, es iſt zur Beſeitigung jeder Zweideutigkeit zweckmäßig, die ſich auf dieſe beiden Veränderungsarten beziehenden Veränderungen durch verſchiedene Zeichen anzudeuten. So könnte man z. B. durch $d_x z$, $d_y z$ die in

Beziehung auf x und y genommenen Differenziale einer Function z mit zwei unabhängigen veränderlichen Größen x,y bezeichnen (§. 118), und wenn man die Indices der Differenziale dz gewöhnlich hinwegläßt, so geschieht dieses wegen der diese Differenziale fast beständig begleitenden Nenner dx, dy, welche gewissermaßen wie die Indices jede Zweideutigkeit beseitigen.

Bei der in Rede stehenden Aufgabe, wo es einzig und allein darauf ankommt, aus dem Ausdrucke der Variation eines Integrales die subordinirten Variationen, wie die von $\frac{dy}{dx}$ oder von dy, zu eliminiren, damit man blos noch die Variationen behält, welche unabhängig und willkürlich bleiben, wie die von y, betrachten wir diese Variation von y auf eine ganz allgemeine Weise und nicht in Beziehung auf eine bestimmte andere veränderliche Größe als x, wovon y abhängen würde, und alsdann kann man das von der Veränderung der Abscisse herrührende Differenzial dy weder durch Indices, noch durch Nenner von der andern Veränderung von y, welche von der Formveränderung der Function $y = \varphi x$ herrührt, unterscheiden, obgleich man sich diese Formveränderung als von der Veränderung eines in der Function φx vorkommenden beliebigen Parameters herrührend vorstellen kann. Man ist daher übereingekommen, die von der Formveränderung der Function herrührenden unendlich kleinen Veränderungen durch das Zeichen δ anzudeuten, und insbesondere Variationen zu nennen, indem man die durch das Zeichen d angedeuteten Veränderungen, welche von der Veränderung der Abscissen oder von dem Uebergange von einem Elemente des materiellen Systemes zu dem nächsten herrühren, auch fernerhin Differenziale nennt.

§. 371. Wir wollen daher annehmen, daß die Curve MN (Fig. 88) in Folge der durch das Zeichen δ angedeuteten Variation in die Curve M'N' übergeht; so entsprechen die Puncte m', m'_1 der zweiten Curve den Puncten m, m_1 der ersten, und diese den Abscissen x, $x + dx$. Nun ist aber:

$$mp = y, \quad m_1p_1 = y + dy, \quad m'p' = y + \delta y$$
$$m'_1p'_1 = m_1p_1 + \delta \cdot m_1p_1 = m'p' + d \cdot m'p',$$

oder vielmehr:

$$y + dy + \delta(y + dy) = y + \delta y + d(y + \delta y),$$

und folglich:

$$\delta dy = d\delta y. \tag{3}$$

Man hat also auch:

$$\delta d^2y = d\delta dy = d^2\delta y,$$

und allgemein:

$$\delta d^n y = d^n \delta y,$$

vermöge welcher Relation man immer das Zeichen δ hinter das Zeichen d setzen kann. Uebrigens sieht man leicht ein, daß diese Relation auch stattfinden würde, wenn d, δ keine unendlich kleinen, sondern endliche Veränderungen andeuteten, oder vielmehr, daß diese Relation nur deswegen an der Grenze der unendlichen Kleinheit der Veränderungen stattfindet, weil sie für endliche Veränderungen stattfindet. Ueberdies ist die Formel (3), wofür man

$$\delta dz = d\delta z$$

setzen kann, nach den oben gegebenen Erklärungen gleichbedeutend mit der im §. 123 bewiesenen Formel:

$$d_x d_y z = d_y d_x z.$$

Die Schlüsse im §. 366, vermöge welcher man die Ordnung der Zeichen $\int$, d umkehren darf, sind auch auf die Umstellung der Zeichen $\int$, δ anwendbar, und man hat folglich:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta V \cdot dx.$$

In dieser Transposition der Zeichen besteht die erste Grundregel der Methode der Variationen.

§. 372. Wenn es nun darauf ankommt, die Variation eines bestimmten Integrales

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx, \qquad (V)$$

worin V eine Function von x, y, y', y'', ꝛc., oder was auf dasselbe hinausläuft, eine Function von x, y, dy, d^2y, ꝛc. ist zu finden, und wenn die Entwickelung der Variation ein Glied von der Form:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Omega \delta dy$$

gibt; so verwandelt man diesen Ausdruck zuvörderst in:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Omega d\delta y.$$

Alsdann hat man, wenn man theilweise integrirt, und den Werth einer Function U an der obern Grenze des Integrales weniger ihrem Werthe an der untern Grenze mit

$$[U]_0^1$$

bezeichnet

$$\int_{x_0}^{x_1} \Omega d\delta y = [\Omega \delta y]_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} d\Omega \cdot \delta y.$$

Ebenso fände man durch zwei successive theilweise Integrationen:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Omega \delta d^2 y = \int_{x_0}^{x_1} \Omega d^2 \delta y$$

$$= [\Omega \delta dy]_0^1 - [d\Omega \delta y]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} d^2 \Omega \cdot \delta y,$$

u. s. f., so daß unter dem Integralzeichen $\int$ nur noch Glieder bleiben, welche mit der Variation δy multiplicirt sind, und die Variationen δdy, $\delta d^2 y$, ꝛc. auf die im §. 369 angegebene Weise fortgeschafft sind. Diese Reductionen bilden die zweite Grundregel der Variationsrechnung.

§. 373. Die Variation des bestimmten Integrales (V) erhält man auf die allgemeinste Weise, wenn man nicht blos die Function y und ihre Differenziale dy, d^2y, ꝛc., sondern auch die Veränderliche x und ihr Differenzial dx zu gleicher Zeit variiren läßt, was auf die Annahme hinausläuft, daß sich jeder Punkt des im §. 370 betrachteten biegsamen Fadens sowohl in dem Sinne der Abscissen x, als in dem der Ordinaten y auf eine beliebige Weise verrückt, oder verrücken kann. Dieses vorausgesetzt, sei

$$dV = X dx + Y dy + Y^{(1)} dy' + Y^{(2)} dy'' + Y^{(3)} dy''' + \text{ꝛc.}$$

wo $X, Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)}$, ꝛc. Functionen von x, y, y', y'', y''', ꝛc. sind, welche man durch Differenziation findet, sobald die Function V gegeben ist; so hat man

$$\delta V = X\delta x + Y\delta y + Y^{(1)}\delta y' + Y^{(2)}\delta y'' + Y^{(3)}\delta y''' + \text{ꝛc.},$$

und nach dem eben Geſagten,

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{x_0}^{x_1} V\delta dx + \int_{x_0}^{x_1} dx\delta V$$

$$= [V\delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} (dx\delta V - dV\delta x).$$

Die Werthe von dV und δV geben:

$$dx\delta V - dV\delta x = Y(dx\delta y - dy\delta x) + Y^{(1)}(dx\delta y' - dy'\delta x)$$
$$+ Y^{(2)}(dx\delta y'' - dy''\delta x) + Y^{(3)}(dx\delta y''' - \delta y'''\delta x) + \text{ꝛc.}$$

Andererſeits hat man:

$$\delta y' = \delta\frac{dy}{dx} = \frac{dx\delta dy - dy\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y - y'd\delta x}{dx}$$

$$= \frac{d(\delta y - y'\delta x)}{dx} + y''\delta x,$$

$$\delta y'' = \frac{d(\delta y' - y''\delta x)}{dx} + y'''\delta x = \frac{d^2(\delta y - y'\delta x)}{dx^2} + y'''\delta x,$$

$$\delta y''' = \frac{d^3(\delta y - y'\delta x)}{dx^3} + y'''\delta x, \text{ ꝛc.}$$

Wenn man alſo der Kürze wegen

$$\delta y - y'\delta x = \delta u$$

ſetzt; ſo erhält man durch Subſtitution:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = [V\delta x]_0^1$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} [Ydx\delta u + Y^{(1)}d\delta u + Y^{(2)}d\cdot\frac{d\delta u}{dx} + Y^{(3)}d\cdot\frac{d^2\delta u}{dx^3} + \text{ꝛc.}].$$

Nach der Regel im vorhergehenden § verrichtet man nun ſo viele theilweiſe Integrationen, als erforderlich ſind, um alle Differenzialzeichen d der Variation δu unter dem Zeichen ∫ fortzuſchaffen. Subſtituirt man alsdann für δu ſeinen Werth wieder und läßt immer das Zeichen δ auf das Zeichen d folgen; ſo erhält man die folgende Formel:

$$\left.\begin{aligned}\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = &[V\delta x + (Y^{(1)} - \frac{dY^{(2)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(3)}}{dx^2} \text{ ꝛc.})(\delta y - y'\delta x)\\ &+ (Y^{(2)} - \frac{dY^{(3)}}{dx} + \text{ ꝛc.})(\delta y' - y''\delta x) + \text{ꝛc.}]_0^1\\ &+\int_{x_0}^{x_1} [Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Y^{(3)}}{dx^3} + \text{ ꝛc.}](\delta y - y'\delta x)dx.\end{aligned}\right\} (A)$$

Es iſt zu bemerken, daß bei der Beſtimmung der Ableitungen $\frac{d^iY^{(n)}}{dx^i}$ die Functionen y, y', y'', ꝛc., welche in $Y^{(n)}$ vorkommen können, als unentwickelte Functionen von x betrachtet ſind, ſo daß dieſe Ableitungen nicht würden verſchwinden können, ſelbſt wenn die Veränderliche x nicht explicite in $Y^{(n)}$ vorkäme.

Soll nun das Integral (V) ein Maximum oder Minimum werden, so muß seine Variation verschwinden, von welcher Beschaffenheit die durch δx, δy bezeichneten und mit x innerhalb der Ausdehnung des Integrales beliebig veränderlichen Incremente auch sein mögen. Es muß also jedes Element des Integrales, welches im zweiten Theile der Gleichung (A) bleibt, einzeln verschwinden, und folglich:

$$Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Y^{(3)}}{dx^3} + \text{ꝛc.} = 0 \qquad (a)$$

sein.

Wenn sich der erste Theil der Gleichung auf eine Constante oder auf eine bloße Function von x reducirt; so kann sie nicht mehr zur Bestimmung einer Function $y = \varphi x$ dienen, welche der Bedingung des Maximums oder Minimums Genüge leistet, und die Aufgabe ist unmöglich. Im Allgemeinen kann die Gleichung die Größen $x, y, y', \ldots y^{(2n)}$ enthalten, wenn $y^{(n)}$ die höchste in V vorkommende Ableitung ist; denn alsdann ist $\pm \frac{d^n Y^{(n)}}{dx^n}$ das letzte Glied des ersten Theiles der Gleichung (a), und wenn $y^{(n)}$ in $Y^{(n)}$ vorkommt, so entsteht durch die Bildung dieses Gliedes die Ableitung $y^{(2n)}$, weil nach dem eben Gesagten $y^{(n)}$ wie eine unentwickelte Function von x behandelt werden muß.

§. 374. Ehe wir weiter gehen, wollen wir bemerken, daß, wenn x keine durch δ ausgedrückte Variation erführe, oder wenn $\delta x = 0$ wäre in der Formel (A), die Bedingung, daß die unter dem Zeichen $\int$ befindliche Größe Element für Element verschwinde, auf dieselbe Gleichung (a) führen würde; es würde nur die Form der Glieder, welche sich auf die Integrationsgrenzen beziehen, verändert, so wie die Gleichungen, welche man daraus ableitet, wenn man diese Glieder $= 0$ setzt, damit die Totalvariation des Integrales verschwinde. Dieses läßt sich durch geometrische Betrachtungen erklären und direct beweisen. Denn es sei MN (Fig. 88) die Curve $y = \varphi x$ und M'N' die Curve, in welche die eben erwähnte in Folge der Variation von y und von x übergeht. Man kann ohne Unterschied annehmen, daß ein beliebiger zwischen den Endpunkten der ersten Curve liegender Punkt m derselben auf der variirten Curve einem Punkte m' entspricht, dessen Abscisse und Ordinate von der Abscisse und Ordinate des Punktes m verschieden sind, oder einem Punkte μ, welcher dieselbe Abscisse als der Punkt m hat, und dessen Ordinate blos verändert ist. Aber wenn die Endpunkte M, N nicht dieselben Abscissen haben, als die Endpunkte M', N', so muß man annehmen, daß sich die Abscissen und Ordinaten an den Grenzen gleichzeitig geändert haben. Man muß also auf diese Veränderlichkeit der Abscissen in den Grenzgleichungen Rücksicht nehmen, wenn die Abscissen der Endpunkte nach der Natur der Aufgabe nicht unveränderlich sind, und da es gleichgültig ist, ob man zwischen den Grenzen darauf Rücksicht nimmt, oder nicht, so muß die Gleichung, welche die Curve zwischen den Grenzen bestimmt, dieselbe bleiben.

Wenn man der Abscisse x eine Variation ertheilt, so ist die Variation δy nicht mehr $= \mu p - mp$, wie wenn die Abscisse unveränderlich ist, sondern $= m'p' - mp$. Man hat also:

$$\mu p = m'p' - m'\nu = m'p' - in,$$

wenigstens, wenn $m'i = \mu m$ setzt, oder die unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung $d\delta y$ vernachlässigt. Folglich ist:

$$\mu p = y + \delta y - y'\delta x,$$

und man muß mithin in den in der Vorausſetzung der Unveränderlichkeit von x abgeleiteten Formeln $\delta y = y'\delta x$ für δy ſetzen, um die Variation von x in Betracht zu ziehen. Aus demſelben Grunde muß man $\delta y' = y''\delta x$ für $\delta y'$ ſetzen u. ſ. f.

§. 375. Man erhält die geſuchte Relation $y = \varphi x$, welche der Bedingung des Maximums oder Minimums genügt, wenn man die Gleichung (a) integrirt, d. h. wenn man von dieſer Gleichung zwiſchen $x, y, y', \ldots y^{(2n)}$ zu der Gleichung zwiſchen x, y, woraus ſie abgeleitet iſt, und welche die Form:

$$\Phi(x, y, a_1, a_2, \ldots a_{2n}) = 0, \qquad (a)$$

hat, wo $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ willkürliche Conſtanten oder Parameter ſind, zurückgeht (§. 164). Die Integration der Differenzialgleichungen werden wir ſpäter abhandeln, und für den Augenblick genügt es, anzugeben, wie die durch die Integration eingeführten willkürlichen Conſtanten nach den Daten der Aufgabe beſtimmt werden.

Wenn man den zweiten Theil der Gleichung (A) nach Hinweglaſſung des Gliedes mit dem Zeichen f, welches vermöge der Gleichung (a) verſchwindet, gleich Null ſetzt; ſo erhält man die Gleichung:

$$[V\delta x + (Y^{(1)} - \frac{dY^{(2)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(3)}}{dx^2} - \text{ꝛc.})\,(\delta y - y'\delta x) + (Y^{(2)} - \frac{dY^{(3)}}{dx} + \text{ꝛc.})\,(\delta y' - y''\delta x) + \text{ꝛc.}]_0^1 = 0. \qquad (b)$$

welche man auf die Form:

$$\Xi_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + Y_1^{(1)}\delta y'_1 + \ldots + Y_1^{(n-1)}\delta y_1^{(n-1)} - (\Xi_0\delta x_0 + Y_0\delta y_0 + Y_0^{(1)}\delta y'_0 + \ldots + Y_0^{(n-1)}\delta y_0^{(n-1)}) = 0, \qquad (\beta)$$

bringen kann, wenn man durch:

$$\Xi_0,\quad Y_0,\quad Y_0^{(1)}, \ldots Y_0^{(n-1)}, \qquad (c_0)$$

bekannte Functionen der Anfangswerthe x_0, y_0, y'_0, ꝛc. und durch:

$$\Xi_1,\quad Y_1,\quad Y_1^{(1)}, \ldots Y_1^{(n-1)} \qquad (c_1)$$

Functionen bezeichnet, welche auf dieſelbe Weiſe reſp. aus den Endwerthen x_1, y_1, y'_1, ꝛc. zuſammengeſetzt ſind. Wenn nun die Werthe der Endgrößen:

$$x_0, x_1;\quad y_0, y_1;\quad y'_0, y'_1;\ \text{ꝛc.} \qquad (d)$$

Conſtanten ſind, welche unmittelbar durch die Bedingungen der Aufgabe gegeben werden; ſo ſind ihre Variationen:

$$\delta x_0, \delta x_1;\quad \delta y_0, \delta y_1;\quad \delta y'_0, \delta y'_1;\ \text{ꝛc.} \qquad (e)$$

Null, die Gleichung (β) wird von ſelbſt erfüllt, und man hat zur Beſtimmung der in dem Integrale (a) vorkommenden willkürlichen Conſtanten ebenſo viele Gleichungen von der Form:

$$\Phi(x_0, y_0, a_1, a_2, \ldots a_{2n}) = 0,$$
$$\Phi(x_1, y_1, a_1, a_2, \ldots a_{2n}) = 0;$$
$$\Phi'(x_0, y_0, y'_0, a_1, a_2, \ldots a_{2n}) = 0,$$
$$\Phi'(x_1, y_1, y'_1, a_1, a_2, \ldots a_{2n}) = 0;\ \text{ꝛc.}$$

wo die Function Φ' durch die unmittelbare Differenziation der Function Φ erhalten wird u. ſ. f.

Wenn keiner der Werthe der Größen (d) gegeben iſt; ſo ſind ihre Variationen unbeſtimmt und unabhängig. Man kann alſo der Gleichung (β) nur

dadurch genügen, daß man jeden der Factoren (c_0), (c_1), einzeln gleich Null setzt, und die so erhaltenen Gleichungen vertreten die Stelle derer, welche die Werthe der Größen (d) direct geben würden, so daß man immer zur Bestimmung der in dem Integrale (a) vorkommenden willkürlichen Constanten die hinreichenden Bedingungen hat.

Wenn endlich zwischen den Größen (d) eine gewisse Anzahl von Bedingungsgleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ꝛc. stattfinden, so leitet man daraus nach §. 154 die Relationen zwischen den durch:

$$\delta f_1 = 0, \quad \delta f_2 = 0, \text{ ꝛc.} \qquad (f)$$

ausgedrückten Variationen (e) ab, eliminirt aus der Gleichung (β) vermittelst der Gleichung (f) so viel Variationen, als die Anzahl der Gleichungen (f) Einheiten hat, und setzt dann die Multiplicatoren der nicht eliminirten und willkürlich gebliebenen Variationen einzeln gleich Null, wodurch dieser Fall auf die beiden zuerst betrachteten zurückgeführt wird.

§. 376. Auch ist zu bemerken, daß die Function V einen oder mehrere der Grenzwerthe (d) enthalten könnte, welche in der Gleichung (β) nothwendig vorkommen. Alsdann muß man, indem man die Variation δV nimmt, die fraglichen Größen variiren lassen, wofern ihre Werthe nicht nach den Bedingungen der Aufgabe constant sind. Wenn z. B. x_0, in V vorkäme und $\frac{dV}{dx_0} = \theta$ wäre; so wäre die Variation von V in Beziehung auf diese Größe $= \theta\delta x_0$, und wenn man die Function $\int\theta dx$ mit Θ bezeichnete, so hätte man in der Gleichung (A) und folglich in der Gleichung (β) ein neues Glied:

$$(\Theta_1 - \Theta_0)\delta x_0,$$

aber die Gleichung (a) bliebe unverändert.

§. 377. Wir wollen nun annehmen, daß die Function V zwei Functionen y, z der Veränderlichen x und ihre Ableitungen y', z'; y'', z''; ꝛc. enthalte, wie dieses bei den Aufgaben über die Linien von doppelter Krümmung vorkommt. Wenn man

$$dV = Xdx + Ydy + Y^{(1)}dy' + Y^{(2)}dy'' + Y^{(3)}dy''' + \text{ꝛc.}$$
$$+ Zdz + Z^{(1)}dz' + Z^{(2)}dz'' + Z^{(3)}dz''' + \text{ꝛc.}$$

setzt, so kann man, ohne die Rechnungen zu wiederholen, welche die Formel (A) gegeben haben, setzen:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\int_{x_0}^{x_1} Vdx = [V\delta x]_0^1 \\
&+ [(Y^{(1)} - \frac{dY^{(2)}}{dx} + \text{ꝛc.})(\delta y - y'\delta x) + (Y^{(2)} - \frac{dY^{(3)}}{dx} + \text{ꝛc.})(\delta y' - y''\delta x) + \text{ꝛc.}]_0^1 \\
&+ [(Z^{(1)} - \frac{dZ^{(2)}}{dx} + \text{ꝛc.})(\delta z - z'\delta x) + (Z^{(2)} - \frac{dZ^{(3)}}{dx} + \text{ꝛc.})(\delta z' - z''\delta x) + \text{ꝛc.}]_0^1 \\
&+ \int_{x_0}^{x_1} [Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Z^{(3)}}{dx^3} + \text{ꝛc.}](\delta y - y'\delta x)dx \\
&+ \int_{x_0}^{x_1} [Z - \frac{dZ^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Z^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Z^{(3)}}{dx^3} + \text{ꝛc.}](\delta z - z'\delta x)\delta x.
\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Diese Formel führt zunächst auf die beiden Gleichungen:

$$Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Y^{(3)}}{dx^3} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$Z - \frac{dZ^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Z^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Z^{(3)}}{dx^3} + \text{ꝛc.} = 0,$$

welches im Allgemeinen ſimultane Differenzialgleichungen ſind (§. 165), deren Integration ſich, wie wir geſehen haben, auf die einer gewöhnlichen Differenzialgleichung mit zwei veränderlichen Größen zurückführen läßt. Geſetzt, dieſe Integration wäre verrichtet, und man hätte die durch x ausgedrückten Werthe von y, z gefunden, welche bei der gehörigen Anzahl willkürlicher Conſtanten den vorhergehenden Gleichungen auf die allgemeinſte Weiſe genügen, ſo blieben noch die Werthe dieſer willkürlichen Conſtanten vermittelſt der ſich auf die Integrationsgrenzen beziehenden Bedingungen zu beſtimmen, und es iſt nicht nöthig, hier über dieſe Ausdehnung der weiter oben (§. 375) angedeuteten Rechnungen ein Mehreres zu ſagen.

§. 378. Die Veränderlichen x, y, z können durch eine Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (g)$$

mit einander verbunden ſein, wie bei den Aufgaben über Linien, die in einer gegebenen Fläche liegen müſſen, ſo folgt:

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0.$$

Vermittelſt dieſer Gleichung ſchafft man δz aus der Formel (B) fort, und wenn man den unter dem Integralzeichen befindlichen Coefficienten von δy oder von δx nach der Subſtitution $= 0$ ſetzt; ſo erhält man die Differenzialgleichung:

$$\frac{dF}{dz}\left(Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \text{ꝛc.}\right) - \frac{dF}{dy}\left(Z - \frac{dZ^{(1)}}{dx} + \text{ꝛc.}\right) = 0,$$

woraus man z vermittelſt der Gleichung (g) fortſchaffen kann.

§. 379. Wenn die Anzahl der Veränderlichen und die der Bedingungsgleichungen beträchtlicher wäre, ſo würde die Eliminationsrechnung durch Anwendung der Methode der unbeſtimmten Multiplicatoren eleganter gemacht (§. 154); aber die Anwendung dieſer Methode iſt beſonders dann bemerkenswerth, wenn die Bedingungsgleichungen nicht blos die Veränderlichen x, y, z, ... ſondern auch ihre Ableitungen $y', y'', \ldots z', z'', \ldots$ ꝛc. enthalten, und es kommt alsdann darauf an, die Variationen der abgeleiteten Functionen blos von denen der urſprünglichen Functionen abhängig zu machen.

Es ſei alſo:

$$F(x, y, y', y'', \ldots z, z', z'', \ldots) = 0 \qquad (h)$$

eine ſolche Gleichung, ſo hat man $\delta F = 0$ und auch $\lambda\delta F = 0$, wo λ einen unbeſtimmten Multiplicator bedeutet, und da dieſe Gleichung für alle zwiſchen den Integrationsgrenzen liegende Werthe von x, y, z, ... ſtattfinden muß, ſo hat man auch:

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda\delta F dx = 0; \qquad (i)$$

aber alsdann bezeichnet λ einen Factor, welcher ſich mit der Abſciſſe verändern kann, oder eine unbekannte Function von x iſt. Die Gleichung (i) iſt die Summe unendlich vieler Gleichungen, wie $\lambda\delta F dx = 0$, wo die Veränder-

lichen $x, y, z, \ldots$ und der Coefficient λ für alle dieſe Gleichungen im Allgemeinen verſchiedene Werthe haben.

Die Werthe von $y, z, \ldots$ als Functionen von x, welche das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta \cdot V dx$$

verſchwinden machen, reduciren alſo auch das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} (\delta \cdot V dx + \lambda \delta F dx). \qquad (k)$$

auf Null.

Nach den Regeln der Elimination durch die Methode der unbeſtimmten Multiplicatoren muß man nach der Einführung des unbeſtimmten Factors λ, y, z als von einander unabhängige Functionen von x betrachten, ſo daß man, wenn man

$$dF = X dx + Y dy + Y^{(1)} dy' + Y^{(2)} dy'' + \text{ꝛc.}$$
$$+ Z dz + Z^{(1)} dz' + Z^{(2)} dz'' + \text{ꝛc.}$$

und nach der Anwendung der gewöhnlichen Methode der Variationen auf das Integral (k) die Factoren von δy, δz unter dem Zeichen einzeln $= 0$ ſetzt, erhält:

$$\left.\begin{aligned} Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2 Y^{(2)}}{dx^2} - \text{ꝛc.} + \lambda Y - \frac{d \cdot \lambda Y^{(1)}}{dx} + \frac{d^2 \cdot \lambda Y^{(2)}}{dx^2} - \text{ꝛc.} = 0 \\ Z - \frac{dZ^{(1)}}{dx} + \frac{d^2 Z^{(2)}}{dx^2} - \text{ꝛc.} + \lambda Z - \frac{d \cdot \lambda Z^{(1)}}{dx} + \frac{d^2 \cdot \lambda Z^{(2)}}{dx^2} - \text{ꝛc.} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (l)$$

Werden die drei Gleichungen (h) und (l) gleichzeitig integrirt, ſo geben ſie die Werthe von λ, y, z als Functionen von x und den willkürlichen Conſtanten, und durch Elimination von λ kann man die Werthe von y, z als Functionen von x und der durch die Integration eingeführten Conſtanten einzeln erhalten. Werden die Grenzgleichungen auf eine ähnliche Weiſe behandelt; ſo beſtimmen ſie die Anfangs- und Endwerthe der Function λ, y, z und ihrer Ableitungen, und folglich die durch die Integration eingeführten willkürlichen Conſtanten. Beſonders bei den Anwendungen der Berechnung der Variation der Integrale auf Probleme der Mechanik, wo man die Körper als continuirliche Maſſen betrachtet, iſt dieſe Theorie der veränderlichen Multiplicatoren von hoher Wichtigkeit, worüber man insbeſondere die Mécanique analytique von Lagrange zu Rathe ziehen muß. Bei den Aufgaben dieſer Art iſt die Function λ nicht mehr eine blos zur Bequemlichkeit der Rechnung eingeführte Hülfsveränderliche, ſondern ſie bezeichnet eine gewiſſe beſondere Größe, deren Werth unumgänglich nothwendig angegeben werden muß, wenn die Auflöſung der Aufgabe vollſtändig ſein ſoll.

§. 380. Dieſes führt uns auf die Erörterung der Theorie der relativen Maxima und Minima. Man ſagt, man ſuche ein relatives Maximum oder Minimum, wenn es darauf ankommt, die Function $y = \varphi x$ zu beſtimmen, welche das Integral $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ zu einem Maximum oder Minimum macht, mit der Bedingung, daß ein anderes Integral $\int_{x_0}^{x_1} L dx$, welches von derſelben Function y abhängt, einen conſtanten Werth behält. Dieſes iſt im Allgemeinen die Aufgabe, welche man ſich bei den iſoperimetriſchen Problemen ſtellt, welche darin beſtehen, unter den Curven von derſelben Länge, d. h. unter denen, für welche das Integral:

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2}\cdot dx$$

einen conſtanten Werth behält, diejenige zu beſtimmen, deren Ordinate y die Eigenſchaft hat, das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen.

In einem ſolchen Falle ſind die Variationen der Coordinaten x, y durch die Bedingungsgleichung:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} L dx = 0$$

mit einander verbunden, und wenn man das Eliminationsverfahren durch die unbeſtimmten Multiplicatoren anwendet; ſo ergibt ſich daraus:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx + \lambda \delta \int_{x_0}^{x_1} L dx = 0$$

wo λ einen conſtanten Coefficienten bezeichnet, oder:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} (V + \lambda L) dx = 0. \qquad (m)$$

Der Coefficient λ iſt conſtant, weil man hier nur eine Bedingungsgleichung hat, welche ſich auf den Werth eines Integrales bezieht, und nicht, wie im vorhergehenden §, unendlich viele Bedingungsgleichungen, wovon jede für die Coordinaten in Beziehung auf ein Element des Integrales ſtattfindet. Ferner iſt einleuchtend, daß, wenn das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx$$

einen größten oder kleinſten Werth hat, und das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} L dx$$

conſtant bleiben muß, die Summe:

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx + \lambda \int_{x_0}^{x_1} L dx = \int_{x_0}^{x_1} (V + \lambda L) dx,$$

wo λ eine conſtante Zahl bezeichnet, auch einen größten oder kleinſten Werth hat. Die Function $y = \varphi x$, welche man beſtimmt, wenn man die gewöhnlichen Regeln der Variationsrechnung auf die Formel (m) anwendet, enthält die unbeſtimmte Conſtante λ, deren Werth man durch die Bedingung beſtimmt, daß das Integral $\int_{x_0}^{x_1} L dx$, worin y und folglich λ vorkommt, einen conſtanten und gegebenen Werth hat.

Zu demſelben Reſultate kann man auch auf folgende Weiſe gelangen. Wir wollen

$$\int L dx = z, \quad \text{oder} \quad L - \frac{dz}{dx} = 0 \qquad (n)$$

ſetzen; ſo iſt z eine Function von x, welche man vermittelſt der Gleichung (n) als mit y und mit x verbunden betrachten kann. Man muß alſo in dieſem Falle die Methode im §. 379 anwenden, indem man die Gleichung (n) als eine Bedingungsgleichung behandelt, wodurch man erhält:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta\cdot V dx+\lambda\delta\cdot\left(L-\frac{dz}{dx}\right)dx\right]=0.$$

Das Glied:

$$\int_{x_0}^{x_1}\lambda\delta\cdot\frac{dz}{dx}\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\lambda\delta dz$$

gibt durch theilweiſe Integration:

$$[\lambda\delta z]_0^1-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d\lambda}{dx}dx\delta z.$$

Die Veränderliche z kommt übrigens weder in V, noch in L vor, ſo daß das Glied mit der unabhängigen Variation δz nicht verſchwinden könnte, wenn nicht:

$$\frac{d\lambda}{dx}=0,\quad\text{oder}\quad\lambda=\text{const.}$$

wäre.

Man hat auch:

$$[\lambda\delta z]_0^1=\lambda(\delta z_1-\delta z_0)=0,$$

weil λ conſtant und nach der Vorausſetzung die Größe:

$$z_1-z_0=\int_{x_0}^{x_1}Ldx$$

ebenfalls conſtant iſt, ſo daß man nur noch die Variation des Integrales:

$$\int_{x_0}^{x_1}(V+\lambda L)dx,$$

wo λ einen conſtanten Coefficienten bezeichnet, verſchwinden zu laſſen braucht.

Dieſe Analyſe erſtreckt ſich ſogar auch auf den Fall, wo man eine größere Anzahl von Integralen hätte, die conſtante Werthe behalten müſſen.

§. 381. Bisher haben wir nur die gemeinſchaftlichen Bedingungen des Maximums oder des Minimums betrachtet; allein es müßten auch die Mittel zur allgemeinen Unterſcheidung des Maximums und Minimums und zur Erkennung der Ausnahmefälle, wo die Variation des Integrales verſchwinden kann, ohne daß deswegen ein Maximum oder Minimum ſtattfindet, angegeben werden.

Nach den allgemeinen Prinzipien über die Maxima und Minima (§. 91 und folg.) ſieht man ſofort ein, daß ſich dieſe Analyſe der Beſtimmung der Variationen der zweiten Ordnung eines Integrales oder der Variationen ſeiner Variationen anſchließen muß; allein bei den gewöhnlichen Anwendungen braucht man in dieſe complicirte Analyſe nicht einzugehen, weil ſich aus der Natur der Aufgabe die Unmöglichkeit des Maximums oder Minimums erkennen läßt; ſo daß über den Sinn des erhaltenen Reſultates keine Zweideutigkeit ſtattfinden kann, wenn gleich man blos die Variationen der erſten Ordnung betrachtet.

Auch iſt zu bemerken, daß wir uns nicht mit der Beſtimmung des Maximums oder Minimums eines beſtimmten Integrales beſchäftigen, wenn die Function unter dem Integralzeichen $\int$ zwiſchen den Integrationsgrenzen durch das Unendliche geht, ſo daß die Integrale nicht mehr als Summen unendlich kleiner Differenzialelemente betrachtet werden können.

In dem folgenden Kapitel wollen wir zur Erläuterung der vorhergehenden allgemeinen Theorie einige Beiſpiele betrachten.

Achtes Kapitel.

Anwendungen der Berechnung der Variationen einfacher Integrale. – Ausdehnung der Methode der Variationen auf doppelte Integrale.

I. Anwendungen der Bestimmung der Variationen einfacher Integrale auf Probleme über die Maxima und Minima.

§. 382. **Von der kürzesten Linie auf einer gegebenen Oberfläche.** — Da die von einem Punkte auf eine Linie oder Fläche gefällte Normale die kürzeste oder längste gerade Linie ist, welche man von diesem Punkte nach dieser Linie oder Fläche ziehen kann; so ist leicht einzusehen, daß die längste oder kürzeste Linie, welche zwischen zwei Linien oder Flächen gezogen werden kann, die gemeinschaftliche Normale dieser beiden Linien oder Flächen ist. Wir begnügen uns, die Anwendung der allgemeinen Formeln des vorhergehenden Kapitels auf einen solchen einfachen Fall anzudeuten, und gehen zu der Aufgabe über, welche zum Zwecke hat, die kürzeste Linie zu bestimmen, die man auf einer gegebenen Oberfläche zwischen zwei festen Punkten oder zwischen zwei festen krummen Linien auf der gegebenen Oberfläche ziehen kann. Offenbar würde die Aufgabe keine Auflösung gestatten, wenn man die Bedingung des Maximums für die des Minimums substituirte, wofern man keine Beschränkungen hinzufügte, wie z. B. die, daß die gesuchte Curve eine ebene sein muß.

Das Integral, welches zu einem Minimum gemacht werden soll ist:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\cdot dx,$$

woraus folgt, wenn man $\sqrt{1+y'^2+z'^2} = V$ setzt:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = \left[\frac{\delta x + y'\delta y + z'\delta z}{V}\right]_0^1$$

$$+\int_{x_0}^{x_1'} dx\left[\frac{d\left(\frac{y'}{V}\right)}{dx}(\delta y - y'\delta x) + \frac{d\left(\frac{z'}{V}\right)}{dx}(\delta z - z'\delta x)\right].$$

Es sei $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Oberfläche, auf welcher sich die gesuchte Linie befinden muß, so hat man:

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0,$$

woraus folgt, wenn man δx unter dem Zeichen $\int$ wegschafft und die Multiplicatoren von $\delta y, \delta z = 0$ setzt:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy}\right)\cdot\frac{d\left(\frac{y'}{V}\right)}{dx} + z'\frac{dF}{dy}\cdot\frac{d\left(\frac{z'}{V}\right)}{dx} &= 0\\ \left(\frac{dF}{dy} + z'\frac{dF}{dz}\right)\cdot\frac{d\left(\frac{z'}{V}\right)}{dx} + y'\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\left(\frac{y'}{V}\right)}{dx} &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Aber da ſich die geſuchte Curve auf der gegebenen Oberfläche befinden muß; ſo ſind die Ableitungen y', z' durch die Gleichung:

$$\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} + z'\frac{dF}{dz} = 0$$

mit einander verbunden, und die beiden Gleichungen (1) werden identiſch, wie es der Fall ſein muß, und nehmen die Form an:

$$\frac{dF}{dz} \cdot \frac{d\left(\frac{y'}{V}\right)}{dx} = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d\left(\frac{z'}{V}\right)}{dx}. \qquad (2)$$

In dieſe letzte Gleichung müßte man die aus der Gleichung der gegebenen Oberfläche abgeleiteten Werthe von z, z' als Functionen von x, y, y' ſubſtituiren und integriren; allein wir wollen unter Beibehaltung der Allgemeinheit der Function F aus der Gleichung (2) den Beweis einer charakteriſtiſchen Eigenſchaft der Curven ableiten, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leiſten. Wenn man, wie gewöhnlich, mit s den Bogen der Curve bezeichnet; ſo hat man die Gleichungen:

$$\frac{y'}{V} = \frac{dy}{ds}, \qquad \frac{z'}{V} = \frac{dz}{ds},$$

vermöge welcher ſich die Gleichung (2) in die Proportion:

$$\frac{dF}{dy} : \frac{dF}{dz} :: \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} : \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}$$

verwandelt, woraus wegen der Symmetrie folgt:

$$\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy} : \frac{dF}{dz} :: \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} : \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} : \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}. \qquad (3)$$

Aber wenn man durch λ, μ, ν; λ', μ', ν' die Winkel bezeichnet, welche die Normale der gegebenen Oberfläche und der Krümmungshalbmeſſer der geſuchten Linie mit den Parallelen zu den poſitiven Coordinatenaxen bilden; ſo geht die Proportion (3) über in:

$$\cos.\lambda : \cos.\mu : \cos.\nu :: \cos.\lambda' : \cos.\mu' : \cos.\nu'. \quad (§.\ 228 \text{ und } 237.)$$

Folglich iſt $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$. Alſo iſt die Osculationsebene der auf der gegebenen Oberfläche ſo gezogenen Linie, daß ſie zwiſchen zwei beliebigen Punkten kürzer iſt, als jede andere Linie, welche in derſelben Fläche liegt, und durch dieſelben beiden Punkte geht, auf der gegebenen Oberfläche beſtändig normal.

§. 383. Die Grenzgleichung:

$$\left[\frac{\delta x + y'\delta y + z'\delta z}{V}\right]_0^1 = 0$$

wird von ſelbſt erfüllt, wenn die beiden Endpunkte der geſuchten Curve beſtimmt und der Lage nach gegeben ſind, denn man hat alsdann:

$$\delta x_0 = 0, \quad \delta y_0 = 0, \quad \delta z_0 = 0; \quad \delta x_1 = 0, \quad \delta y_1 = 0, \quad \delta z_1 = 0.$$

Wir wollen nun annehmen, daß dem nicht ſo ſei, ſondern daß jeder der beiden Endpunkte ſich in einer auf der gegebenen Oberfläche gezogenen gegebenen Curve befinden müſſe; ſo hat man in jedem dieſer beiden Endpunkte,

wenn man der Einfachheit wegen die sie particularisirenden Indices 0, 1 hinwegläßt:

$$\delta x + y'\delta y + z'\delta z = 0,$$

oder:

$$1 + y'\frac{\delta y}{\delta x} + z'\frac{\delta z}{\delta x} = 0. \tag{4}$$

Da sich nun der Endpunkt (x, y, z) auf einer gegebenen Linie befinden muß, so sind $\frac{\delta y}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta x}$ Größen, welche durch diese Linie bestimmt werden, und die trigonometrischen Tangenten der Winkel messen, welche die Projectionen der Tangente dieser Linie im Punkte (x, y, z) auf die Ebenen der xy und der xz mit der Axe der x bilden. Andererseits sind y', z' die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Projectionen der durch den Endpunkt der kürzesten Linie gezogenen Tangente auf dieselben Ebenen mit derselben Axe bilden. Die Gleichung (4) drückt also aus, daß die kürzeste Linie die beiden auf der gegebenen Oberfläche liegenden Linien, auf welchen sich ihre Endpunkte resp. befinden sollen, unter rechten Winkeln durchschneidet.

§. 384. Ueber die Rotationsoberfläche von dem kleinsten Flächeninhalte. — Man soll in der Ebene der xy die durch zwei gegebene Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) gehende Curve bestimmen, welche bei ihrer Umdrehung um die Axe der x eine Rotationsoberfläche von dem kleinsten Flächeninhalte erzeugt. Das Integral, dessen Variation verschwinden muß, ist nach §. 350:

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\cdot dx \tag{5}$$

und die Gleichung (a) im §. 373 verwandelt sich in diesem besondern Falle in:

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dx} = 0, \quad \text{oder} \quad 1 - \frac{d\left(y\frac{dy}{ds}\right)}{ds} = 0.$$

Wenn man s zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, so bekommt diese Gleichung die Form:

$$1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - y\frac{d^2y}{ds^2} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - y\frac{d^2y}{ds^2} = 0. \tag{6}$$

Aber in derselben Voraussetzung hat man:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} = 0, \tag{7}$$

so daß sich die Gleichung (6) in:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + y\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\left(y\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = 0$$

verwandelt. Hieraus folgt:

$$y\frac{dx}{ds} = b, \tag{8}$$

wo b eine willkürliche Conſtante bezeichnet, und folglich hat man, wenn man zum Quadrate erhebt, und für ds^2 ſeinen Werth ſetzt:

$$dx = \frac{bdy}{\sqrt{y^2 - b^2}}, \qquad (9)$$

und endlich gibt eine neue Integration:

$$x - x_0 = b\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - b^2}} = b \log. \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - b^2}}{y_0 + \sqrt{y_0^2 - b^2}}\right).$$

Da die Coordinaten der beiden Endpunkte gegebene Conſtanten ſind, ſo wird die Grenzgleichung von ſelbſt erfüllt.

Nach der Gleichung (8) drückt die Conſtante b den Werth der Ordinate y für den Punkt der Curve aus, worin die Tangente zu der Axe der x parallel iſt, und der Werth derſelben könnte näherungsweiſe beſtimmt werden, wenn man die Wurzel der transcendenten Gleichung:

$$x_1 - x_0 = b \log. \left(\frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - b^2}}{y_0 + \sqrt{y_0^2 - b^2}}\right)$$

durch ſucceſſive Annäherungen berechnete.

Um der Gleichung der Curve, welche der Aufgabe Genüge leiſtet, die einfachſte Form zu geben, wollen wir die Axe der y durch den Punkt der Curve gehen laſſen, worin die Tangente zur Axe der x parallel iſt, was darauf hinausläuft, die Gleichung (9) unter der Vorausſetzung zu integriren, daß man zugleich $x = 0$ und $y = b$ hat; ſo kommt:

$$x = b \log. \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - b^2}}{b}\right), \quad y + \sqrt{y^2 - b^2} = be^{\frac{x}{b}},$$

folglich:

$$y - \sqrt{y^2 - b^2} = \frac{b^2}{y + \sqrt{y^2 - b^2}} = be^{-\frac{x}{b}},$$

und mithin:

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right). \qquad (10)$$

Aus der Gleichung (8) folgt alsdann, wenn man den Punkt, deſſen Abſciſſe Null iſt, zum Anfangspunkte der Bogen nimmt:

$$s = \frac{1}{b}\int_0^x ydx = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

Die Curve, deren Gleichung wir eben gefunden haben, iſt unter dem Namen der Kettenlinie bekannt, weil, wie in der Mechanik bewieſen wird, ein ſchwerer homogener, vollkommen biegſamer und an beiden Enden aufgehangener Faden, die Geſtalt dieſer Curve annimmt. Galiläi, welcher ſich damit beſchäftigt hat, verwechſelte ſie mit der Parabel, aber Leibnitz hat die Conſtruction derſelben auf die zweier logarithmiſcher Linien, welche aus der Gleichung (10) folgt, zurückgeführt.

Die Kettenlinie bietet, wie die Cycloide, außer den bereits angeführten, noch mehrere merkwürdige Eigenſchaften dar. Es ſei MBM' (Fig. 89) eine in Beziehung auf die Axe OY ſymmetriſche Kettenlinie und XX' die Axe, um

welche ſich die Curve drehen muß, um die Rotationsoberfläche von dem kleinſten Flächeninhalte zu erzeugen; ſo drückt die kleinſte Ordinate OB den Parameter b aus. Vermöge der Gleichungen (8) und (10) hat man:

$$\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\frac{y}{b},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{b^2},$$

ſo daß in allen Punkten der Kettenlinie die Normale (§. 172) und der Krümmungshalbmeſſer (§. 193) den gemeinſchaftlichen Werth $\frac{y^2}{b}$ haben. Im Scheitel B hat der Krümmungshalbmeſſer ſeinen kleinſten Werth und iſt dem Parameter b gleich.

Wenn man von dem Fußpunkte P der Ordinate PM = y auf die Tangente MT das Perpendikel Pμ fällt; ſo hat man:

$$P\mu : MP :: PT : MT.$$

Es iſt aber:

$$PT=\frac{by}{\sqrt{y^2-b^2}},\qquad MT=\frac{y^2}{\sqrt{y^2-b^2}},$$

und folglich hat das Perpendikel Pμ einen conſtanten Werth und iſt dem Parameter b gleich. Hieraus folgt:

$$M\mu=\sqrt{y^2-b^2}.$$

Die Fläche OBMP wird ausgedrückt durch:

$$\int_0^x ydx=b\int_y^b\frac{ydy}{\sqrt{y^2-b^2}}=b\sqrt{y^2-b^2}$$

und wegen der Gleichung (8) hat man:

$$\text{Bog. BM}=s=\frac{1}{b}\int_0^x ydx=\sqrt{y^2-b^2}.$$

Die Kettenlinie iſt alſo eine Curve, für welche die von ihr eingeſchloſſene Fläche und die Länge ihres Bogens durch algebraiſche Functionen der Ordinate ausgedrückt werden.

Wir haben eben gefunden, daß der Bogen BM der geraden Linie Mμ gleich iſt, und folglich gehört der Punkt μ einer Evolvente der Kettenlinie an, deren Rückkehrpunkt im Scheitel B der Evolute liegt. Dieſe Evolvente NBN' iſt in Beziehung auf die Axe der y ſymmetriſch und hat die Axe der x zur Aſymptote. Der Theil der geraden Linie μP = b iſt die Tangente der Curve NBN', welche alſo die merkwürdige Eigenſchaft darbietet, daß ſie eine Tangente von conſtanter Größe hat. Dieſe intereſſanten Bemerkungen ſind zuerſt von Ampère angegeben.

§. 385. Curve des ſchnellſten Falles oder Brachiſtochrone.*) So nennt man nämlich die Curve, längs welcher ein ſchwerer materieller Punkt herabfallen müßte, um am ſchnellſten von einem Punkte zu einem andern, nicht

*) Und nicht Brachyſtochrone, wie man gewöhnlich nach der barbariſchen Ortographie zu ſchreiben pflegt; denn dieſes Wort kommt nicht unmittelbar von dem Adjective βραχὺς, welches denſelben Sinn und dieſelbe Wurzel, als das lateiniſche Adjectiv brevis hat, ſondern von dem Superlative βράχιστος her, woraus das υ verſchwunden iſt.

auf derſelben Verticale liegenden, zu gelangen, wenn von der Reibung auf der Curve und von dem Widerſtande des umgebenden Mittels abſtrahirt wird. Da zu beiden Seiten der durch die beiden Endpunkte der Curve gelegten Verticalebene Alles ſymmetriſch iſt; ſo muß die Curve nothwendig in dieſer Verticalebene liegen, welche wir daher zu der Ebene der xy nehmen wollen, indem die poſitiven Abſciſſen x auf der Verticale von oben nach unten gezählt werden. Es ſeien x_0, x_1 die Abſciſſen des Anfangs- und Endpunktes des durchlaufenen Weges; ſo muß nach mechaniſchen Lehren das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{x-x_0}} \cdot dx$$

zu einem Minimum gemacht werden, wodurch man erhält:

$$d\left(\frac{y'}{\sqrt{(x-x_0)\ (1+y'^2)}}\right)=0, \quad \frac{y'}{\sqrt{(x-x_0)\ (1+y'^2)}}=b$$

$$\frac{1}{y'}=\frac{dx}{dy}=\sqrt{\frac{\frac{1}{b^2}-(x-x_0)}{x-x_0}}.$$

Wir wollen $\frac{1}{b^2}=2R$ und $x_0=0$ ſetzen, d. h. die Axe der x durch den Anfangspunkt der Bewegung gehen laſſen; ſo erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{\frac{2R-x}{x}},$$

welches die einer Cycloide iſt, wovon ein Bogen dieſen Anfangspunkt der Bewegung zum Fußpunkte hat (§. 177). Der Halbmeſſer R des Erzeugungskreiſes wird durch die Bedingung beſtimmt, daß die Cycloide durch den Endpunkt des von dem Körper durchlaufenen Weges gehen muß.

§. 386. Iſoperimetriſche Probleme. — Man ſoll die Curve finden, deren, durch die Ordinaten der Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) begrenzte Fläche $\int_{x_0}^{x_1} y\,dx$ ein Maximum oder Minimum iſt, indem der Curvenbogen zwiſchen denſelben beiden Punkten eine gegebene Länge hat. Nach §. 380 muß man ſetzen:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}(y+\lambda\sqrt{1+y'^2})\,dx=0,$$

wo λ einen conſtanten Coefficienten bezeichnet, ſo erhält man:

$$1-\lambda\cdot\frac{d\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dx}=0,$$

woraus folgt, wenn man integrirt, und den $y'=0$ entſprechenden Werth von x mit ξ bezeichnet:

$$x-\xi=\pm\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad y'=\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x-\xi}{\sqrt{\lambda^2-(x-\xi)^2}}.$$

Integrirt man nochmals und bezeichnet den $x = \xi$ entſprechenden Werth von y mit η; ſo kommt:

$$y - \eta = \mp\sqrt{\lambda^2 - (x-\xi)^2}, \text{ oder } (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \lambda^2.$$

Die geſuchte Curve iſt alſo ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= \lambda$ und deſſen Mittelpunkt der Punkt (ξ, η) iſt. Die drei Conſtanten ξ, η, λ werden durch die Bedingung beſtimmt, daß der Kreis durch die beiden Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) gehen und der zwiſchen dieſen beiden Punkten liegende Bogen eine gegebene Länge haben muß. Es findet eine doppelte Auflöſung ſtatt, indem der Kreisbogen, welcher der Axe der x ſeine Concavität zukehrt, dem Maximum und der, welcher dieſer Axe ſeine Convexität zukehrt, dem Minimum entſpricht. Hieraus folgt, daß der Kreis die geſchloſſene Curve iſt, welche bei demſelben Umfange die größte Fläche umſchließt, wie es die Alten auch durch die reine Geometrie bewieſen haben.

Wenn man in der Aufgabe im §. 384 noch die Bedingung hinzufügt, daß die geſuchte Curve eine von denen ſein ſoll, welche zwiſchen den Punkten (x_0, y_0), (x_1, y_1) eine conſtante und gegebene Länge haben; ſo muß in der Gleichung (8) die Veränderliche y durch $y + \lambda$ erſetzt werden. Uebrigens ſind die Rechnungen dieſelben und führen ebenfalls auf die Gleichung der Kettenlinie, in welche eine neue willkürliche Conſtante eingeführt wird; aber man hat auch eine neue Bedingungsgleichung, welche ſich daraus ergibt, daß die Curve zwiſchen den beiden Endpunkten eine conſtante gegebene Länge haben muß.

§. 387. Als letztes Beiſpiel wollen wir unter den ebenen iſoperimetriſchen Curven, welche von zwei feſten Punkten (x_0, y_0), (x_1, y_1) begrenzt werden, die zu beſtimmen ſuchen, welche, wenn ſie ſich um die Axe der x dreht, eine Rotationsoberfläche beſchreibt, ſo daß das von ihr eingeſchloſſene Volumen $\pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$ ein Maximum oder Minimum iſt.

Die analytiſche Bedingung der Aufgabe iſt:

$$\delta \cdot \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + \lambda^2\sqrt{1+y'^2})dx = 0,$$

wo der Homogeneität wegen λ^2 ſtatt λ geſetzt iſt, und ſie gibt:

$$2y = \lambda^2 \cdot \frac{d\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dx} = \lambda^2 \cdot \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dx}, \qquad (11)$$

oder vielmehr, wenn man den Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen nimmt:

$$2y = \lambda^2 \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Subſtituirt man für $\frac{d^2y}{ds^2}$ ſeinen aus der Gleichung (7) abgeleiteten Werth; ſo kommt:

$$2y\frac{dy}{ds} = -\lambda^2 \frac{d^2x}{ds^2},$$

woraus folgt, wenn man integrirt und den Werth der Ordinate y für den Punkt der Curve, worin die Tangente auf der Axe der x ſenkrecht iſt, mit b bezeichnet:

$$y^2 - b^2 = -\lambda^2 \frac{dx}{ds} = -\frac{\lambda^2}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Dieſe letzte Gleichung gibt:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \pm \frac{(y^2-b^2)\,dy}{\sqrt{\lambda^4-(y^2-b^2)^2}}, \\ \text{und folglich:}\quad dx &= \mp \frac{\lambda^2 dy}{\sqrt{\lambda^4-(y^2-b^2)^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Eine neue Integration würde den Werth von x durch y ausgedrückt, mit einer willkürlichen Conſtante geben, und dieſe Conſtante, ſo wie die beiden andern Parameter b, λ würden durch die Bedingung beſtimmt, daß die Curve durch die Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) gehen und zwiſchen dieſen Punkten eine gegebene Länge haben muß.

Wir wollen $b = 0$ ſetzen, d. h. die Axe der x durch den Punkt der Curve gehen laſſen, worin die Tangente auf dieſer Axe ſenkrecht iſt, und dieſen Punkt ſowohl zum Anfangspunkte der Coordinaten x, y, als des Bogens s, welchem wir daſſelbe Zeichen als der Abſciſſe x beilegen, nehmen; ſo kommt:

$$x = \int_0^y \frac{y^2 dy}{\sqrt{\lambda^4 - y^4}}, \quad s = \lambda^2 \cdot \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\lambda^4 - y^4}}.$$

Es ſei $y = \lambda \cos.\varphi$, wo φ eine neue Veränderliche bezeichnet; ſo hat man:

$$dx = -\frac{\lambda \sin.\varphi \cos.^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\cos.^4\varphi}} = -\frac{\lambda \cos.^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1+\cos.^2\varphi}} = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos.^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin.^2\varphi}}$$

$$= -\frac{\lambda d\varphi}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin.^2\varphi} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin.^2\varphi}}\right),$$

$$ds = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin.^2\varphi}},$$

und folglich:

$$x = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left(2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin.^2\varphi} \cdot d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin.^2\varphi}}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)\right], \qquad (13)$$

$$s = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)\right].$$

Nach der periodiſchen Natur der Functionen F, E iſt leicht einzuſehen, daß die durch die Gleichung (13) ausgedrückte Curve einen periodiſchen Lauf hat, wie in Fig. 90 angegeben iſt. Da die größte Ordinate PM den Werth λ hat; ſo werden die Werthe der zugehörigen Abſciſſe $OP = \frac{1}{2}OA$ und der Bogen OM ausgedrückt durch:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \cdot \left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right], \quad \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Die Continuität der Curve wird in den Wendepunkten O, A, ꝛc., ſo wie die der Function s nicht unterbrochen, wie dieſes bei andern Curven, und namentlich bei der Lemniscate (§. 386) der Fall iſt, deren Bogen ebenfalls durch die elliptiſche Function $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)$ ausgedrückt wird.

Die Betrachtung, deren wir uns zur Vereinfachung des Ausdruckes der Integrale der Differenzialgleichungen (12) bedient haben, würden nicht mehr anwendbar ſein, 1) wenn die Conſtante b einen imaginären Werth von der Form $b'\sqrt{-1}$ haben müßte, wobei die in Rede ſtehenden Integrale noch ſehr wohl, obgleich auf eine weniger einfache Weiſe, durch elliptiſche Functionen ausgedrückt werden könnten, und 2) wenn zwiſchen den Conſtanten b, λ die Relation $b = \lambda$ ſtattfände. Aber in dieſem letzten Falle hätte man:

$$dx = \pm\frac{(y^2-\lambda^2)\,dy}{y\sqrt{2\lambda^2-y^2}}, \quad ds = \mp\frac{\lambda^2 dy}{\lambda\sqrt{2\lambda^2-y^2}}$$

folglich:

$$x = \text{const.} \mp\sqrt{2\lambda^2-y^2} \pm \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\log.\left(\frac{\sqrt{\lambda\sqrt{2}+y}-\sqrt{\lambda\sqrt{2}-y}}{\sqrt{\lambda\sqrt{2}+y}+\sqrt{\lambda\sqrt{2}-y}}\right).$$

Man kann die willkürliche Conſtante hinweglaſſen, wenn man die Axe der y durch den Punkt gehen läßt, deſſen Ordinate $y = \lambda\sqrt{2}$ iſt. Uebrigens durchſchneidet die Curve, welche durch dieſe Gleichung ausgedrückt wird, und zwiſchen den geraden Linien $y = \pm\lambda\sqrt{2}$ liegt, die Axe der x nicht in unendlich vielen Punkten, wie dieſes bei der Gleichung (13) der Fall iſt, ſondern hat dieſe Axe zur Aſymptote; denn wenn man $y = 0$ ſetzt, ſo erhält man $\frac{dy}{dx} = 0$ und $x = \pm\infty$.

Die Curve, wovon die erſte der Gleichungen (12) die Differenzialgleichung iſt, iſt unter dem Namen der elaſtiſchen Curve bekannt, weil eine elaſtiſche Ruthe oder Stange, welche in ihrer natürlichen Lage gerade iſt, dieſe Geſtalt annimmt, wenn ſie an dem einen Ende befeſtigt iſt und durch eine an dem andern Ende ſchicklich angebrachte Kraft gekrümmt wird. Man nennt dieſe Curve auch die Lintearia, weil ſie die Form des ſenkrechten Durchſchnittes einer vollkommen biegſamen, an zwei Erzeugungslinien aufgehangenen und mit einer ſchweren Flüſſigkeit gefüllten cylindriſchen Hülle deren Krümmung durch den Druck der Flüſſigkeit beſtimmt wird, darſtellt.

Eigentlich wird die Lintearia durch die Bedingung beſtimmt, daß das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$$

ein Maximum wird, während die Integralen:

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx, \quad \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

conſtante Werthe haben, d. h. durch die Gleichung:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} (y^2 + \lambda' y + \lambda^2\sqrt{1+y'^2})\,dx = 0,$$

woraus folgt:

$$2y + \lambda' = \lambda^2 \cdot \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dx}.$$

Da man nur die Ordinaten y um die conſtante Größe $\frac{\lambda'}{2}$ zu vermindern braucht, um dieſe Gleichung auf die Gleichung (11) zurückzuführen, ſo iſt klar, daß die Gleichung der Lintearia mit der der elaſtiſchen Curve zuſammenfallen muß, ſo lange man die Conſtanten nicht particulariſirt.

II. Ausdehnung der Methode der Variationen auf doppelte Integrale.

§. 388. Es ſei:

$$\int\int V dx dy$$

ein doppeltes Integral, deſſen anfangs als unveränderlich vorausgeſetzte Grenzen durch eine in der Ebene der x, y liegende geſchloſſene Curve $m_0 n_0 m_1 n_1$ (Fig. 80) beſtimmt werden (§. 354), und wir wollen annehmen, daß V außer den unabhängigen Veränderlichen x, y eine Function z derſelben und ihre partiellen Ableitungen der erſten und zweiten Ordnung p, q, r, s, t enthalte, welche Vorausſetzung für die Bedürfniſſe der Anwendungen hinreichend allgemein iſt; ſo kommt es darauf an, die Function z ſo zu beſtimmen, daß das gegebene Integral einen größten oder kleinſten Werth bekommt.

Wir wollen

$$dV = X dx + Y dy + Z dz + P dp + Q dq + R dr + S ds + T dt$$

ſetzen, ſo daß in der Vorausſetzung conſtanter Grenzen, wo die Variationen δx und δy als von ſelbſt verſchwindend betrachtet werden können (§. 374),

$$\delta V = Z\delta z + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + T\delta t$$

iſt, und folglich die Gleichung der Aufgabe:

$$\int\int [Z\delta z + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + T\delta t] dx dy = 0. \qquad (14)$$

Man muß die Glieder mit δp, δq, ꝛc. einzeln betrachten, um mit ihnen die Transformation vorzunehmen, welche das Weſen der Variationsrechnung ausmachen. Man hat:

$$\int\int P\delta p \cdot dx dy = \int\int P\delta \frac{dz}{dx} \cdot dx dy = \int\int P \frac{d\delta z}{dx} \cdot dx dy$$

$$= \int P dy \cdot \delta z - \int\int \frac{dP}{dx} dx dy \cdot \delta z.$$

In dieſer Gleichung wird das doppelte Integral:

$$\int\int \frac{dP}{dx} dx dy \cdot \delta z$$

als zwiſchen denſelben Grenzen, wie das gegebene doppelte Integral, genommen, betrachtet, und was das einfache Integral $\int P dy \delta z$ anlangt, welches durch eine erſte Integration in Beziehung auf die Veränderliche x erhalten wurde; ſo muß man ſich zur Beſtimmung ſeines Werthes vorſtellen, daß nach dieſer erſten Integration für x ſucceſſive die Werthe $\psi_1 y$, $\psi_0 y$ ſubſtituirt ſind, und

das zweite Reſultat von dem erſten abgezogen iſt (§. 354), was wir der Kürze wegen durch:

$$\left[\int P dy \cdot \delta z\right]_{\psi_0 y}^{\psi_1 y}$$

andeuten wollen, wo die zweite Integration in Beziehung auf y übrigens zwiſchen den Grenzen:

$$y = Oq_1 = y_1, \quad y = Oq_0 = y_0$$

genommen werden muß. Wir werden alſo ſchreiben:

$$\iint P\delta p \cdot dxdy = \left[\int_{y_0}^{y_1} P dy \cdot \delta z\right]_{\psi_0 y}^{\psi_1 y} - \iint \frac{dP}{dx} dxdy \cdot \delta z.$$

Ebenſo würde man finden:

$$\iint Q\delta q \cdot dxdy = \left[\int_{x_0}^{x_1} Q dx \cdot \delta z\right]_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} - \iint \frac{dQ}{dy} dxdy \cdot \delta z,$$

wo die Function φ nach dem in dem angeführten § Geſagten das Umgekehrte von ψ iſt.

Hierauf erhält man:

$$\iint R\delta r \cdot dxdy = \iint R \frac{d^2\delta z}{dx} dxdy = \int R dy \frac{d\delta z}{dx} - \iint \frac{dR}{dx} \cdot \frac{d\delta z}{dx} dxdy$$

$$= \int R dy \delta \cdot \frac{dz}{dx} - \int \frac{dR}{dx} dy \delta z + \iint \frac{d^2 R}{dx^2} dxdy \cdot \delta z,$$

oder wenn man die Grenzen der Integrale nach der vorhin angewandten Bezeichnung andeutet:

$$\iint R\delta r \cdot dxdy = \left[\int_{y_0}^{y_1} \left(-\frac{dR}{dx}\delta z + R\delta p\right) dy\right]_{\psi_0 y}^{\psi_1 y}$$

$$+ \iint \frac{d^2 R}{dx^2} dxdy \cdot \delta z.$$

Dieſelbe Rechnung gibt:

$$\iint T\delta t \cdot dxdy = \left[\int_{x_0}^{x_1} \left(-\frac{dT}{dy}\delta z + T\delta q\right) dx\right]_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x}$$

$$+ \iint \frac{d^2 T}{dy^2} dxdy \cdot \delta z.$$

Wenn wir endlich das Glied mit δs betrachten; ſo erhalten wir durch eine ähnliche Rechnung:

$$\iint S\delta s \cdot dxdy = \left[\int_{x_0}^{x_1} S\delta p dx\right]_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} - \left[\int_{y_0}^{y_1} \frac{dS}{dy} dy \delta z\right]_{\psi_0 y}^{\psi_1 y}$$

$$+ \iint \frac{d^2 S}{dxdy} dxdy \cdot \delta z.$$

Ueberdies hat man:

$$\int S\delta p \cdot dx = \int S \frac{d\delta z}{dx} dx = S\delta z - \int \frac{dS}{dx} dx \delta z,$$

folglich:

$$\iint S\delta z \cdot dxdy = \left[S\delta z \right]_{x_0}^{x_1} - \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{dS}{dx} dx\delta z \right]_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x}$$
$$- \left[\int_{y_0}^{y_1} \frac{dS}{dy} dy\delta z \right]_{\psi_0 y}^{\psi_1 y} + \iint \frac{d^2S}{dxdy} dxdy\delta z.$$

§. 389. Wenn man alle dieſe verſchiedenen Reſultate zuſammennimmt; ſo kann man die Gleichung (14) auf folgende Form bringen:

$$\left[\left(S\delta z \right)_{x_0}^{x_1} \right]_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} + \left\{ \int_{y_0}^{y_1} \left[\left(P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} \right) \delta z + R\delta p \right] dy \right\}_{\psi_0 y}^{\psi_1 y}$$
$$+ \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx} \right) \delta z + T\delta q \right] dx \right\}_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x}$$
$$+ \iint \left(Z - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2S}{dxdy} + \frac{d^2T}{dy^2} \right) dxdy \cdot \delta z = 0. \quad (A)$$

Der Coefficient von δz unter dem doppelten Integralzeichen muß für alle zwiſchen den Grenzen des doppelten Integrales liegende Werthe von x, y Null ſein, ſo daß man zwiſchen x, y, z die folgende Gleichung mit partiellen Differenzialen hat:

$$Z - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2S}{dxdy} + \frac{d^2T}{dy^2} = 0. \quad (a)$$

Jedes der in der Gleichung (A) vorkommenden einfachen Integrale erſtreckt ſich auf alle Elemente der Curve $m_0 n_0 m_1 n_1$ (Fig. 80), welche auf der Ebene der xy die Grenzen des doppelten Integrales beſtimmt. Folglich müſſen die Variationen $\delta z, \delta p, \delta q$ für alle Syſteme der Werthe von x, y, welche den auf dieſer Curve liegenden Punkten entſprechen, den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \left(P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} \right) \delta z + R\delta p = 0 \\ \left(Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx} \right) \delta z + T\delta q = 0 \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

genügen.

Endlich muß man haben:

$$\left[\left(S\delta z \right)_{x_0}^{x_1} \right]_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} = 0,$$

oder vielmehr:

$$(S\delta z)_{x_1, \varphi_1 x_1} - (S\delta z)_{x_0, \varphi_1 x_0} - (S\delta z)_{x_1, \varphi_0 x_1} + (S\delta z)_{x_0, \varphi_0 x_0} = 0, \quad (c)$$

wo $(S\delta z)_{x_1, \varphi_1 x_1}$ den Werth von $S\delta z$ für $x = x_1, y = \varphi_1 x_1$, ꝛc. bezeichnet.

§. 390. Man kann ſich die Veränderliche z als die Ordinate einer Fläche denken, und wenn der Durchſchnitt dieſer Fläche mit der cylindriſchen Fläche, deren Projection auf der Ebene der xy die Linie $m_0 n_0 m_1 n_1$ iſt, eine im Raume der Lage nach gegebene Curve wäre; ſo wäre die Variation δz für alle Punkte dieſer Durchſchnittslinie Null, die Gleichung (c) würde von ſelbſt erfüllt und die Gleichungen (b) reducirten ſich auf:

$$R\delta p = 0, \quad T\delta q = 0.$$

Wenn außerdem die Richtung der Berührungsebene der krummen Fläche längs der ganzen Durchſchnittslinie durch die Natur der Aufgabe beſtimmt würde; ſo

würden die Variationen δp, δq verſchwinden, und folglich die Gleichungen (b) von ſelbſt erfüllt.

Wenn die Durchſchnittslinie und die Richtung der Berührungsebene längs dieſer Linie nicht durch die Bedingungen der Aufgabe beſtimmt ſind; ſo muß man, um den Gleichungen (b) zu genügen, die Coefficienten von δz, δp, δq einzeln gleich Null ſetzen, d. h. man muß

$$P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} = 0, \quad Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx} = 0, \quad R = 0, \quad T = 0$$

ſetzen, und dieſe Gleichungen müſſen für alle Punkte der Durchſchnittslinie, deren Projection auf die Ebene der xy die Curve $m_0 n_0 m_1 n_1$ iſt, ſtattfinden.

§. 391. Um von dieſer Theorie ein Anwendungsbeiſpiel zu geben, wollen wir annehmen, es ſollte die Fläche beſtimmt werden, welche durch einen gegebenen Umfang gehen, und wovon der Flächeninhalt des von dieſem Umfange umſchloſſenen Theiles ein Minimum ſein muß. Dieſe Fläche würde nur dann eben ſein können, wenn die Umfangslinie, durch welche ſie gehen muß, in einer Ebene läge, und das doppelte Integral, welches zu einem Minimum gemacht werden muß, iſt:

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dxdy. \quad (§. 359.)$$

Da die Functionen R, S, T Null ſind, und die Variation δz wegen der Unveränderlichkeit der Umfangslinie an den Grenzen verſchwindet; ſo werden die Gleichungen (b) und (c) erfüllt, und man braucht nur die Ordinate z ſo als Function von x, y zu beſtimmen, daß die Gleichung (a) erfüllt wird, welche ſich in:

$$\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)}{dy} = 0,$$

oder, wenn man die Rechnungen entwickelt, in:

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0 \qquad (d)$$

verwandelt, welches die charakteriſtiſche Gleichung der krummen Flächen iſt, für deren ſämmtlichen Punkte die beiden Hauptkrümmungshalbmeſſer gleich und von entgegengeſetzter Richtung ſind. Die geſuchte Oberfläche muß außerdem durch die gegebene Linie gehen, welche die kleinſte Fläche umſchließt, durch welche Bedingungen man die in dem Integrale der Gleichung (d) vorkommenden willkürlichen Functionen beſtimmen müßte.

Die durch die Umdrehung der Kettenlinie:

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right)$$

um die Axe der x beſchriebene Fläche iſt unter den durch zwei gegebene parallele Kreiſe gehenden Rotationsflächen diejenige, welche den kleinſten Flächeninhalt hat (§. 384). Die beiden Hauptkrümmungshalbmeſſer dieſer Rotationsfläche ſind 1) der Krümmungshalbmeſſer der Meridiankettenlinie, und 2) der Theil der Normale, welcher zwiſchen der Meridiancurve und der Rotationsaxe liegt (§. 285), und in der That haben wir gefunden, daß dieſe beiden Linien einander gleich und von entgegengeſetzter Richtung ſind (§. 384).

§. 392. Wenn man nicht annimmt, daß die Grenzen des doppelten Integrales durch die geſchloſſene Linie auf der Ebene der xy feſt beſtimmt ſind,

ſo kann man die Variationen δx, δy nicht mehr gleich Null ſetzen, wenigſtens für die den Grenzen des Integrales entſprechenden Punkte (§. 374), und in dieſem Falle hat man:

$$\delta\iint V dx dy = \iint dy\, V\delta dx + \iint dx\, V\delta dy + \iint \delta V dx dy$$
$$= \iint dy\, V d\delta x + \iint dy\, V d\delta y + \iint \delta V dx dy$$
$$= \int V\delta x dy + \int V\delta y dx + \iint (\delta V - \frac{dV}{dx}\delta x - \frac{dV}{dy}\delta y) dx dy.$$

Jedes einfache Integral wird nach dem vorhin Geſagten als längs der Umfangslinie, welche das doppelte Integral begrenzt, genommen, betrachtet.

Durch eine ähnliche Rechnung, wie die im §. 373 erhält man, wenn man der Kürze wegen:

$$\delta z - p\delta x - q\delta y = \delta u$$

ſetzt, wenn die Buchſtaben Z, P, Q, R, S, T ihre frühere Bedeutung behalten, und wenn man der Einfachheit wegen die Glieder von einer höhern als von der zweiten Ordnung unberückſichtigt läßt:

$$\delta V - \frac{dV}{dx}\delta x - \frac{dV}{dy}\delta y = Z\delta u + P\frac{d\delta u}{dx} + Q\frac{d\delta u}{dy}$$
$$+ R\frac{d^2\delta u}{dx^2} + S\frac{d^2\delta u}{dxdy} + T\frac{d^2\delta u}{dy^2}$$

und:

$$\iint \left(\delta V - \frac{dV}{dx}\delta x - \frac{dV}{dy}\delta y\right) dx dy = S\delta u$$
$$+ \int \left[\left(P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy}\right)\delta u + R\frac{d\delta u}{dx}\right] dy$$
$$+ \int \left[\left(Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx}\right)\delta u + T\frac{d\delta u}{dy}\right] dx$$
$$+ \iint \left(Z - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2S}{dxdy} + \frac{d^2T}{dy^2}\right) dx dy \cdot \delta u.$$

Soll alſo die Variation des doppelten Integrales verſchwinden; ſo muß 1) die partielle Differenzialgleichung (a) zwiſchen den Veränderlichen x, y, z für alle zwiſchen den Grenzen dieſes Integrales liegende Werthe von x, y ſtattfinden, und 2) muß man für die Werthe von x, y, welche den auf der das doppelte Integral begrenzenden Umfangslinie liegenden Punkten entſprechen, die beiden Gleichungen:

$$V\delta x + \left(P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy}\right)\delta u + R\frac{d\delta u}{dx} = 0$$
$$V\delta y + \left(Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx}\right)\delta u + T\frac{d\delta u}{dy} = 0$$

oder:

$$V\delta x + \left(P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy}\right)(\delta z - p\delta x - q\delta y) + R(\delta p - r\delta x - s\delta y) = 0$$
$$V\delta y + \left(Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx}\right)(\delta z - p\delta x - q\delta y) + T(\delta q - s\delta x - t\delta y) = 0$$

haben. Dieſe Gleichungen entſprechen den Gleichungen (b) im §. 389 und laſſen ſich nach den Relationen, welche durch die Bedingungen der Aufgabe zwiſchen den Variationen δx, δy, δz, δp, δq, für die auf der Umfangslinie liegenden Punkte beſtimmt werden, auf verſchiedene Weiſen zerlegen. Wenn z. B. dieſe fünf Variationen von einander unabhängig und willkürlich ſind, ſo zerfallen die beiden Gleichungen in folgende fünf andern:

$$V = 0, \quad R = 0, \quad T = 0, \quad P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} = 0, \quad Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx} = 0.$$

3) Endlich muß die Gleichung $S\delta u = 0$ durch das Verſchwinden von S oder von δu an den äußerſten Punkten der Umfangslinie erfüllt werden, wie dieſes für den Fall früher angegeben iſt, wo dieſe Umfangslinie als unveränderlich betrachtet wurde.

Neuntes Kapitel.

Von den Bedingungen der Integrabilität der Differenzialfunctionen von mehreren unabhängigen veränderlichen Größen, und von ihrer Integration.

§. 393. Die Differenzialfunction:

$$\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy,$$

worin die Veränderliche y mit x als durch irgend eine Relation $v = \omega x$ verbunden betrachtet wird, iſt gleichbedeutend mit einer Differenzialfunction $fx\,dx$ von einer einzigen veränderlichen Größe, wo der Kürze wegen die Function:

$$\varphi(x,\omega x) + \psi(x,\omega x) \cdot \omega' x;$$

durch fx bezeichnet iſt; ſo daß man, wenn man $z = \int fx\,dx$, und folglich:

$$dz = \varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy \qquad (a)$$

ſetzt, die Beſtimmung der Function z immer auf die Quadraturen zurückführen kann, von welcher Beſchaffenheit die Functionen φ, ψ, ω auch ſein mögen.

Wenn dagegen die beiden Veränderlichen x und y als unabhängige betrachtet werden; ſo kann man im Allgemeinen weder eine Function z dieſer beiden Veränderlichen von ſolcher Beſchaffenheit beſtimmen, daß die Gleichung (a) erfüllt wird, noch im Raume eine Fläche conſtruiren, deren Ordinate z ein Totaldifferenzial hat, welches durch den zweiten Theil dieſer Gleichung ausgedrückt wird; denn zu dieſem Zwecke müßte man haben:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x,y), \quad \frac{dz}{dy} = \psi(x,y),$$

und folglich (§. 123):

$$\frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy} = \frac{d \cdot \psi(x,y)}{dx} \qquad (b)$$

Wenn die Functionen φ und ψ die Gleichung (b) verificiren, ſo ſagt man: die Gleichung (a) leiſtete der Bedingung der Integrabilität Genüge, und es gibt alsdann eine Fläche, deren Differenzialgleichung durch (a), und deren Gleichung zwiſchen x, y, z durch $z = f(x,y)$ ausgedrückt werden kann.

§. 394. In dieſem Falle läßt ſich die Beſtimmung der Function z auf die Quadraturen zurückführen; denn da

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x,y)$$

iſt; ſo muß die Function z folgende Form haben:

$$z = \int \varphi(x,y)dx + \theta y,$$

wo θy eine Function von der einen veränderlichen Größe y bezeichnet, welche bei der in Beziehung auf x angedeuteten Integration wie eine Conſtante behandelt werden muß. Hieraus ergibt, nach der im §. 366 für die Differenziation der Funtionen unter dem Zeichen $\int$ gegebenen Regel:

$$\frac{dz}{dy} = \psi(x,y) = \int \frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy} dx + \frac{d \cdot \theta y}{dy}$$

$$\theta y = \int \left[\psi(x,y) - \int \frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy} dx \right] dy$$

$$z = \int \varphi(x,y)dx + \int \left[\psi(x,y) - \int \frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy} dx \right] dy + \text{const.}$$

Soll die Function θy die Veränderliche x wirklich nicht enthalten; ſo muß

$$\frac{d \cdot \left[\psi(x,y) - \int \frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy} dx \right]}{dx} = 0$$

ſein; ſo daß man wieder auf die durch die Gleichung (b) ausgedrückte Bedingung der Integrabilität zurückkommt.

Wir wollen z. B. die Function:

$$dz = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

nehmen, welche der Bedingung der Integrabilität Genüge leiſtet (§. 123); ſo haben wir:

$$z = \int \frac{ydx}{x^2 + y^2} + \theta y = \text{arc. tang.} \frac{x}{y} + \theta y$$

$$\frac{d \cdot \theta y}{dy} = -\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{d \cdot \text{arc. tang.} \frac{x}{y}}{dy} = 0$$

und folglich iſt in dieſem ſehr einfachen Falle:

$$z = \text{arc. tang.} \frac{x}{y} + \text{const.}$$

§. 395. Wenn ſich ein Punkt auf einer Fläche $z = f(x,y)$ bewegt und jede Ordinate z dieſe Fläche nur in einem Punkte trifft; ſo kann der Unterſchied der Werthe von z im Anfange und am Ende der Bewegung nur von

den Coordinaten x,y beigelegten Anfangs- und Endwerthen und weder von der Form, noch von der Länge der Curve abhängen, welche der bewegliche Punkt auf der betrachteten Fläche zwischen den beiden Endpunkten beschrieben hat. Wenn man also zwischen den unabhängigen Veränderlichen x,y eine willkürliche Relation $y = \omega x$ aufstellt, vermöge welcher das Differenzial dz eine Function der einzigen Veränderlichen x wird; so muß der Werth des bestimmten Integrales:

$$z - z_0 = \int_{x_0}^{x} [\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy]$$

von der Form der Function ω unabhängig sein. Dieses Integral muß sich also erhalten lassen, ohne daß man den willkürlichen Zusammenhang zwischen y und x anzugeben braucht, und in der That haben wir eben gesehen, daß sich dieses Integral jedesmal erhalten läßt, wenn das Differenzial dz der Bedingung der Integrabilität genügt, oder mit andern Worten, wenn die Veränderliche z die Ordinate einer Fläche ausdrücken kann.

Wenn jedoch die beiden Functionen φ, ψ, oder eine derselben, innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich würden, oder plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern übergingen; so müßten die vorhergehenden Schlüsse modificirt werden. Denn es könnte alsdann mehrere Punkte der krummen Fläche geben, welche auf der Ebene der xy dieselbe Projection hätten, oder mehrere Werthe von z, welche demselben Werthsysteme von x,y entsprächen, so daß die Differenz $z - z_0$ nicht mehr allein von den Anfangs- und Endwerthen von x,y, sondern auch von den zwischenliegenden Werthen dieser Veränderlichen, oder von der Form der Curve, welche der bewegliche Punkt auf der krummen Fläche beschrieben hat, abhinge.

Wenn z. B. die krumme Fläche eine von der horizontalen Ebene der xy diametral durchschnittene Kugelfläche ist, und der von einem Punkte der untern Halbkugel, dessen horizontale Coordinaten x_0, y_0 sind, ausgehende bewegliche Punkt in einen Punkt gelangt, dessen horizontale Coordinaten x,y sind; so ändert sich die Differenz $z - z_0$, je nachdem dieser Endpunkt der untern oder obern Halbkugel angehört; aber in diesem letztern Falle sind die Werthe von φ, ψ zwischen den Integrationsgrenzen durch das Unendliche gegangen; denn die Gleichung dieser Kugelfläche ist von der Form:

$$z = + \sqrt{r^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2},$$

woraus sich die Werthe:

$$\varphi(x,y) = \mp \frac{x-\xi}{\sqrt{r^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}},$$

$$\psi(x,y) = \mp \frac{y-\eta}{\sqrt{r^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}$$

ergeben, welche unendlich werden, wenn

$$r^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 = 0$$

ist, oder wenn der bewegliche Punkt durch die Ebene der xy geht, um von der untern Halbkugel auf die obere überzutreten.

§. 396. Diese Betrachtungen erstrecken sich auf Functionen von einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen. Soll es z. B. eine Function u von drei unabhängigen veränderlichen Größen x, y, z geben, welche der Differenzialgleichung:

$$du = Xdx + Ydy + Zdz, \qquad (c)$$

wo X, Y, Z der Kürze wegen Functionen der drei Veränderlichen x, y, z bezeichnen, Genüge leiſten können; ſo muß:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}. \qquad (d)$$

ſein (§. 129).

Umgekehrt, wenn dieſe Bedingungsgleichungen erfüllt werden, ſo beſtimmt man die Function u durch eine Reihe von Quadraturen. So iſt z. B.

$$u = \int X dx + \theta(y,z),$$

woraus folgt, wenn man unter dem Zeichen $\int$ differenzirt:

$$\frac{du}{dy} = Y = \int \frac{dX}{dy} dx + \frac{d \cdot \theta(y,z)}{dy},$$

und folglich:

$$\theta(y,z) = \int \left(Y - \int \frac{dX}{dy} dx \right) dy + \chi z$$

Zur Beſtimmung der Function χz bemerke man, daß

$$\frac{du}{dz} = Z = \int \frac{dX}{dz} dx + \frac{d \cdot \theta(y,z)}{dz}$$

iſt; aber andererſeits iſt auch vermöge der vorhergehenden Gleichung:

$$\frac{d \cdot \theta(y,z)}{dz} = \int \left(\frac{dY}{dz} - \int \frac{d^2X}{dydz} dx \right) dy + \frac{d \cdot \chi z}{dz};$$

folglich:

$$\frac{d \cdot \chi z}{dz} = Z - \int \frac{dX}{dz} dx - \int \left(\frac{dY}{dz} - \int \frac{d^2X}{dydz} dx \right) dy;$$

$$\chi z = \int \left[Z - \int \frac{dX}{dz} dx - \int \left(\frac{dY}{dz} - \int \frac{d^2X}{dydz} dx \right) dy \right] dz$$

und endlich:

$$u = \int X dx + \int \left(Y - \int \frac{dX}{dy} dx \right) dy$$

$$+ \int \left[Z - \int \frac{dX}{dz} dx - \int \left(\frac{dY}{dz} - \int \frac{d^2X}{dydz} dx \right) dy \right] dz + \text{const.}$$

Soll die Function $\theta(y,z)$ die Veränderliche x nicht enthalten; ſo muß:

$$\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0$$

ſein, und wenn dieſe Bedingung erfüllt wird; ſo kommt x auch in χz nicht vor, wenn außerdem:

$$\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} = 0$$

iſt, und endlich kommt y in χz nicht vor, wenn:

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0$$

iſt. Man erhält alſo die drei Gleichungen (d) wieder.

§. 397. Wenn die Gleichung:

$$u = f(x,y,z), \qquad (e)$$

welche der Gleichung (c) Genüge leiſtet, für jeden Punkt des Raumes oder für jedes Werthsſyſtem der Coordinaten x, y, z einen beſtimmten und einzigen Werth hat, und man denkt ſich einen beweglichen materiellen Punkt, für welchen die Größe u jeden Augenblick den ſich aus der Gleichung (e) ergebenden Werth annimmt; ſo kann, wenn der bewegliche Punkt von dem Punkte (x_0, y_0, z_0) in den Punkt (x, y, z) übergeht, die Differenz:

$$u - u_0 = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

nur von den Anfangs- und Endwerthen der Coordinaten x, y, z, und weder von der Form, noch von der Länge der von dem materiellen Punkte zwiſchen den beiden Endpunkten beſchriebenen Curve abhängen. Wenn man alſo zwiſchen den Veränderlichen x, y, z willkürliche Relationen $y = \omega x$, $z = \chi x$ aufſtellt, vermöge welcher das Totaldifferenzial:

$$du = X dx + Y dy + Z dz$$

eine Function der einzigen Veränderlichen x wird; ſo muß der Werth des Integrales:

$$u - u_0 = \int_{x_0}^{x} (X dx + Y dy + Z dz)$$

von der Form der Functionen ω und χ unabhängig bleiben. Der Zahlenwerth dieſes Integrales muß ſich alſo berechnen laſſen, ohne daß man willkürliche Relationen zwiſchen z, y und x aufzuſtellen braucht. Durch die Rechnung im vorhergehenden § wird dieſes a priori beſtätigt, indem ſie zeigt, wie die Function u, wenn die Bedingungen der Integrabilität erfüllt ſind, durch eine Reihe von Quadraturen beſtimmt werden kann, ohne daß es nöthig iſt, irgend welche Relationen zwiſchen den unabhängigen Veränderlichen aufzuſtellen.

Die Quadraturformeln könnten jedoch illuſoriſch werden, bei der Beſtimmung der Größe $u - u_0$, wenn die Functionen X, Y, Z, oder blos eine derſelben, unendlich würden, oder plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern übergingen; denn in dieſem Falle könnten demſelben Werthsſyſteme der Veränderlichen x, y, z mehrere Werthe von u entſprechen, ſo daß die Differenz $u - u_0$ nicht mehr allein von den Anfangs- und Endwerthen von x, y, z, ſondern auch von den zwiſchenliegenden Werthen derſelben, oder von der von dem beweglichen Punkte im Raume beſchriebenen Curve abhinge.

§. 398. In der Mechanik ſtößt man oft auf Gleichungen von der Form:

$$du = X dx + Y dy + Z dz,$$

worin X, Y, Z Functionen der drei Coordinaten x, y, z ſind, welche die auf einen beweglichen Punkt parallel zu den Coordinatenaxen würkenden Kräfte ausdrücken, und es ſind alsdann wichtige Lehrſätze der Bedingung unterworfen, daß das Integral:

$$u - u_0 = \int_{x_0}^{x} (X dx + Y dy + Z dz)$$

einen von den Relationen $y = \omega x$, $z = \chi x$ unabhängigen Werth habe, oder nur von den äußerſten Lagen des beweglichen Punktes, und nicht von der zwiſchen beiden beſchriebenen Linie abhängig iſt. Soll nun aber dieſe beſchränkende Bedingung erfüllt werden, ſo iſt es nicht, wie man gewöhnlich anzugeben pflegt, hinreichend, daß die Functionen X, Y, Z den Gleichungen (d) genügen, ſo daß die Gleichung:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

die gemeinſchaftliche Differenzialgleichung einer Reihe von krummen Flächen iſt, welche man erhielte, wenn man die Conſtante c in der Gleichung:

$$u - u_0 = c,$$

oder:

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = c$$

variiren ließe; ſondern es iſt auch erforderlich, daß die Function u und ihre partiellen Ableitungen X, Y, Z innerhalb der Integrationsgrenzen nicht unendlich werden, und daß demſelben Werthsſyſteme der Coordinaten x, y, z nicht mehrere reelle Werthe von c entſprechen, ſo daß die eben erwähnten verſchiedenen Flächen gemeinſchaftliche Punkte haben könnten.

§. 399. Aus allen dieſen Erörterungen ſieht man, daß ſich die in den beiden vorhergehenden Kapiteln auseinandergeſetzte Theorie der Variation der Integrale unmittelbar an die Unterſuchung der Bedingungen der Integrabilität der Differenzialfunctionen mit mehreren unabhängigen veränderlichen Größen anſchließt. Es kommt in der That bei dieſer Unterſuchung darauf an, die Bedingungen zu finden, unter welchen die Veränderungen des Werthes oder die Variationen eines beſtimmten Integrales nur von den Anfangs- und Endwerthen der unter dem Integrationszeichen $\int$ vorkommenden Veränderlichen, und nicht von den willkürlichen Relationen abhängen, welche man innerhalb der Integrationsgrenzen zwiſchen dieſen Veränderlichen aufſtellen könnte. Hierauf laſſen ſich aber unmittelbar die Formeln für die Variation der Integrale, wobei man von dem Lagrangeſchen Algorithmus Gebrauch macht, anwenden.

Wir wollen nun annehmen, daß die Differenzialfunction, für welche man die Bedingungen der Integrabilität ſucht, außer den Veränderlichen x, y auch ihre Differenziale der verſchiedenen Ordnungen bis zur n^{ten} Ordnung incl. enthalte. Soll dieſe Function Bedeutung haben, ſo muß ſie ſich auf eine Function der einzigen Veränderlichen x reduciren, wenn man zwiſchen x und y eine Relation $y = \omega x$ aufſtellt, und folglich muß dieſe Function die Form:

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})dx^n$$

annehmen, wenn man x als eine unabhängige Veränderliche und y als eine Function von x behandelt. Das Integral dieſer Function, wenn es ein ſolches unabhängig von jeder Relation zwiſchen x und y geben kann, iſt von der Form:

$$F(x, y', y'', \ldots y^{(n-1)})dx^{n-1};$$

ſo daß man ſetzen kann:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}) = \int f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})dx,$$

und es kommt alsdann darauf an, zu wiſſen, ob das im zweiten Theile dieſer letzten Gleichung vorkommende Integral unabhängig bleiben kann von der willkürlichen Relation, welche man nothwendig zwiſchen y und x aufſtellen muß, um die Quadratur nach den gewöhnlichen Verfahrungsarten möglich zu machen.

Um die im vorletzten Kapitel angewandten Bezeichnungen beizubehalten, wollen wir

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = V$$

$$dV = Xdx + Ydy + Y^{(1)}dy' + Y^{(2)}dy'' + Y^{(3)}dy''' + \text{ꝛc.} \qquad (f)$$

ſetzen, ſo haben wir:

$$\delta \int V dx = V\delta x + (Y^{(2)} - \frac{dY^{(2)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(3)}}{dx^2} - \text{ꝛc.})(\delta y - y'\delta x)$$
$$+ (Y^{(1)} - \frac{dY^{(3)}}{dx} + \text{ꝛc.})(\delta y' - y''\delta x) + \text{ꝛc.}$$
$$+ \int \left[Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Y^{(3)}}{dx^3} + \text{ꝛc.} \right] (\delta y - y'\delta x)\, dx.$$

Dieſe Gleichung ergibt ſich aus der Gleichung (A) im §. 373, wenn man die ſich auf die untere Integrationsgrenze beziehenden Glieder hinwegläßt, weil die Werthe von $x, y, y', \ldots$ an dieſer Grenze als conſtant angeſehen werden, und wenn man den Index (1) nicht ſetzt, um dadurch anzudeuten, daß wir die Werthe von $x, y, y', \ldots$, welche ſich auf die obere Grenze beziehen, als veränderlich betrachten.

Wenn man nun vermöge der Form der Function f oder V identiſch

$$Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Y^{(3)}}{dx^3} + \text{ꝛc.} = 0 \qquad (g)$$

hat; ſo iſt klar, daß die Variation des Integrales nur noch von den Variationen der Größen $x, y, y', \ldots$, welche ſich auf die obere Grenze beziehen, abhängig iſt, ſo daß ſie unabhängig bleibt von der innerhalb der Integrationsgrenzen zwiſchen y und x aufgeſtellten willkürlichen Relation.

Die Identität (g) drückt alſo die Bedingung der Integrabilität der Function f, d. h. die Bedingung aus, unter welcher dieſe Function ein Integral F von einer unmittelbar niedrigeren Ordnung hat. Selbſt wenn die Function F nicht durch die bekannten analytiſchen Elementarfunctionen ausgedrückt werden könnte, ſo könnte man doch immer ihren Zahlenwerth für jedes Syſtem der Anfangs- und Endwerthe der Größen $x, y, y', \ldots$ angeben, indem man den Zahlenwerth des Integrales:

$$\int_{x_0}^{x} f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})dx$$

mit einer beliebigen Annäherung berechnete (§. 320), nachdem man, um dieſe Berechnung möglich zu machen, zwiſchen y und x eine willkürliche Relation aufgeſtellt hat, deren Form auf den Werth des Integrales keinen Einfluß hat, weil die Gleichung (g) nach der Vorausſetzung identiſch iſt.

§. 400. Ueberdies iſt vermöge derſelben Gleichung (g):

$$\delta F = \delta \int V dx$$
$$= \Xi\delta x + Y dy + Y^{(1)}dy' + Y^{(2)}\delta y'' + \ldots + Y^{(n-1)}\delta y^{(n-1)},$$

$\Xi, Y, Y^{(1)}, \ldots Y^{(n-1)}$ bekannte Functionen von $x, y, y', y'', \ldots$ bezeichnen (§. 375). Nun iſt es aber erlaubt, das Zeichen d für δ zu ſetzen, ſo daß ſich die vorhergehende Gleichung in:

$$dF = \Xi dx + Y dy + Y^{(1)}dy' + Y^{(2)}\delta y'' + \ldots + Y^{(n-1)}dy^{(n-1)} \qquad (h)$$

verwandelt. Man hat alſo zur Beſtimmung von F als Function der als unabhängig betrachtet veränderlichen Größen $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ eine Gleichung von derſelben Form, wie die im Anfange dieſes Kapitels betrachteten, und da daſſelbe Integrationsverfahren darauf anwendbar iſt; ſo folgt, daß die Beſtimmung der Function F immer auf eine Reihe von Quadraturen hinausläuft.

Dieſes ſetzt zwar voraus: 1) daß die Functionen $\Xi, Y, Y^{(1)}$, ꝛc. keine höheren Ableitungen von y enthalten, als $y^{(n-1)}$ und 2) daß die Gleichung (h) außerdem den durch die Gleichungen:

$$\frac{d\Xi}{dy}=\frac{dY}{dx},\quad \frac{d\Xi}{dy'}=\frac{dY^{(1)}}{dx},\ \text{ꝛc.}$$

ausgedrückten Bedingungen der Integrabilität Genüge leiſtet. Aber wenn alle dieſe Bedingungen nicht erfüllt würden, ſo würde es ein Widerſpruch ſein, wenn man annehmen wollte, daß F nur eine Function der als unabhängig veränderlich betrachteten Größen $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ wäre, was nach dem Vorhergehenden dennoch eine Folgerung aus der Identität (g) iſt. Da alſo die Exiſtenz der Function F in dem Falle des Stattfindens der Identität (g) durch Schlüſſe dargethan iſt, welche von der Form der Gleichung (h) unabhängig ſind; ſo können wir ſicher ſein, daß dieſe Gleichung den Bedingungen der Integrabilität genügt, und wir dürfen daher behaupten, daß die Function F immer durch eine Reihe von Quadraturen unter endlicher Form ausgedrückt werden kann.

Lagrange hat ſich damit begnügt, darzuthun, daß die Function F immer durch eine Reihenentwickelung erhalten werden kann, was man damals als genügend betrachtete, was aber gegenwärtig den Geometern nicht mehr genügt, weil die erhaltene Reihe, wie die Taylor'ſche, nicht convergent ſein und folglich unbrauchbar werden kann. Die älteren Beweiſe haben dieſem großen Geometer unklar und zu complicirt geſchienen. *) Die vorhergehende Betrachtung ſetzt blos voraus, daß die Functionen $\Xi, Y, Y^{(1)}$, ꝛc. keine Stetigkeitsunterbrechung der erſten Ordnung erfahren.

§. 401. Wir wollen z. B. die Function:

$$V=f(x,y,y',y'')=xy''+yy'+x$$

nehmen, ſo iſt:

$$Y=\frac{dV}{dy}=y',\quad Y^{(1)}=\frac{dV}{dy'}=y,\quad Y^{(2)}=\frac{dV}{dy''}=x$$

$$\frac{dY^{(1)}}{dx}=y',\quad \frac{dY^{(2)}}{dx}=1,\quad \frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2}=0;$$

folglich wird die Gleichung (g) erfüllt, und es iſt:

$$\delta F=(xy''+yy'+x)\,\delta x+(y-1)\,(\delta y-y'\delta x)+x(\delta y'-y''\delta x)$$

oder:

$$\delta F=(x+y')\,\delta x+(y-1)\,\delta y+x\delta y',$$

oder endlich:

$$dF=(x+y')\,dx+(y-1)\,dy+xdy'.$$

Es ergibt ſich leicht, daß der zweite Theil dieſer Gleichung, als eine Differenzialfunction der drei unabhängigen Veränderlichen x, y, y' betrachtet, den im §. 396 angegebenen drei Bedingungen der Integrabilität genügt, und hieraus ergibt ſich vermöge der Formeln dieſes §:

$$F(x,y,y')=x^2+y^2-2y+2y'x+\text{const.}$$

Man kann das Vorhergehende verallgemeinern, indem man die Bedingungen der Integrabilität einer Function ſucht, welche mehrere unabhängige Veränderliche mit ihren Differenzialen der verſchiedenen Ordnungen enthält, oder indem man die Bedingungen ſucht, welche erfüllt werden müſſen, damit eine Differenzialfunction der n^{ten} Ordnung nicht blos ein Integral der unmit-

*) Leçons sur le calcul des fonctions, 21e leçon.

telbar niedrigeren $n-1^{ten}$, ſondern auch ein Integral der $n-2^{ten}$, $n-3^{ten}$, ꝛc. Ordnung habe. Allein die Anwendungen ſolcher Unterſuchungen kommen zu ſelten vor, als daß wir uns hier dabei aufhalten könnten.

Zehntes Kapitel.

Von den zwiſchen ſpeciellen Grenzen genommenen beſtimmten Integralen. — Verſchiedene Beiſpiele der Beſtimmung beſtimmter Integrale.

§. 402. Wenn ſich das unbeſtimmte Integral $\int fxdx$ nicht algebraiſch, oder durch transcendente Functionen, für welche man Tafeln hat, ausdrücken läßt; ſo kann das beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} fxdx \qquad (1)$$

im Allgemeinen nur durch Reihen oder durch das arithmetiſche Summationsverfahren, wovon bereits mehrere Male die Rede geweſen iſt (§. 320) näherungsweiſe berechnet werden; aber ſelbſt in dieſem Falle geſchieht es oft, daß der Werth des Integrales (1) für gewiſſe ſpecielle Werthe der Grenzen, welche, wie die Grenzen:

$$0, \quad \pm\infty, \quad \pm 1, \quad \pm\pi, \quad \text{ꝛc.}$$

der Form der Function f beſonders entſprechen, genau und direct erhalten werden kann, ohne daß man das unbeſtimmte Integral zu kennen braucht. Auch geſchieht es, daß das zwiſchen dieſen ſpeciellen Grenzen genommene Integral, ſelbſt wenn ſich die unbeſtimmte Integration verrichten läßt, einen weit einfachern Ausdruck annimmt, oder merkwürdige Eigenſchaften beſitzt, welche dieſem Integrale nicht mehr zukommen, wenn es zwiſchen beliebigen Grenzen genommen wird. Man könnte die Integrale, deren unterſcheidende Merkmale wir eben kurz angegeben haben, *ſpecielle beſtimmte Integrale* nennen, und die Theorie derſelben, ſo wie ihre Beſtimmung, iſt gegenwärtig ein ſehr wichtiger Zweig der Analyſis.

Zur Erläuterung des eben Geſagten wollen wir annehmen, es ſollte der Werth des beſtimmten Integrales:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^2 x dx$$

gefunden werden; ſo bemerkt man leicht, daß dieſer Werth offenbar derſelbe iſt, als der des Integrales:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^2 x dx,$$

weil $\sin. x$ und $\cos. x$ zwiſchen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ dieſelbe Reihe von Werthen durchlaufen. Es iſt alſo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin.^2 x + \cos.^2 x) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Daſſelbe Reſultat könnte man zwar ohne die eben angewandte Betrachtung erhalten, wenn man die unbeſtimmte Integration, welche in dieſem Falle möglich iſt, und

$$\int \sin.^2 x dx = \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{4} \sin. 2x + \text{const.}$$

gibt, verrichtet; allein es war unſer Zweck auch nur, zu zeigen, wie das gehörige Verhältniß zwiſchen den Grenzen des Integrales und der Form der Differenzialfunction zur Beſtimmung gewiſſer beſtimmter Integrale führen kann, ohne daß man die unbeſtimmten Integrale zu kennen braucht.

§. 403. Es ſei ferner der Werth des Integrales:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

zu beſtimmen; ſo wollen wir daſſelbe durch ein anderes Integral von derſelben Form, worin blos y ſtatt x geſetzt iſt, multipliciren, und alsdann iſt das Product der beiden einfachen Integrale gleichbedeutend mit dem doppelten Integrale:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy dx. \qquad (2)$$

Denn wenn die Grenzen des erſten der beiden einfachen Integrale:

$$\int fx dx, \quad \int fy dy$$

nicht von y, und die des zweiten nicht von x abhängig ſind, ſo iſt das Product dieſer beiden Integrale der Summe gleich, welche man erhält, wenn man jedes Element des erſten mit jedem Elemente des zweiten multiplicirt, d. h. gleich dem doppelten Integrale:

$$\iint fx \cdot fy \cdot dy dx,$$

für welches die Grenzen in Beziehung auf jede Veränderliche dieſelben ſind, als die der einfachen Integrale.

Wir wollen nun $y = xt$ ſetzen, wo t eine neue Veränderliche bezeichnet, ſo iſt $dy = x dt$ (§. 357), die Grenzen in Beziehung auf t ſind wieder $0, \infty$ und das Integral (2) verwandelt ſich in:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2(1+t^2)} x dx \cdot dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\pi.$$

Es iſt alſo:

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy\right) = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \frac{1}{4}\pi,$$

und folglich:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \qquad (a)$$

ein höchſt wichtiges und oft anwendbares Reſultat. Der Rechnungskunſtgriff, durch welchen wir den Werth des Integrales (a) erhalten haben, iſt nur bei den Grenzen 0 und ∞ anwendbar; denn zwiſchen andern Grenzen läßt ſich das Integral $\int e^{x^2} dx$ auf keine der gewöhnlichen transcendenten Functionen zurückführen, ſondern bildet eine transcendente Größe, für welche man eine eigene Tafel berechnen muß, und wofür wir bereits mehrere Reihenausdrücke mitgetheilt haben (§. 317).

Aus der Gleichung (a) folgt unmittelbar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

und wenn man $x\sqrt{\theta}$ ſtatt x ſetzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\theta}}.$$

Wenn man die beiden Theile der letzten Gleichung nach der Regel im §. 366 i mal hinter einander in Beziehung auf θ differenzirt, und dann $\theta = 1$ ſetzt; ſo kommt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2i}dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2^i} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Außerdem hat man für alle ganzen und poſitiven Werthe von i:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2i+1}dx = 0,$$

weil das Integral aus Elementen beſteht, welche ſich paarweiſe gegenſeitig aufheben.

Der Rechnungskunſtgriff beſteht darin, aus dem bekannten Werthe eines beſtimmten Integrales den eines andern, zwiſchen denſelben Grenzen genommenen, beſtimmten Integrales dadurch abzuleiten, daß man das erſtere unter dem Integralzeichen $\int$ differenzirt oder integrirt, und zwar in Beziehung auf einen gewiſſen Parameter (§. 366). Wenn man z. B. die beiden Theile der Gleichung:

$$\int_0^1 x^{m-1}dx = \frac{1}{m},$$

zwiſchen den Grenzen μ, ν in Beziehung auf m integrirt; ſo erhält man:

$$\int_0^1 \frac{x^{\mu-1} - x^{\nu-1}}{\log. x} \cdot dx = \log.\left(\frac{\mu}{\nu}\right).$$

Und wenn man i mal hinter einander in Beziehung auf m differenzirt; ſo ergibt ſich aus der Gleichung:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+m} = \frac{\pi}{2\sqrt{m}},$$

folgende:

$$\int_0^{\infty} \frac{1.2.3\ldots i}{(x^2+m)^{i+1}} \cdot dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)\pi}{2^i \cdot m^i \sqrt{m}};$$

folglich iſt:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+m)^{i+1}} = \frac{1}{m^i\sqrt{m}} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots 2i} \cdot \frac{\pi}{2}. \qquad (b)$$

§. 404. Die Geometer haben die Werthe einer großen Anzahl beſtimmter Integrale nach ſehr verſchiedenen Methoden berechnet, und wir wollen als Beiſpiele die am leichteſten abzuleitenden und in den Anwendungen am häufigſten vorkommenden hier mittheilen, und mit den Fällen beginnen, wo ſich der Werth des beſtimmten Integrales unmittelbar aus dem für das unbeſtimmte Integral gefundenen Ausdrucke ergibt.

Aus der Formel (μ) im §. 309 ergibt ſich:

$$\int \sin.^{\mu} x\,dx = -\frac{\sin.^{\mu-1} x \cos. x}{\mu} + \frac{\mu-1}{\mu}\int \sin.^{\mu-2} x\,dx,$$

und aus der Formel (ν):

$$\int \cos.^{\nu} x\,dx = \frac{\sin. x \cos.^{\nu-1} x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\int \cos.^{\nu-2} x\,dx,$$

woraus folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{\mu} x\,dx = \frac{\mu-1}{\mu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{\mu-2} x\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^{\nu} x\,dx = \frac{\nu-1}{\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^{\nu-2} x\,dx.$$

Da dieſelben Reductionsformeln auch auf die in den zweiten Theilen dieſer letzten Gleichungen vorkommenden Integrale anwendbar ſind; ſo hat man, wenn man durch $2i$ irgend eine gerade Zahl bezeichnet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^{2i} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots 2i} \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad (b)$$

und wenn man mit $2i+1$ eine beliebige ungerade Zahl bezeichnet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^{2i+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots 2i}{3.5.7\ldots(2i+1)}. \qquad (c)$$

Nun iſt aber zu bemerken, daß man die Zahl i immer ſo groß nehmen kann, daß die Werthe der Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i+1} x\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i} x\,dx \qquad (3)$$

beliebig wenig von denen der Integrale:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i+1} x\,dx, \quad \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i} x\,dx, \qquad (4)$$

wo ε eine poſitive Zahl bezeichnet, welche beliebig klein werden kann, verſchieden ſind. Denn es iſt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin.^{k} x\,dx < \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin.^{k}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right),$$

und der zweite Theil dieſer Ungleichheit kann für einen ſchicklichen Werth des Exponenten k, wie klein ε auch ſein mag, kleiner werden, als jede gegebene Größe.

Nun kann man die Größe ε immer ſo klein annehmen, daß jedes der Integrale (4) beliebig wenig von dem Integrale:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} dx = \varepsilon$$

verſchieden iſt, und ihr Verhältniß folglich ebenfalls beliebig wenig von der Einheit verſchieden iſt. Für hinreichend große Werthe von i iſt alſo das Verhältniß der Integrale (3) beliebig wenig von der Einheit verſchieden.

Hieraus folgt, daß ſich das Verhältniß der beiden Brüche in den zweiten Theilen der Gleichungen (b) und (c) für ohne Ende wachſende Werthe von i der Einheit unbeſtimmt nähert. Es iſt alſo:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8...}{1.3.3.5.5.7.7.9...}$$

Dieſer Ausdruck der Zahl π als ein Product ohne Ende fortlaufender Factoren rührt von Wallis her, und kann auf verſchiedene Arten gefunden werden.

§. 405. Es ſei nun der Werth des Integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{fx}{Fx} dx$$

zu beſtimmen, wo fx eine rationale algebraiſche Function bezeichnet und Fx eine andere rationale algebraiſche Function, deren Grad wenigſtens um zwei Einheiten höher iſt, als der von fx, und welche ſo beſchaffen iſt, daß die Gleichung $Fx = 0$ nur imaginäre Wurzeln hat, damit die Function unter dem Integralzeichen innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch das Unendliche geht. Wenn man durch $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ ein Paar zuſammengehöriger imaginärer Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ bezeichnet, ſo iſt das geſuchte Integral die Summe der Partialintegrale von der Form:

$$2P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + 2Q\beta\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

wo die Conſtanten P und Q durch die Gleichung:

$$P - Q\sqrt{-1} = \frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})}, \qquad (5)$$

in welche man ſehr leicht die Gleichung (3) im §. 296 transformiren kann, gegeben werden.

Ferner ergibt ſich leicht:

$$2Q\beta\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = 2\pi Q;$$

und was das Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{tdt}{t^2+\beta^2},$$

anlangt; ſo kann es nur als die Grenze eines andern Integrales:

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{tdt}{t^2+\beta^2},$$

worin μ, ν beliebige Zahlen und ε einen ohne Ende gegen Null convergirenden Factor bezeichnet, betrachtet werden. Nun ist aber:

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{t\,dt}{t^2+\beta^2} = \frac{1}{2}\log.\left[\frac{(\beta^2\sqrt{\varepsilon\nu}+1)\sqrt{\mu}}{(\beta^2\sqrt{\varepsilon\mu}+1)\sqrt{\nu}}\right],$$

woraus folgt, wenn man $\varepsilon = 0$ setzt, um zu der Grenze überzugehen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\,dt}{t^2+\beta^2} = \log.\left(\frac{\mu}{\nu}\right),$$

ein Ausdruck, welcher wegen der unbestimmten Zahlen μ, ν selbst unbestimmt ist.

Bezeichnen wir nun durch $\alpha_1 \pm \beta_1\sqrt{-1}$, $\alpha_2 \pm \beta_2\sqrt{-1}$, &c. die übrigen imaginären Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ und die entsprechenden Werthe von P, Q mit P_1, Q_1, P_2, Q_2, &c.; so kommt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{fx}{Fx}\,dx = \lim. \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{fx}{Fx}\,dx = 2\pi(Q + Q_1 + Q_2 + \text{&c.})$$

$$+ \frac{1}{4}(P + P_1 + P_2 + \text{&c.})\log.\left(\frac{\mu}{\nu}\right).$$

Andererseits hat man die identische Gleichung:

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{2P(x-\alpha)+2Q\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{2P_1(x-\alpha_1)+2Q\beta_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \text{&c.}$$

woraus sich leicht ergibt, daß, wenn die Bedingungsgleichung:

$$P + P_1 + P_2 + \text{&c.} = 0$$

nicht erfüllt würde, der höchste Exponent von x in fx gegen die Voraussetzung nur um eine Einheit niedriger wäre, als der höchste Exponent von x in Fx. Man hat also in der gemachten Voraussetzung blos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{fx}{Fx}\,dx = 2\pi(Q + Q_1 + Q_2 + \text{&c.}),$$

aus welchem Werthe jedes Symbol der Unbestimmtheit verschwunden ist.

Wenn die Functionen fx, Fx nur gerade Potenzen von x enthalten; so hat man auch:

$$\int_0^{\infty} \frac{fx}{Fx}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{fx}{Fx}\,dx = \pi(Q + Q_1 + Q_2 + \text{&c.}).$$

§. 406. Wir wollen nun diese Analyse auf das Integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}$$

anwenden, worin wir $m < n$ annehmen und überdies m und n ganze positive Zahlen bezeichnen. Die Gleichung (5) wird in diesem Falle:

$$P - Q\sqrt{-1} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{2n-2m-1}}; \qquad (6)$$

in welche man für $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ successive die verschiedenen Werthe substituiren muß, welche sich aus der Formel:

$$\cos.\frac{(2i+1)\pi}{2n}+\sqrt{-1}\cdot\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2n},$$

ergeben, wenn man für i ſucceſſive die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... n − 1 ſetzt (§. 79).

Nun iſt aber nach der Moivre'ſchen Formel (§. 77):

$$\left[\cos.\frac{(2i+1)\pi}{2n}+\sqrt{-1}\cdot\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right]^{2m-2m-1}$$

$$=\cos.\left[(2i+1)\pi-\frac{(2m+1)(2i+1)\pi}{2n}\right]$$

$$+\sqrt{-1}\cdot\sin.\left[(2i+1)\pi-\frac{(2m+1)(2i+1)\pi}{2n}\right]$$

$$=-\cos.\frac{(2m+1)(2i+1)\pi}{2n}+\sqrt{-1}\cdot\sin.\frac{(2m+1)(2i+1)\pi}{2n},$$

und wenn wir der Kürze wegen:

$$\frac{2m+1}{2n}=k \qquad (2)$$

ſetzen; ſo gibt die Gleichung (b):

$$2n(P_i-Q_i\sqrt{-1})=\frac{1}{-\cos.(2i+1)k\pi+\sqrt{-1}\cdot\sin.(2i+1)k\pi}$$

und folglich iſt:

$$Q_i=\frac{1}{2n}\sin.(2i+1)k\pi,$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{2n}[\sin.k\pi+\sin.3k\pi+\ldots+\sin.(2n-1)k\pi]. \qquad (8)$$

Dieſer Ausdruck läßt ſich vereinfachen; denn es ſei:

$$S=\sin.u+\sin.(u+v)+\sin.(u+2v)+\ldots+\sin.[u+(n-1)v];$$

wir wollen beide Theile der Gleichung mit $2\cos.v$ multipliciren und nach verrichteter Multiplication jedes Glied des zweiten Theiles nach der Formel:

$$2\sin.(u+rv)\cos.v=\sin.[u+(r+1)v]+\sin.[u+(r-1)v],$$

welche ſich ſelbſt aus der bekannten Relation:

$$2\sin.p\cos.q=\sin.(p+q)+\sin.(p-q)$$

ergibt, transformiren; ſo erhalten wir:

$$2S\cos.v=\sin.(u-v)-\sin.u+2S-\sin.[u+(n-1)v]+\sin.(u+nv),$$

woraus folgt:

$$S=\frac{-\sin.(u-v)+\sin.u+\sin.[u+(n-1)v]-\sin.(u+nv)}{2(1-\cos.v)}.$$

In dieſer letzten Gleichung wollen wir $u=k\pi$, $v=2k\pi$ ſetzen, ſo bezeichnet S das Polynom, womit $\frac{\pi}{2n}$ in der Gleichung (8) multiplicirt iſt, und man erhält:

$$S = \frac{2\sin.k\pi + \sin.(2n-1)k\pi - \sin.(2n+1)k\pi}{2(1-\cos.2k\pi)}.$$

Aber es iſt:

$$\sin.(2n \pm 1)k\pi = \sin.(2nk\pi \pm k\pi) = \sin.[(2m+1)\pi \pm k\pi]$$
$$= \mp \sin.k\pi$$
$$1 - \cos.2k\pi = 2\sin.^2 k\pi;$$

und folglich:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\sin.k\pi} = \frac{\pi}{2n\sin.\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

Dieſe merkwürdige Formel rührt von Euler her, und wenn man $y = x^{2n}$ ſetzt; ſo ergibt ſich daraus:

$$\int_0^\infty \frac{y^{k-1}dy}{1+y} = \frac{\pi}{\sin.k\pi}. \qquad (d)$$

Dieſe letzte Gleichung findet für beliebige zwiſchen 0 und 1 liegende Werthe von k ſtatt; denn von welcher Beſchaffenheit dieſe Werthe auch ſein mögen, ſo kann man doch immer ganze Zahlen m, n finden, welche der Gleichung (7) mit jedem beliebigen Grade von Annäherung genügen, indem zugleich $m < n$ iſt.

Durch eine ähnliche Rechnung würde man finden:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}} = \frac{\pi}{2n}[\sin.2k\pi + \sin.4k\pi + \ldots + \sin.2(n-1)k\pi]$$
$$= \frac{\pi}{2n\,\text{tang.}\frac{(2m+1)\pi}{2n}}$$
$$\int_0^\infty \frac{y^{k-1}dy}{1-y} = \frac{\pi}{\text{tang.}\,k\pi}. \qquad (e)$$

§. 407. Die Formeln (b) im §. 314 geben:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ax}\sin.bxdx &= \frac{b}{a^2+b^2}\\ \int_0^\infty e^{-ax}\cos.bxdx &= \frac{a}{a^2+b^2}\end{aligned}\right\}. \qquad (f)$$

Multipliciren wir dieſe beiden Gleichungen mit da und integriren zwiſchen den Grenzen c, a; ſo erhalten wir:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cdot\sin.bxdx = \text{arc. tang.}\frac{a}{b} - \text{arc. tang.}\frac{c}{b},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cdot\cos.bxdx = \frac{1}{2}\log.\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\right).$$

Wenn man in den vorhergehenden Gleichungen $c = 0$, $a = \infty$ ſetzt; ſo geben ſie:

$$\int_0^\infty \frac{\sin. bx}{x} dx = \pm \frac{\pi}{2}, \qquad (\varepsilon)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos. bx}{x} dx = \infty.$$

Den zweiten Theil der Gleichung (ε) muß man mit dem Zeichen + oder mit dem Zeichen — nehmen, je nachdem die Constante b positiv, oder negativ ist. Uebrigens hat der Zahlenwerth dieser Constante auf den Werth des bestimmten Integrales keinen Einfluß; denn wenn man $bx = t$ setzt; so sind die Grenzen von t noch 0, ∞, und man hat:

$$\int_0^\infty \frac{\sin. bx}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin. t}{t} dt.$$

§. 408. Nach dem Cotesi'schen Lehrsatze (§. 79) hat man:

$$(1 - 2a\cos. \frac{\pi}{2n} + a^2)(1 - 2a\cos. \frac{3\pi}{2n} + a^2)\ldots(1 - 2a\cos. \frac{(2n-1)\pi}{n} + a^2) = a^{2n} + 1.$$

Erhebt man beide Theile dieser Gleichung zu der Potenz $\frac{\pi}{n}$ und nimmt die Logarithmen; so erhält man:

$$\sum_0^{n-1} \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \log. (1 - 2a\cos. \frac{2i+1}{2n} + a^2) = \log. \cdot (a^{2n} + 1)^{\frac{\pi}{n}}, \qquad (9)$$

wo $\sum_0^{n-1} U_i$ die Summe der Werthe einer Function U_i für alle ganzen Werthe von i von 0 bis $n-1$ incl. andeutet.

Setzen wir nun:

$$\frac{2i+1}{2n} \cdot \pi = x;$$

so verwandelt sich der erste Theil der Gleichung (9) in:

$$\sum \cdot \frac{\pi}{n} \log. (1 - 2a\cos. x + a^2), \qquad (10)$$

und das Zeichen $\sum$ deutet eine in Beziehung auf die Veränderliche x, welche nach constanten Differenzen $= \frac{\pi}{n}$ von $x = \frac{\pi}{2n}$ bis $x = \frac{2n-1}{2n}\pi$ incl. wächst, genommene Summe an.

Wenn man die Zahl n ohne Ende wachsen läßt, so nimmt die Differenz $\Delta x = \frac{\pi}{n}$ immer mehr und mehr ab, und an der Grenze geht die Summe (10) über in das bestimmte Integral:

$$\int_0^\pi \log. (1 - 2a\cos. x + a^2) dx.$$

Andererseits nähert sich die Größe:

$$(a^{2n} + 1)^{\frac{\pi}{n}}$$

für ohne Ende wachſende Werthe von n der Grenze 1 oder der Grenze $a^{2\pi}$ ohne Ende, je nachdem die Conſtante a kleiner oder größer iſt als 1. Man hat alſo für $a \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 1$:

$$\int_0^{\pi} \log.(1 - 2a\cos.x + a^2)\,dx = \begin{cases} 0 \\ \pi \log.(a^2). \end{cases}$$

Der Werth dieſes beſtimmten Integrales iſt zuerſt von Poiſſon angegeben; aber der ſich durch ſeine Kürze empfehlende vorhergehende Beweis rührt von Delaunay her.

§. 409. Die Combination imaginärer Symbole wird bei der Entwickelung beſtimmter Integrale häufig angewandt. Wenn man in der Formel (a) die Größe x in ax verwandelt; ſo erhält man:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

und wenn man alsdann:

$$a = \frac{(1+\sqrt{-1})\alpha}{\sqrt{2}}$$

ſetzt; ſo ergibt ſich:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2\sqrt{-1}}\,dx = \left(\frac{1-\sqrt{-1}}{2\alpha}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

oder vielmehr, wenn man für die imaginäre Exponenzialgröße ihren durch Sinus und Coſinus ausgedrückten Werth ſetzt:

$$\int_0^{\infty} (\cos.\alpha^2x^2 - \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha^2x^2)\,dx = \left(\frac{1-\sqrt{-1}}{2\alpha}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

welche Gleichung in die beiden folgenden zerfällt:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin.\alpha^2x^2\cdot dx &= \frac{1}{2\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \int_0^{\infty} \cos.\alpha^2x^2\cdot dx &= \frac{1}{2\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (h)$$

Dieſe letzteren geben, wenn man x für α^2x^2 ſetzt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin.x\,dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} \frac{\cos.x\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Die Gleichungen (h) geben ferner:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin.x^2\cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos.x^2\cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (h')$$

Wenn wir in der erſten x in $x - \xi$ verwandeln; ſo bleiben die Integrationsgrenzen dieſelben, und es ergibt ſich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sin.}\,(x^2 - 2\xi x + \xi^2)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sin.}\,(x^2 + \xi^2)\,\text{cos.}\,2\xi x\,dx$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \text{cos.}\,(x^2 + \xi^2)\,\text{sin.}\,2\xi x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Aber da $\text{cos.}\,(x^2 + \xi^2)\,\text{sin.}\,2\xi x$ eine impaare Function von x iſt; ſo hat man offenbar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{cos.}\,(x^2 + \xi^2)\,\text{sin.}\,2\xi x\,dx = 0,$$

und folglich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sin.}\,(x^2 + \xi^2)\,\text{cos.}\,2\xi x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

oder:

$$\text{cos.}\,\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sin.}\,x^2\,\text{cos.}\,2\xi x dx + \text{sin.}\,\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{cos.}\,x^2\,\text{cos.}\,2\xi x dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Wenn man die zweite der Gleichungen (h') auf dieſelbe Weiſe behandelt, ſo erhält man:

$$\text{cos.}\,\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{cos.}\,x^2\,\text{cos.}\,2\xi x dx - \text{sin.}\,\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sin.}\,x^2\,\text{cos.}\,2\xi x dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

und hieraus ergibt ſich:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{cos.}\,x^2\,\text{cos.}\,2\xi x\,dx &= (\text{cos.}\,\xi^2 + \text{sin.}\,\xi^2)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{sin.}\,x^2\,\text{cos.}\,2\xi x\,dx &= (\text{cos.}\,\xi^2 - \text{sin.}\,\xi^2)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(i)}$$

Wenn man bemerkt, daß:

$$\text{sin.}\,\frac{\pi}{4} = \text{cos.}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

iſt; ſo kann man dieſe Gleichungen auf folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{cos.}\,x^2\,\text{cos.}\,2\xi x\,dx &= \sqrt{\pi} \cdot \text{sin.}\left(\frac{\pi}{4} + \xi^2\right) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{sin.}\,x^2\,\text{cos.}\,2\xi x\,dx &= \sqrt{\pi} \cdot \text{sin.}\left(\frac{\pi}{4} - \xi^2\right) \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(j)}$$

§. 410. Es ſei:

$$\omega = \int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\,\text{cos.}\,bx dx, \quad \frac{d\omega}{db} = -\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\,\text{sin.}\,bx \cdot x dx;$$

ſo gibt die theilweiſe Integration:

$$\int e^{-a^2x^2}\,\text{sin.}\,bx \cdot x dx = -\frac{e^{-a^2x^2}}{2a^2}\,\text{sin.}\,bx + \frac{b}{2a^2}\int e^{-a^2x^2}\,\text{cos.}\,bx dx,$$

woraus folgt:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \sin. bx \cdot x dx = \frac{b}{2a^2} \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos. bx dx,$$

und mithin ist:

$$\frac{d\omega}{db} = -\frac{b}{2a^2}\omega, \quad \text{oder} \quad \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{2a^2} \cdot bdb.$$

Wenn man also den $b = 0$ entsprechenden Werth von ω mit ω_0 bezeichnet, so hat man:

$$\log.\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\frac{b^2}{4a^2}, \quad \omega = \omega_0 \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

Aber andererseits ist:

$$\omega_0 = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

folglich:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos. bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}. \qquad (k)$$

Wenn man a gegen Null convergiren läßt; so convergirt auch der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung gegen Null (§. 89), und folglich hat man an der Grenze, wofern b nicht Null ist:

$$\int_0^\infty \cos. bx dx = 0,$$

was mit dem im §. 325 erhaltenen Resultate übereinstimmt.

§. 411. Das doppelte Integral:

$$\Omega = \int_0^\infty \int_0^\infty 2e^{-y^2(1+x^2)} \cos. bx \cdot y dy dx$$

verwandelt sich, wenn man zunächst die Integration in Beziehung auf y verrichtet, in:

$$\Omega = \int_0^\infty \frac{\cos. bx \cdot dx}{1+x^2},$$

und wenn man zuerst in Beziehung auf x integrirte; so hätte man nach der Formel (k):

$$\Omega = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\left(y^2 + \frac{b^2}{4y^2}\right)} dx = \sqrt{\pi} \cdot e^b \int_0^\infty e^{-\left(\frac{2y^2+b}{2y}\right)^2} dx.$$

Setzen wir nun:

$$t = \frac{2y^2 - b}{2y}, \quad \text{folglich:} \quad \left(\frac{2y^2+b}{2y}\right)^2 = t^2 + 2b,$$

$$dy = \frac{1}{2} dt \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+2b}}\right);$$

so sind die $y = \infty$, $y = 0$ entsprechenden Grenzen der neuen Veränderlichen t, $t = +\infty$, $t = -\infty$, und man erhält:

$$\Omega = \frac{\sqrt{\pi} \cdot e^{-b}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2b}}\right) dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot e^{-b} + \frac{\sqrt{\pi} \cdot e^{-b}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} t dt}{\sqrt{t^2 + 2b}}.$$

Nun ist aber das im letzten Theile der vorhergehenden Gleichung vorkommende Integral $= 0$, wenn $b > 0$ ist; denn einerseits ist der Factor, womit die Größe $e^{-t^2} dt$ unter dem Zeichen $\int$ multiplicirt ist, numerisch kleiner als 1, so daß der zwischen den Grenzen 0, ∞ genommene Theil des Integrales einen endlichen Zahlenwerth, kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, hat, und da alle Elemente des Integrales mit t das Zeichen verändern, so hat man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} t dt}{\sqrt{t^2 + 2b}} = \int_{\infty}^{0} \frac{e^{-t^2} t dt}{\sqrt{t^2 + 2b}} + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-t^2} t dt}{\sqrt{t^2 + 2b}} = 0.$$

Es ist also für $b > 0$:

$$\Omega = \int_0^{\infty} \frac{\cos. bx dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-b}. \qquad (1)$$

Es ist zu bemerken, daß der hier zur Bestimmung eines einfachen Integrales angewandte analytische Kunstgriff in der Vergleichung zweier Resultate besteht, welche man erhält, wenn man bei einem doppelten Integrale die Ordnung der Integration umkehrt.

Wenn man in der Gleichung (1), mx für x und $\frac{b}{m}$ für b setzt; so erhält man:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos. bx dx}{1 + m^2 x^2} = \frac{\pi}{2m} \cdot e^{-\frac{b}{m}}, \qquad (m)$$

und wenn man alsdann $m = 0$ setzt; so ergibt sich wie vorhin, wofern b *nicht* $= 0$ ist:

$$\int_0^{\infty} \cos. bx dx = 0.$$

Wenn man in der Gleichung (1), $\frac{x}{m}$ für x und mb für b setzt; so kommt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos. bx dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m} \cdot e^{-mb},$$

woraus folgt, wenn man in Beziehung auf b differenzirt:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin. bx dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-mb}.$$

Wenn der Parameter b negativ wäre, so führte dieselbe Analyse auf die Formeln:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos. bx dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m} \cdot e^{mb}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin. bx dx}{m^2 + x^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot e^{mb}.$$

Elftes Kapitel.

Von den als Functionen veränderlicher Parameter betrachteten bestimmten Integralen. — Euler'sche Functionen.

§. 412. Man kann ſetzen:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)\,d\alpha = Fx, \qquad (1)$$

und alsdann iſt die Function F eine neue transcendente Größe, wenn ſich das im erſten Theile der Gleichung vorkommende Integral nicht algebraiſch, oder durch die Transcendenten, für welche man bereits Tafeln beſitzt, für beliebige Werthe der Grenzen α_0, α_1, oder wenigſtens für ſpecielle Werthe dieſer Grenzen, ausdrücken läßt. Man kann die Werthe von Fx für jeden Werth von x mit einer beliebigen Annäherung numeriſch berechnen, wofern die Function $f(x,\alpha)$ innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch das Unendliche geht (§. 320). Auch kann man die Function Fx in Beziehung auf x differenziren oder integriren, wenn man unter dem Zeichen $\int$ differenzirt oder integrirt, ohne daß man die Integration in Beziehung auf die Hülfsveränderliche α zu verrichten braucht.

Die Transcendenten, von welchen hier die Rede iſt, und welche ſich auf keine andern zurückführen laſſen, ſind von einer höhern Ordnung, als die Integrale:

$$\int_{x_0}^{x} fx\,dx, \qquad (2)$$

welche ebenfalls als irreductibel angenommen werden. In der That beſteht der Hauptcharakter dieſer letzten Transcendenten darin, daß ihre Ableitungen Functionen fx ſind, welche ſich algebraiſch ausdrücken laſſen, oder welche aus elementaren Transcendenten, für welche man Tafeln hat, zuſammengeſetzt ſind, während die Ableitung F'x einen Ausdruck:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{df(x,\alpha)}{dx}\,d\alpha$$

von derſelben Natur, als die Function, wovon ſie abgeleitet iſt, hat. Wenn ſich die Function F'x ohne Hülfe beſtimmter Integrale ausdrücken ließe; ſo müßte man den Ausdruck Fx auf die Form:

$$\int_{x_0}^{x} F'x\,dx$$

bringen, und alsdann würde Fx nicht mehr zu der Categorie der Transcendenten (1), ſondern in die der Transcendenten (2) gehören.

Eine Function, welche von mehreren Größen abhängt, kann zu den Transcendenten verſchiedener Categorien gezählt werden, je nachdem man dieſe oder jene der darin vorkommenden Größen als die veränderlichen betrachtet. So gehören z. B. die elliptiſchen Functionen der erſten und zweiten Art zu der Categorie der Integrale (2), wenn man den Modulus als conſtant, und die obere Grenze der Amplitude als veränderlich betrachtet, und ſie gehören dagegen in die Categorie der Integrale (1), wenn man die Grenzen der Am-

plitude beide als constant und den Modulus als eine Größe betrachtet, welche sich zwischen den Grenzen 0, 1 stetig ändern kann.

§. 413. Die Function f könnte innerhalb der Grenzen des Integrales durch das Unendliche gehen, ohne daß die Function Fx aufhörte, stetig zu sein, und wenn $f(x,\alpha)$ für einen gewissen Werth von α plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern überginge; so würde die Function Fx im Allgemeinen keine Unterbrechung der Stetigkeit erfahren, Dieses ist eine Folgerung aus den ersten Begriffen der Theorie der Quadraturen, wobei wir uns nicht aufzuhalten brauchen.

Umgekehrt, die Function F kann Unterbrechungen der Stetigkeit erfahren für Werthe von x, welche die Function f nicht discontinuirlich machen. Es sei z. B.:

$$Fx = \int_0^\infty \frac{\sin. \alpha x}{\alpha} d\alpha;$$

so ist für positive Werthe von x die Function $Fx = \frac{1}{2}\pi$ (§. 407), und für negative Werthe derselben Veränderlichen x ist $Fx = -\frac{1}{2}\pi$. Die Function Fx geht also für $x = 0$ plötzlich von dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$ zu dem Werthe $-\frac{1}{2}\pi$ über, obgleich dieser Werth von x die Function $\frac{\sin. \alpha x}{\alpha}$ nicht discontinuirlich macht. Desgleichen, wenn man setzte:

$$Fx = \int_0^\infty \frac{\alpha \sin. \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha,$$

so wäre $Fx = \frac{1}{2}\pi e^{-x}$, oder $Fx = -\frac{1}{2}\pi e^{x}$, je nachdem der Werth von x positiv, oder negativ ist, und die Function Fx würde in ihrem Werthe dieselbe plötzliche Veränderung erfahren.

Hieraus folgt, daß das Integral:

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin. \alpha x}{\alpha} d\alpha \qquad (3)$$

das System zweier geraden Linien MN, M'N' (Fig. 91) ausdrückt, welche zur Axe der x parallel sind, indem sich die eine auf der Seite der positiven x und die andere auf der Seite der negativen x ins Unendliche erstreckt und beide sich plötzlich in den Punkten schließen, wo sie die Axe der y treffen. Der Abscisse $x = 0$ entspricht übrigens der Werth $y = 0$, d. h. das arithmetische Mittel aus den Ordinaten $OM = \frac{1}{2}\pi$, $OM' = -\frac{1}{2}\pi$. Man bemerkt leicht die Analogie zwischen diesen Resultaten und denen im §. 113, wo der Werth von y durch eine unendliche Reihe ausgedrückt wurde, während er hier vermittelst eines bestimmten Integrales unter endlicher Form ausgedrückt wird.

Hieraus erhellet, wie die bestimmten Integrale, worin die Veränderliche als Parameter erscheint, discontinuirliche Functionen ausdrücken können, und wie durch die Fortschritte der Analysis sie bei den Aufgaben herbeigeführt werden müssen, bei welchen die Discontinuität gewisser Functionen eine nothwendige Bedingung ist. Die Anwendung der bestimmten Integrale bietet alsdann vor der der Reihen den Vortheil dar, daß man mit erstern leicht die analytischen Combinationen und Transformationen vornehmen kann, so daß die Aufgabe zuletzt auf die durch das bestimmte Integral angezeigte arithmetische Quadratur zurückgeführt, oder diese Operation vermieden wird, wenn sie der Aufgabe nicht nothwendig inhärirt.

§. 414. Aus der Gleichung (3) kann man durch ſchickliche Transformationen noch andere Formeln ableiten, welche andern Fällen der Discontinuität entſprechen. Es ſei z. B. die Function:

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin.\,\alpha \cos.\,\alpha x}{\alpha}\,d\alpha \qquad (4)$$

gegeben, ſo hat man:

$$\sin.\,\alpha \cos.\,\alpha x = \tfrac{1}{2}\,[\sin.(1+x)\alpha + \sin.(1-x)\alpha],$$

woraus folgt:

$$y = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin.(1+x)\alpha}{\alpha}\,d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin.(1-x)\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Nun reducirt ſich aber nach dem Bewieſenen das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin.(1+x)\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

für $x > -1$ auf $\frac{1}{2}\pi$ und für $x < -1$ auf $-\frac{1}{2}\pi$, und ebenſo reducirt ſich das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin.(1-x)\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

für $x < 1$ auf $\frac{1}{2}\pi$ und für $x > 1$ auf $-\frac{1}{2}\pi$. Hieraus folgt, daß der Werth von $y = \frac{1}{2}\pi$ iſt, wenn x zwiſchen $+1$ und -1 liegt, und daß $y = 0$ wird, wenn x außerhalb dieſer Grenzen liegt. Wenn man alſo $OP = OP' = 1$ (Fig. 92), $PM = PM' = \frac{1}{2}\pi$ nimmt; ſo wird der geometriſche Ort der Gleichung (4) von dem Theile MM' der zu der Axe der x parallelen geraden Linie; und von den geraden Linien PX, $P'X'$ gebildet, welche in den Punkten P, P' begrenzt ſind; aber nach dem andern Sinne unbeſtimmt fortlaufen.

§. 415. Aehnliche Unterbrechungen der Stetigkeit finden bei den beſtimmten Integralen ſtatt, welche ſich aus den unbeſtimmten Integralen ergeben, deren algebraiſchen Werth man kennt. Wir wollen namentlich die durch:

$$y = \int_0^\pi \frac{\sin.\,\alpha d\alpha}{\sqrt{1 - 2x\cos.\,\alpha + x^2}} \qquad (5)$$

ausgedrückte Function betrachten, ſo iſt, da die Wurzelgröße in der ganzen Ausdehnung des Integrales poſitiv bleiben muß:

$$\int \frac{\sin.\,\alpha d\alpha}{\sqrt{1 - 2x\cos.\,\alpha + x^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{1 - 2x\cos.\,\alpha + x^2} + \text{const.}$$

An den Grenzen $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ wird die Wurzelgröße reſp. gleich $\sqrt{(1-x)^2}$, $\sqrt{(1+x)^2}$, und da ſie poſitiv genommen werden muß; ſo folgt:

$$\sqrt{(1-x)^2} = \pm(1-x), \text{ je nachdem } x \lessgtr 1 \text{ iſt}$$

$$\sqrt{(1+x)^2} = \pm(1+x), \text{ je nachdem } x \gtrless -1 \text{ iſt},$$

und folglich iſt für

$$x > 1, \qquad y = \frac{2}{x},$$
$$x < 1, > -1, \quad y = 2,$$
$$x < -1, \qquad y = -\frac{2}{x}.$$

Der geometriſche Ort der Gleichung (5) wird alſo aus zwei Bogen MN, M'N' (Fig. 93) gleichſeitiger Hyperbeln, und aus einem Theile MM' der zu der Axe der x parallelen geraden Linie gebildet.

In dieſem Falle ſind die Unterbrechungen der Stetigkeit, welche die Function y für $x = 1$, $x = -1$ erfährt, nur von der zweiten Ordnung, und ihre Ableitung:

$$y' = \int_0^\pi \frac{\sin.\alpha\,(\cos.\alpha - x)}{(1 - 2x\cos.\alpha + x^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\alpha$$

erfährt für dieſelben Werthe von x Stetigkeitsunterbrechungen der erſten Ordnung, weil ſie plötzlich von dem Werthe — 2 zu dem Werthe 0 und von dieſem zu dem Werthe 2 übergeht.

Euler'ſche Functionen.

§. 416. In die Categorie der Functionen, womit wir uns jetzt beſchäftigen, gehören namentlich zwei merkwürdige Arten von Transcendenten, welche Legendre Euler'ſche Integrale genannt hat, zur Erinnerung an den großen Geometer, welcher die Eigenſchaften derſelben zuerſt unterſucht hat, und deſſen viel umfaſſende Arbeiten alle Zweige der Analyſis ſo bedeutend erweitert haben. Die Euler'ſchen Transcendenten der erſten Art werden durch das Integral:

$$\int_0^1 (1-\alpha)^{x-1}\alpha^{y-1}d\alpha \qquad (\alpha)$$

beſtimmt, welches ſich in:

$$\int_0^\infty \frac{\beta^{y-1}d\beta}{(1+\beta)^{x+y}}$$

verwandelt, wenn man

$$\alpha = \frac{\beta}{1+\beta}$$

ſetzt, und wir wollen ſie durch das Symbol (x|y) bezeichnen. Die Euler'ſchen Transcendenten der zweiten Art werden durch das Integral:

$$\int_0^1 \left(\log.\frac{1}{\alpha}\right)^{x-1} d\alpha$$

gegeben, welches ſich in:

$$\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{x-1}\,d\beta$$

verwandelt, wenn man:

$$\log.\frac{1}{\alpha} = \beta$$

ſetzt, und wir wollen ſie mit Legendre durch das Symbol Γx bezeichnen. Es iſt zweckmäßig, daß wir zuerſt die Euler'ſchen Transcendenten der zweiten

Art betrachten, welches die einfachſten ſind, weil ſie nur von einer einzigen Veränderlichen abhängen.

§. 417. Die theilweiſe Integration gibt:

$$\int e^{-\beta}\beta^{x}d\beta = -e^{-\beta}\beta^{x} + x\int e^{-\beta}\beta^{x-1}d\beta,$$

woraus folgt:

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta}\beta^{x}d\beta = x\int_0^{\infty} e^{-\beta}\beta^{x-1}d\beta,$$

indem x als poſitiv vorausgeſetzt wird, oder vielmehr:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma x. \qquad (\alpha)$$

Dieſe Formel drückt die charakteriſtiſche Eigenſchaft der Function Γx aus, und nach derſelben iſt dieſe Function für alle poſitiven Werthe von x bekannt, wenn man eine Tafel ihrer Werthe zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = 1$, oder allgemeiner, zwiſchen den Grenzen $x = i$, $x = i+1$, wo i eine beliebige ganze poſitive Zahl bezeichnet, hat. Legendre und Gauß haben in der That zum praktiſchen Gebrauche nach Annäherungsformeln, welche hier nicht näher angegeben werden können, Tafeln der Function Γx berechnet.

Es iſt:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-\beta}d\beta = 1, \qquad (\alpha_1)$$

und aus der Vergleichung dieſer Formel mit der vorhergehenden ergibt ſich:

$$\Gamma i = 1.2.3\ldots(i-1),$$

wo i eine ganze poſitive Zahl bezeichnet.

Die Producte der um eine conſtante Differenz h verſchiedener Factoren:

$$x(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots,$$

werden Factoriellen und numeriſche Facultäten genannt, wegen ihrer Aehnlichkeit mit den Potenzen, und durch eine Vertauſchung der Veränderlichen kann man ſie leicht auf die einfacheren Factoriellen:

$$1.2.3\ldots i,$$

welche in der Theorie der Combinationen und der Wahrſcheinlichkeitsrechnung eine ſo wichtige Rolle ſpielen, zurückführen. Die ſtetige Function Γx wird jedesmal eine Factorielle dieſer Art, wenn x durch einen ganzen poſitiven Werth geht, und folglich kann die Tafel der Werthe der Function Γx als eine Interpolationstafel für die Factoriellen betrachtet werden.

Die Gleichungen (α), (α_1) geben $\Gamma(0) = \infty$, und folglich hat die Curve $y = \Gamma x$ die Axe der y zur Aſymptote. Von dem Werthe $x = 0$ an nimmt die Function Γx bis zu einem gewiſſen Werthe von $x = 1{,}46163\ldots$ ab, und nimmt dann bis zu dem Werthe $x = 2$ zu, woraus wegen der Gleichung (α) offenbar folgt, daß die Function Γx für die größere Werthe von x ohne Ende und zwar ſehr ſchnell mit dieſer Veränderlichen zunehmen muß.

Für negative Werthe von x hat die Function:

$$\Gamma x = \int_0^{\infty} e^{-\beta}\beta^{x-1}d\beta \qquad (\beta)$$

keine angebbaren Werthe mehr, und die Gleichung (α) iſt nicht mehr anwendbar.

§. 418. Wenn wir in der Gleichung (β) die Größe β in $m\alpha$ verwandeln, ſo geht ſie über in:

$$\int_0^\infty e^{-m\alpha}\alpha^{x-1}d\alpha = \frac{\Gamma x}{m^x}, \qquad (b)$$

und wenn wir in dieſer letzten Gleichung $x+y$ für x, und $1+\beta$ ſtatt m ſetzen; ſo erhalten wir:

$$\int_0^\infty e^{-(1+\beta)\alpha}\alpha^{x+y-1}d\alpha = \frac{\Gamma(x+y)}{(1+\beta)^{x+y}}.$$

Multipliciren wir die beiden Theile dieſer Gleichung mit $\beta^{y-1}d\beta$ und integriren zwiſchen den Grenzen $0, \infty$ in Beziehung auf β, ſo ergibt ſich:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(1+\beta)\alpha}\alpha^{x+y-1}\beta^{y-1}d\beta d\alpha = \Gamma(x+y)\int_0^\infty \frac{\beta^{y-1}d\beta}{(1+\beta)^{x+y}}. \qquad (6)$$

Nun iſt aber nach der Formel (b):

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\beta}\beta^{y-1}d\beta = \frac{\Gamma y}{\alpha^y},$$

ſo daß der erſte Theil der Gleichung (6) nach verrichteter Integration in Beziehung auf β übergeht in:

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma y}{\alpha y}\cdot e^{-\alpha}\alpha^{x+y-1}d\alpha = \Gamma y\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{x-1}d\alpha = \Gamma y\cdot\Gamma x.$$

Die Gleichung (β) gibt alſo:

$$\Gamma x\cdot\Gamma y = \Gamma(x+y)\cdot\int_0^\infty \frac{\beta^{y-1}d\beta}{(1+\beta)^{x+y}}, \qquad (7)$$

und wenn man $y+x=1$ ſetzt; ſo erhält man:

$$\Gamma y\cdot\Gamma(1-y) = \Gamma(1)\cdot\int_0^\infty \frac{\beta^{y-1}d\beta}{1+\beta},$$

oder wenn man y in x verwandelt und bemerkt, daß ſich $\Gamma(1)$ auf die Einheit reducirt:

$$\Gamma x\cdot\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{\beta^{x-1}d\beta}{1+\beta},$$

oder endlich nach der Formel (d) im §. 406:

$$\Gamma x\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin.\pi x}. \qquad (c)$$

Nach dieſer letzten Formel berechnet man die Tafel der Werthe Γx zwiſchen den Grenzen $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, wenn man die Tafel der Werthe derſelben Function zwiſchen den Grenzen $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ hat.

Für $x=\frac{1}{2}$ gibt die Formel (c):

$$[\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2 = \pi, \quad \text{oder} \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}; \qquad (c_1)$$

aber es iſt:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{\beta}}\cdot d\beta = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt,$$

welches einen neuen Beweis der Formel (a) im §. 403 liefert.

§. 419. Nach der Definition der Euler'ſchen Function der erſten Art kann die Gleichung (7) auf folgende Weiſe geſchrieben werden:

$$(x|y) = \frac{\Gamma x \cdot \Gamma y}{\Gamma(x+y)}. \qquad (d)$$

Durch dieſe von Euler herrührende Fundamentalformel, für welche wir eben den von Poiſſon gegebenen Beweis mitgetheilt haben, wird die Berechnung der Tafel mit einem doppelten Eingange (§. 116), welche die Werthe der Function $(x|y)$ für die poſitiven Werthe der Veränderlichen x, y gäbe, auf die Berechnung der Tafel der Function Γx zurückgeführt. Hieraus folgt:

$$(x|y) = (y|x),$$

was übrigens auch direct daraus folgt, daß der Werth des Integrales (α) nicht geändert wird, wenn man α in $1 - \alpha$ verwandelt.

Ferner folgt aus der Formel (d):

$$(x+z|y) \cdot \Gamma(x+y+z) = \Gamma(x+z) \cdot \Gamma y,$$
$$(x|z) \cdot \Gamma(x+z) = \Gamma x \cdot \Gamma z,$$

wo z ſowohl als x und y eine poſitive Veränderliche bezeichnet, und hieraus folgt:

$$(x+z|y) \cdot (x|z) = \frac{\Gamma x \cdot \Gamma y \cdot \Gamma z}{\Gamma(x+y+z)},$$

oder, da der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung eine ſymmetriſche Function der Veränderlichen x, y, z iſt:

$$(x+z|y) \cdot (x|z) = (y+z|x) \cdot (y|z).$$

Aus der Verbindung der Formeln (c) und (d) ergibt ſich:

$$(1-x|x) = \frac{\pi}{\sin. \pi x}.$$

Wenn man in dem Integrale (α) $y = x$, $\alpha = \frac{1}{2}(1+\omega)$ ſetzt; ſo erhält man:

$$(x|x) = \frac{1}{2^{2x-1}} \int_{-1}^{1} (1-\omega^2)^{x-1} d\omega = \frac{1}{2^{2x-2}} \int_{0}^{1} (1-\omega^2)^{x-1} d\omega,$$

und wenn man nun $\sqrt{\alpha}$ für ω ſetzt; ſo kommt:

$$(x|x) = \frac{1}{2^{2x-1}} \int_{0}^{1} (1-\alpha)^{x-1} \alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha = \frac{1}{2^{2x-1}} \cdot \left(x\middle|\frac{1}{2}\right).$$

Wegen der Gleichungen (d) und (c_1) iſt dieſe letzte Formel identiſch mit der folgenden:

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-2}} \cdot \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma x},$$

woraus ſich für eine ganze Zahl i ergibt:

$$\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^i} \cdot \frac{1.2.3\ldots(2i-1)}{2^{i-1} \cdot 1.2.3\ldots(i-1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^i} \cdot 1.3.5\ldots(2i-1),$$

folglich:

$$1.3.5\ldots(2i-1) = \frac{2^i}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right).$$

§. 420. Es iſt identiſch:

$$\int_0^1 \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta}d\xi = \beta\int_0^1\int_0^{1-\xi} \xi^{\alpha-1}\eta^{\beta-1}d\eta d\xi,$$

oder:

$$\int_0^1 \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta}d\xi = \beta\iint \xi^{\alpha-1}\eta^{\beta-1}d\xi d\eta,$$

wo sich das doppelte Integral des zweiten Theiles auf alle positiven Werthe der Veränderlichen ξ, η erstreckt, welche der Ungleichheit:

$$\xi + \eta < 1 \qquad (8)$$

genügen. Aber das im ersten Theile der Gleichung vorkommende einfache Integral ist nicht anders, als die Function $(\alpha|\beta+1)$, und folglich ist vermöge der Euler'schen Formel und unter der durch die Ungleichheit (8) ausgedrückten Bedingung:

$$\iint \xi^{\alpha-1}\eta^{\beta-1}d\xi d\eta = \frac{\Gamma\alpha\cdot\Gamma(1+\beta)}{\beta\cdot\Gamma(1+\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma\alpha\cdot\Gamma\beta}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}.$$

Wenn wir

$$\xi = \left(\frac{x}{a}\right)^p, \quad \eta = \left(\frac{y}{b}\right)^q$$

setzen; so ergibt sich vermöge dieser Formel:

$$\iint x^{p\alpha-1}y^{q\beta-1}dxdy = \frac{a^{p\alpha}b^{q\beta}}{pq}\cdot\frac{\Gamma\alpha\cdot\Gamma\beta}{\Gamma(1+\alpha+\beta)},$$

oder vielmehr:

$$\iint x^{\alpha-1}y^{\beta-1}dxdy = \frac{a^{\alpha}b^{\beta}}{pq}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}\right)}, \qquad (9)$$

wo sich das doppelte Integral auf alle positive Werthe von x und y erstrecken muß, welche der Ungleichheit:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q < 1$$

genügen, und die Constanten $\alpha, \beta, a, b, p, q$ werden als positiv vorausgesetzt.

Wenn man, um die Begriffe zu fixiren, und um den Fall zu betrachten, welcher die häufigsten Anwendungen gestattet, $p = q = 2$ setzt; so erhält man, wenn man das doppelte Integral auf die ganze in der Ebene der xy von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

eingeschlossene Fläche erstreckt und aus diesem Grunde den Werth des zweiten Theiles der Gleichung (9) vierfach nimmt:

$$\iint x^{\alpha-1}y^{\beta-1}dxdy = a^{\alpha}b^{\beta}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Dieſe Formel gibt den bekannten Ausdruck für die Fläche der Ellipſe wieder, wenn man $\alpha = \beta = 1$ ſetzt.

§. 421. Es ſeien nun $x, y, z, \text{ꝛc.}$ n Veränderliche, $\int^{(n)}$ bezeichne ein vielfaches Integral von der n^{ten} Ordnung, und wir wollen annehmen, daß ſich die vielfache Integration auf alle poſitiven Werthe von $x, y, z, \text{ꝛc.}$ erſtreckt, welche der Ungleichheit:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r + \text{ꝛc.} < 1$$

genügen; ſo haben wir:

$$\int^{(n)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots$$

$$= \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots}{pqr\ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right) \ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} + \frac{\gamma}{r} + \ldots\right)}. \qquad (f)$$

Dieſe ſehr merkwürdige Formel, worin die Gleichung (e) als beſonderer Fall enthalten iſt, rührt von Dirichlet her, und der ſinnreiche Rechnungskunſtgriff, wodurch ſie gefunden iſt, bietet den Vortheil dar, daß er auch auf viele andere Integrale anwendbar iſt; *) jedoch werden wir die folgende von Liouville angewandte Beweisart vorziehen.

Zunächſt erſetzt man die zu beweiſende Formel (f) vermittelſt der im vorhergehenden §. angewandten Vertauſchung der Veränderlichen durch die einfachere Formel:

$$\int^{(n)} \xi^{\alpha-1} \eta^{\beta-1} \zeta^{\gamma-1} \ldots d\xi d\eta d\zeta \ldots = \frac{\Gamma\alpha \cdot \Gamma\beta \cdot \Gamma\gamma \ldots}{\Gamma(1 + \alpha + \beta + \gamma \ldots)}, \qquad (\varphi)$$

wo ſich die vielfache Integration auf alle poſitiven Werthe der neuen Veränderlichen $\xi, \eta, \zeta, \text{ꝛc.}$, welche der Ungleichheit:

$$\xi + \eta + \zeta + \text{ꝛc.} < 1$$

genügen, erſtreckt. Wir wollen für den Augenblick ſtatt dieſer letzten Bedingung die allgemeinere, durch die Ungleichheit:

$$\xi + \eta + \zeta + \text{ꝛc.} < \theta$$

ausgedrückte Bedingung ſubſtituiren, wo θ eine beliebige poſitive Größe bezeichnet, und zuerſt

$$V = \iint \xi^{\alpha-1} \eta^{\beta-1} d\xi d\eta, \quad \xi + \eta < \theta$$

ſetzen; ſo kommt es darauf an, den Werth des Integrales V zu erhalten.

Es ſei:

$$\xi = \mu\nu, \quad y = \mu(1 - \nu),$$

ſo ſind die Grenzen der Integration in Beziehung auf die neuen Veränderlichen μ, ν reſp. $0, \theta$; $0, 1$, und man erhält:

$$V = \int_0^1 \int_0^\theta \mu^{\alpha+\beta-1} \nu^{\alpha-1} (1-\nu)^{\beta-1} d\mu d\nu = \frac{\Gamma\alpha \cdot \Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot \int_0^\theta \mu^{\alpha+\beta-1} d\mu.$$

*) Vergl. das Journal de mathématiques de M. Liouville, tom. IV. pag. 164 et 225.

Wir wollen nun

$$V = \int\int\int \xi^{\alpha-1}\eta^{\beta-1}\zeta^{\gamma-1}d\xi d\eta d\zeta, \quad \xi+\eta+\zeta<\theta, \quad \theta-\xi=\eta_1$$

ſetzen; ſo können wir ſchreiben:

$$V = \int_0^{\eta_1-\eta}\int_0^{\eta_1}\int_0^{\theta} \xi^{\alpha-1}\eta^{\beta-1}\zeta^{\gamma-1}d\xi d\eta d\zeta.$$

Aber das doppelte Integral:

$$\int_0^{\eta_1-\eta}\int_0^{\eta_1} \eta^{\beta-1}\zeta^{\gamma-1}d\eta d\zeta$$

hat nach dem Vorhergehenden den Werth:

$$\frac{\Gamma\beta\cdot\Gamma\gamma}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_0^{\eta_1}\mu^{\beta+\gamma-1}d\mu,$$

und folglich iſt:

$$V = \frac{\Gamma\beta\cdot\Gamma\gamma}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_0^{\theta}\int_0^{\eta_1} \xi^{\alpha-1}\mu^{\beta+\gamma-1}d\mu d\xi.$$

Endlich hat man wieder nach der vorhergehenden Rechnung, wenn man für η_1 ſeinen Werth ſetzt und μ_1 eine neue Veränderliche bezeichnet:

$$\int_0^{\theta}\int_0^{\theta-\xi} \xi^{\alpha-1}\mu^{\beta+\gamma-1}d\mu d\xi = \frac{\Gamma\alpha\cdot\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{\theta}\mu_1{}^{\alpha+\beta+\gamma-1}d\mu_1,$$

folglich:

$$V = \frac{\Gamma\alpha\cdot\Gamma\beta\cdot\Gamma\gamma}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\cdot\int_0^{\theta}\mu_1{}^{\alpha+\beta+\gamma-1}d\mu_1.$$

Wenn man nun $\theta = 1$ ſetzt; ſo kommt man wieder auf die auf den Fall dreier Veränderlicher beſchränkte Formel (φ), und da ſich die angewandte Analyſe offenbar ſucceſſive auf eine beliebige Anzahl von Veränderlichen erſtrecken läßt; ſo folgt, daß die Formel (φ) und folglich die Formel (f) in ihrer ganzen Allgemeinheit bewieſen iſt.

§. 422. Wir wollen in der Formel (b), n für $x-1$ und x für α ſetzen; ſo verwandelt ſie ſich in:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-mx}dx = \frac{\Gamma(n+1)}{m^{n+1}}, \qquad (g)$$

und wenn n eine ganze poſitive Zahl iſt; ſo hat man folglich:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-mx}dx = \frac{1.2.3\ldots n}{m^{n-1}},$$

was ſich auch aus der Gleichung (a) im §. 313 ergibt, wenn man darin α in $-m$ verwandelt.

Wir wollen in der Formel (g), $m = a + b\sqrt{-1}$ ſetzen, wo a eine poſitive Conſtante bezeichnet und für die imaginäre Exponentialgröße ihren durch Sinus und Coſinus ausgedrückten Werth ſubſtituiren; ſo verwandelt ſich die Formel in:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}(\cos. bx - \sqrt{-1}\cdot\sin. bx)dx = \frac{\Gamma(n+1)}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}},$$

oder, wenn man

$$a^2 + b^2 = \varrho^2, \quad \frac{b}{a} = \text{tang. } \lambda$$

ſetzt, in:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}(\cos. bx - \sqrt{-1} \cdot \sin. bx)dx$$
$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\varrho^{n+1}} [\cos.(n+1)\lambda - \sqrt{-1} \cdot \sin.(n-1)\lambda].$$

Dieſe letzte Gleichung zerfällt in die beiden andern:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \cos. bx \cdot dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\varrho^{n+1}} \cdot \cos. (n+1)\lambda,$$
$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \sin. bx \cdot dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\varrho^{n+1}} \cdot \sin. (n+1)\lambda;$$

und in der Vorausſetzung von $n = 0$ geben dieſe die Formeln (f) im §. 407 wieder.

Zwölftes Kapitel.

Entwickelung der Functionen in trigonometriſche Reihen. — Theorem von Fourier.

§. 423. Es bezeichne y eine periodiſche Function von x von der Form:

$$y = A_1 \sin. x + A_2 \sin. 2x + A_3 \sin. 3x + \ldots + A^n \sin. nx, \qquad (1)$$

wo jeder Coefficient A_i von x unabhängig iſt, und fx bezeichne eine Function von x, welche eine mathematiſche oder empiriſche, ſtetig, oder Stetigkeitsunterbrechungen von einer beliebigen Ordnung unterworfen ſein kann; ſo ſoll man die n Coefficienten A_i ſo beſtimmen, daß für die n beſondere zwiſchen $x = 0$ und $x = \pi$ um gleiche Differenzen wachſenden Werthe:

$$x = \frac{\pi}{n+1}, \quad x = \frac{2\pi}{n+1}, \quad x = \frac{3\pi}{n+1}, \ldots x = \frac{n\pi}{n+1}, \qquad (2)$$

$y = fx$ iſt, oder mit andern Worten, daß die durch die Gleichung (1) ausgedrückte Curve mit der Curve $y = fx$, n Punkte gemein hat, welche den Abſciſſen (2) entſprechen (§. 21).

Wir wollen die Coordinaten dieſer gemeinſchaftlichen Punkte mit $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ bezeichnen; ſo haben wir zur Beſtimmung der Coefficienten A_i die n Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= A_1 \sin. \frac{\pi}{n+1} + A_2 \sin. \frac{2\pi}{n+1} + \ldots + A_n \sin. \frac{n\pi}{n+1} \\
y_2 &= A_1 \sin. \frac{2\pi}{n+1} + A_2 \sin. \frac{4\pi}{n+1} + \ldots + A_n \sin. \frac{2n\pi}{n+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= A_1 \sin. \frac{n\pi}{n+1} + A_2^n \sin. \frac{2n\pi}{n+1} + \ldots + A_n \sin. \frac{n^2\pi}{n+1}
\end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Wenn man ſie zuſammenaddirt, nachdem man ſie reſp. durch:

$$2\sin.\frac{i\pi}{n+1},\quad 2\sin.\frac{2i\pi}{n+1},\ldots 2\sin.\frac{ni\pi}{n+1} \tag{4}$$

multiplicirt hat, ſo hat die Unbekannte A_i zum Multiplicator:

$$2\sin.\frac{i\pi}{n+1}\cdot\sin.\frac{i'\pi}{n+1}+2\sin.\frac{2i\pi}{n+1}\cdot\sin.\frac{2i'\pi}{n+1}+\ldots$$
$$\ldots+2\sin.\frac{ni\pi}{n+1}\cdot\sin.\frac{ni'\pi}{n+1},$$

d. h. die Differenz der beiden Summen:

$$\left.\begin{aligned}1+\cos.\frac{(i'-i)\pi}{n+1}+\cos.\frac{2(i'-i)\pi}{n+1}+\ldots+\cos.\frac{n(i'-i)\pi}{n+1}&=S_1\\ 1+\cos.\frac{(i'+i)\pi}{n+1}+\cos.\frac{2(i'+i)\pi}{n+1}+\ldots+\cos.\frac{n(i'+i)\pi}{n+1}&=S_2\end{aligned}\right\}. \tag{S}$$

Es ſei allgemeiner:

$$\cos.\alpha+\cos.(\alpha+\nu)+\cos.(\alpha+2\nu)\ldots+\cos.(\alpha+n\nu)=S,$$

ſo findet man durch eine ähnliche Rechnung, wie die im §. 406:

$$S=\frac{-\cos.(\alpha-\nu)+\cos.\alpha+\cos.(\alpha+n\nu)-\cos.[\alpha+(n+1)\nu]}{2(1-\cos.\nu)}.$$

und für $\alpha=0$:

$$S=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\cos.n\nu-\cos.(n+1)\nu}{1-\cos.\nu}\right].$$

Wenn man nun:

$$\nu=\frac{(i'\mp i)\pi}{n+1}$$

ſetzt, ſo erhält man:

$$\cos.(n+1)\nu=\pm 1,\quad \cos.n\nu=\pm\cos.\nu,$$

je nachdem $(i'\mp i)\pi$ ein gerades oder ungerades Vielfaches von π iſt. In dem einen und in dem andern Falle iſt alſo:

$$\cos.n\nu=\cos.\nu\cdot\cos.(n+1)\nu,\quad S=\tfrac{1}{2}[1-\cos.(n+1)\nu],$$

und folglich:

$$S_1=\tfrac{1}{2}[1-\cos.(i'-i)\pi],\quad S_2=\tfrac{1}{2}[1-\cos.(i'+i)\pi]. \tag{S'}$$

So lange der Index i' von i verſchieden iſt, ſind die Zahlen $i'-i$, $i'+i$ zu gleicher Zeit gerade oder ungerade, und es iſt $S_1-S_2=0$, ſo daß alle Coefficienten A mit Ausnahme von A_i aus der Summe der reſp. durch die Factoren (4) multiplicirten Gleichungen (3) verſchwinden.

Für $i'=i$ hat man vermöge der zweiten der Gleichungen (S'), $S_2=0$ und die erſte der Gleichungen (S') wird illuſoriſch, weil man den Winkel ν in dem Werthe von S, woraus dieſe Gleichung abgeleitet iſt, nicht $=0$ ſetzen kann; aber in dieſem Falle gibt die erſte der Gleichungen (S) direct $S_1=n+1$.

Nach allen dieſen Bemerkungen hat man zur Beſtimmung des Werthes des Coefficienten A_i die Gleichung:

$$A_i=\frac{2}{n+1}\left(y_1\sin.\frac{i\pi}{n+1}+y_2\sin.\frac{2i\pi}{n+1}+\ldots+y_n\sin.\frac{ni\pi}{n+1}\right),$$

und man braucht zur Auflöſung der geſtellten Aufgabe dem Index i nur ſucceſſive die Werthe 1, 2, 3, ... n beizulegen.

§. 424. Je größer die Zahl n iſt, deſto mehr Punkte hat die durch die Gleichung (1) beſtimmte Curve zwiſchen den Abſciſſen $x = 0$, $x = \pi$ mit der Curve $y = fx$ gemein, und folglich fallen die beiden Curven an der Grenze $(n = \infty)$ für alle zwiſchen den eben angegebenen Grenzen liegende Punkte zuſammen. An dieſer Grenze $n = \infty$ verwandelt ſich aber die Summe, welche den Werth von A_i ausdrückt, in ein beſtimmtes Integral, und wenn man

$$\frac{i\pi}{n+1} = \xi, \quad \frac{\pi}{n+1} = d\xi, \quad y_i = f\xi$$

ſetzt, ſo kommt:

$$A_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sin. } i\xi \cdot f\xi d\xi,$$

und folglich:

$$fx = \frac{2}{\pi} \cdot \Sigma \cdot \text{sin. } ix \int_0^{\pi} \text{sin. } i\xi \cdot f\xi d\xi, \qquad (\alpha)$$

wo das Zeichen Σ andeutet, daß dem Index i ſucceſſive alle ganzen Zahlen von der Einheit incl. beigelegt werden ſollen, und daß man die Summe aller der ſo erhaltenen Glieder zu nehmen hat.

Der Beweis, welchen wir eben von der Formel (α) gegeben haben, iſt von Lagrange, und ſchließt ſich an die Theorie der Interpolation an, wie der, welchen wir von der Taylor'ſchen und folglich von der Maclaurin'ſchen Reihe gegeben haben (§. 98), und es war zweckmäßig, durch dieſelbe Methode zu dieſen Hauptformeln für die Entwickelung der Functionen in Reihen zu gelangen; aber es bleibt noch zu beweiſen übrig, daß die durch den zweiten Theil der Gleichung (α) ausgedrückte Reihe immer convergent iſt, von welcher Beſchaffenheit die Function f auch ſein mag, ſei ſie ſtetig oder nicht, wofern ſie nur nicht zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = \pi$ unendlich wird. Die Methode, welche wir anwenden wollen, um dieſen Fundamentalſatz in aller Strenge und ohne unnütze Einſchränkungen abzuleiten, wird uns zu gleicher Zeit einen neuen und in gewiſſen Beziehungen ſogar einen directen Beweis der Formel (α) an die Hand geben.

§. 425. Suchen wir die Grenze, gegen welche das Integral:

$$\int_{\mu}^{\nu} \frac{\text{sin. } i\omega}{\text{sin. } \omega} d\omega$$

convergirt, wenn man für i eine immer größere und größere poſitive Zahl nimmt. Zu dem Zwecke wollen wir $\frac{1}{\varepsilon}$ für i ſetzen, wo ε eine poſitive Zahl bezeichnet, welche ohne Ende gegen Null convergirt und $\frac{\omega}{\varepsilon} = \theta$ ſetzen; ſo kommt:

$$\int_{\mu}^{\nu} \frac{\text{sin. } i\omega}{\text{sin. } \omega} d\omega = \int_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{\text{sin. } \varepsilon\theta} \cdot \text{sin. } \theta d\theta. \qquad (\omega)$$

Aber wenn man ε wie eine unendlich kleine Zahl behandelt, so verschwindet der Factor $\frac{\varepsilon}{\sin.\varepsilon\theta}$, wofern nicht zu gleicher Zeit $\varepsilon\theta$ unendlich klein ist, in welchem Falle:

$$\frac{\varepsilon}{\sin.\varepsilon\theta} = \frac{1}{\theta}$$

ist, und folglich kann man an der Grenze für das gegebene Integral das folgende setzen:

$$\int_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta.$$

Nun ist aber (§. 407):

$$\int_0^\infty \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta = \pi$$

$$\int_0^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta - \int_0^{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta = \int_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta.$$

Wenn nun μ und ν positive Zahlen sind, und ε eine sehr kleine Zahl ist, so ist jedes der beiden Integrale im ersten Theile der letzten Gleichung fast $= \frac{1}{2}\pi$; folglich ihre Differenz oder das gegebene Integral (ω) fast Null, und an der Grenze $i = \infty$ verschwindet es in aller Strenge.

Aus demselben Grunde würde (ω), wenn $\mu = 0$ wäre und ν irgend einen positiven Werth behielte, den Werth $\frac{1}{2}\pi$ annehmen, und wenn endlich μ eine negative, und ν eine positive Zahl bezeichnete; so würde das Integral (ω) gegen die Grenze π convergiren.

Da vorausgesetzt wird, daß die Function f zwischen den Integrationsgrenzen endlich bleibt, so convergirt folglich das Integral:

$$\int_\mu^\nu f\omega \cdot \frac{\sin.i\omega}{\sin.\omega}\,d\omega = \int_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} f(\varepsilon\theta) \cdot \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta \qquad (\Omega)$$

für immer größer werdende positive Werthe von i, welche immer kleiner werdenden Werthen von ε entsprechen, gegen die Grenze Null, wenn die Zahlen μ, ν dasselbe Zeichen haben und von Null verschieden sind. Dieses Integral wird $= \frac{1}{2}\pi f(0)$, wenn die Zahl $\mu = 0$ ist und es nimmt endlich den Werth $\pi f(0)$ an, wenn die Zahlen μ, ν entgegengesetzte Zeichen haben.

Wenn in dieser letzten Voraussetzung die Function $f\omega$ gegen verschiedene Grenzen $f_1(0)$, $f_2(0)$ convergirte, je nachdem ω gegen Null convergirt, indem es negative oder positive Werthe durchläuft, oder mit andern Worten, wenn die Function $f\omega$ plötzlich von dem Werthe $f_1(0)$ zu dem Werthe $f_2(0)$ überginge; so würde die Grenze $\pi f(\omega)$ durch $\frac{1}{2}\pi[f_1(0) + f_2(0)]$ ersetzt.

Nachdem wir auf diese Weise für alle Fälle den Grenzwerth des Integrales (ω) bestimmt haben, wollen wir zu dem Lehrsatze übergehen, zu dessen Beweisführung wir diese Grenze gesucht haben, indem wir bei diesem letzten Theile des Beweises einen von Dirichlet angedeuteten Weg einschlagen.*)

*) Vergl. Crelle's Journal für reine und angew. Math. Bd. 4. S. 166.

§. 426. Die Function:

$$S_i = \frac{2}{\pi}\Big[\sin.x\int_0^\pi f\xi \sin.\xi d\xi + \sin.2x\int_0^\pi f\xi \sin.2\xi d\xi + \ldots$$
$$\ldots + \sin.ix\int_0^\pi f\xi \sin.i\xi d\xi\Big],$$

oder die Summe der i erſten Glieder der Reihe (a) kann auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\xi d\xi[2\sin.x\sin.\xi + 2\sin.2x\sin.2\xi + \ldots + 2\sin.ix\sin.i\xi]$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\xi d\xi\Big[\begin{matrix}1+\cos.(x-\xi)+\cos.2(x-\xi)+..+\cos.i(x-\xi)\\ -[1+\cos.(x+\xi)+\cos.2(x+\xi)+..+\cos.i(x+\xi)]\end{matrix}\Big]$$

und nach den Formeln im §. 423 hat man:

$$1+\cos.(x\pm\xi)+\cos.2(x\pm\xi)+\ldots+\cos.i(x\pm\xi)$$
$$= \frac{1}{2}\Big[1-\frac{\cos.i(x\pm\xi)-\cos.(i+1)(x\pm\xi)}{1-\cos.(x\pm\xi)}\Big]$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{1+\sin.(i+\frac{1}{2})(x\pm\xi)}{\sin.\frac{1}{2}(x\pm\xi)}\Big],$$

ſo daß ſich die Summe S_i in:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f\xi\cdot\frac{\sin.(i+\frac{1}{2})(x-\xi)}{\sin.\frac{1}{2}(x-\xi)}d\xi - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f\xi\cdot\frac{\sin.(i+\frac{1}{2})(x+\xi)}{\sin.\frac{1}{2}(x+\xi)}d\xi$$

verwandelt. Wenn wir in dem erſten Integrale $x-\xi=2\omega$ und in dem zweiten $x+\xi=2\omega$ ſetzen; ſo folgt:

$$S_i = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{x-\pi}{2}}^{\frac{x}{2}} f(x-2\omega)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+\pi}{2}} f(2\omega-x)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega.$$

Wir wollen annehmen, daß x zwiſchen 0 und π fällt, ſo daß die beiden Grenzen des zweiten Integrales poſitiv ſind, und daß die untere Grenze des erſten negativ iſt; ſo wird das zweite Integral nach dem im vorhergehenden § Geſagten für $i=\infty$ Null. Wenn man ferner in der Function $f(x-2\omega)$, $\omega=0$ ſetzt; ſo reducirt ſie ſich auf fx, und folglich iſt die Grenze, gegen welche das erſte Integral convergirt, $=\frac{1}{2}\cdot\pi fx$. Der zweite Theil der Gleichung (a) iſt alſo unter der Bedingung, daß die Veränderliche x zwiſchen Null und π bleibt, und daß die Function fx innerhalb dieſer Grenzen nicht unendlich wird, eine convergirende Reihe, welche Fx zur Summe hat.

Wenn die Function f für den Werth a plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern überginge, ſo wäre der Werth der Reihe (a) die halbe Summe der beiden Werthe, welche alsdann die Function f annimmt (§. 38).

Wir müſſen nun noch die Werthe von S_i für die Grenzwerthe 0 und π von x angeben. Nun iſt aber für $x=0$:

$$S_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(-2\omega)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(2\omega)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega$$

und für $x = \pi$ ist:

$$S_i = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2\omega)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(2\omega-\pi)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2\omega)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-2\omega)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega,$$

welche Größen für jeden Werth von i verschwinden.

§. 427. Der zweite Theil der Gleichung (a) ist eine periodische Function von x, während fx durchaus keine periodische Function zu sein braucht. Wenn also die Function fx für $x = 0$ und $x = \pi$ nicht verschwindet; so besteht die Curve, deren Ordinate durch:

$$y = \frac{2}{\pi}\Sigma\cdot\sin.ix\int_{0}^{\pi}\sin.i\xi\cdot f\xi d\xi \qquad (5)$$

ausgedrückt wird, aus getrennten Bogen, welche abwechselnd auf der einen und auf der andern Seite der Axe der x liegen (Fig. 94). Für die Abscissen der Trennungspunkte gibt die Gleichung (5) weder die eine, noch die andere der beiden gleichen Ordinaten OM, OM_i von entgegengesetzten Zeichen, sondern die halbe Summe dieser Ordinaten, d. h. den Werth Null.

§. 428. Beispiele. 1) Es sei $fx = \frac{1}{2}x$; so ist:

$$\tfrac{1}{2}x = \sin.x - \tfrac{1}{2}\sin.2x + \tfrac{1}{3}\sin.3x - \tfrac{1}{4}\sin.4x + \text{ꝛc.}, \qquad (6)$$

eine bereits im §. 113 gefundene Formel. Da die Function $\frac{1}{2}x$ sowohl als sin. ix eine impaare ist; so findet die Gleichung (6) nicht blos für die zwischen 0 und π, sondern auch für die zwischen $-\pi$ und 0 liegende Werthe von x statt.

2) Es sei $fx = \cos.x$, so ist:

$$\cos.x = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)\sin.2x + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\sin.4x + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\sin.6x + \text{ꝛc.}\right].$$

3) Endlich wollen wir annehmen, daß $fx = x$ sei, zwischen den Grenzen $0, \frac{1}{2}\pi$ und $= \pi - x$ zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}\pi, \pi$, so daß diese Function die Ordinate eines gleichschenkligen Dreieckes ausdrückt, dessen Grundlinie $= \pi$ und dessen Höhe $= \frac{1}{2}\pi$ ist; so hat man:

$$\int_{0}^{\pi}\sin.i\xi\cdot f\xi d\xi = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin.i\xi\cdot\xi d\xi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin.i\xi\cdot(\pi-\xi)d\xi,$$

und die Formel (5) gibt:

$$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin.x - \frac{1}{3^2}\sin.3x + \frac{1}{5^2}\sin.5x - \frac{1}{7^2}\sin.7x + \text{ꝛc.}\right).$$

§. 429. Wenn man a priori wüßte, daß eine Function fx zwischen den Grenzen $0, \pi$ durch eine convergirende Reihe von der Form $\Sigma A_i \sin.ix$ aus-

gedrückt werden kann; ſo laſſen ſich die Coefficienten A_i durch eine ſehr einfache Rechnung beſtimmen. Denn aus der hypothetiſchen Gleichung:

$$fx = A_1 \sin. x + A_2 \sin. 2x + \ldots + A_i \sin. ix + \text{ꝛc.}$$

ergibt ſich:

$$\sin. i\xi \cdot f\xi d\xi = A_1 \sin. i\xi \sin. \xi d\xi + A_2 \sin. i\xi \sin. 2\xi d\xi + \ldots$$
$$\ldots + A_i \sin.^2 i\xi d\xi + \text{ꝛc.}, \qquad (7)$$

und da dieſe Gleichung nach der Vorausſetzung für jeden zwiſchen $0, \pi$ liegenden Werth von ξ ſtattfindet, ſo erhält man, wenn man zwiſchen dieſen Grenzen integrirt:

$$\int_0^\pi \sin. i\xi \cdot f\xi d\xi = A_1 \int_0^\pi \sin. i\xi \sin. \xi d\xi + A_2 \int_0^\pi \sin. i\xi \sin. 2\xi d\xi + \ldots$$
$$\ldots + A_i \int_0^\pi \sin.^2 i\xi d\xi + \text{ꝛc.}$$

Andererſeits iſt:

$$\int \sin. i\xi \sin. i'\xi d\xi = \tfrac{1}{2} \int \cos.(i - i')\xi d\xi - \tfrac{1}{2} \int \cos.(i + i')\xi d\xi$$
$$= \frac{\sin.(i - i')\xi}{2(i - i')} - \frac{\sin.(i + i')\xi}{2(i + i')} + \text{const.},$$

welcher Ausdruck die Wahl der Grenzen $0, \pi$ unzuläſſig macht, ſo lange die ganzen Zahlen i, i' von einander verſchieden ſind. Für $i = i'$ erhält man (§. 402):

$$\int_0^\pi \sin.^2 i\xi d\xi = \frac{1}{2}\pi,$$

und folglich reducirt ſich der zweite Theil der Gleichung (7) auf das Glied A_i, woraus ſich alsdann ergibt:

$$A_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin. i\xi \cdot f\xi d\xi,$$

wie wir bereits durch eine complicirtere Rechnung gefunden haben. Allein, nach der richtigen Bemerkung Poiſſon's beruht die zuletzt angegebene Methode auf einer Vorausſetzung, welche des Beweiſes bedarf, und in der Annahme beſteht, daß jede beliebige Function in eine convergirende Reihe entwickelt werden kann, deren Glieder nach den Sinuſſen der ganzen Vielfachen der Veränderlichen fortſchreiten.

§. 430. Durch eine Vertauſchung der Veränderlichen können wir nun die Formel (a) ſo abändern, daß die transformirte Formel für die zwiſchen beliebigen andern Grenzen, als 0 und π liegende Werthe der Veränderlichen ſtattfindet. Setzen wir z. B. $\frac{\pi x'}{a}$ für x und $\frac{\pi \xi'}{a}$ für ξ; ſo erhalten wir:

$$f\left(\frac{\pi x'}{a}\right) = \frac{2}{a} \Sigma \cdot \sin. \frac{i\pi x'}{a} \int_0^a \sin. \frac{i\pi \xi'}{a} \cdot f\left(\frac{\pi \xi'}{a}\right) d\xi'.$$

Aber da nichts hindert, die Accente der Veränderlichen x', ξ' hinwegzulaſſen, und da das Zeichen f eine ganz willkürliche Function andeutet, ſo darf man fx ſtatt $f\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ ſetzen, und man hat folglich:

$$fx = \frac{2}{a} \Sigma \cdot \sin. \frac{i\pi x}{a} \int_0^a \sin. \frac{i\pi \xi}{a} \cdot f\xi d\xi, \qquad (b)$$

welche letzte Formel für alle zwiſchen 0 und a liegende Werthe ſtattfindet.

Wenn wir darin 2l für a, $x'+l$ für x und $\xi'+l$ für ξ ſetzen, ſo verwandelt ſie ſich in:

$$f(x'+l) = \frac{1}{l} \Sigma \cdot \sin. \frac{i\pi(x'+l)}{2l} \int_{-l}^{l} \sin. \frac{i\pi(\xi'+l)}{2l} \cdot f(\xi'+l) d\xi',$$

oder nach dem eben Geſagten in die einfachere Formel:

$$fx = \frac{1}{l} \Sigma \cdot \sin. \frac{i\pi(x+l)}{2l} \int_{-l}^{l} \sin. \frac{i\pi(\xi+l)}{2l} \cdot f\xi d\xi, \qquad (c)$$

welche für alle zwiſchen den Grenzen $-l$, $+l$ liegenden Werthe von x ſtattfindet.

Die Gleichung (b) kann man auf folgende Form bringen:

$$fx = \frac{2}{\pi} \Sigma \cdot \frac{\pi}{a} \sin. \frac{i\pi x}{a} \int_0^a \sin. \frac{i\pi \xi}{a} \cdot f\xi d\xi.$$

Nehmen wir nun an, daß a unendlich groß wird und ſetzen:

$$\frac{i\pi}{a} = \alpha, \quad \frac{\pi}{a} = d\alpha,$$

ſo iſt die Grenze, gegen welche die Reihe für immer größer werdende Werthe von a convergirt:

$$fx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin. \alpha x \sin. \alpha \xi \cdot f\xi d\xi d\alpha, \qquad (d)$$

ſo daß der Werth von fx innerhalb der Grenzen $0, \infty$ durch ein doppeltes beſtimmtes Integral ausgedrückt wird.

Dieſer Ausdruck würde jedoch in dem Falle illuſoriſch, wo das doppelte Integral, deſſen obere Grenzen unendlich ſind, vermöge der Natur der Function f keinen endlichen und beſtimmten Werth behielte (§. 324).

Wir wollen $fx = \frac{1}{x}$ ſetzen, ſo wird die Function f an der Grenze $x = 0$ unendlich; aber dennoch ergibt ſich aus der Formel (d):

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin. \alpha x \frac{\sin. \alpha \xi}{\xi} d\xi d\alpha = \int_0^\infty \sin. \alpha x d\alpha,$$

was mit dem im §. 325 erhaltenen Reſultate übereinſtimmt.

§. 431. Verfährt man auf dieſelbe Weiſe, wie in den vorhergehenden §§, ſo kann man darthun, daß jede Function, wofern ſie nur nicht zwiſchen den Grenzen $0, \pi$ der Veränderlichen x unendlich wird, innerhalb dieſer Grenzen in eine convergirende Reihe entwickelt werden kann, welche nach den Coſinuſſen der Vielfachen des Bogens x fortſchreitet, und man alſo folgende Formel hat:

$$fx = A_0 + A_1 \cos. x + A_2 \cos. 2x + \ldots + A_i \cos. ix + \text{ꝛc.},$$

deren Coefficienten durch die Gleichungen:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f\xi d\xi, \quad A_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos. i\xi \cdot f\xi d\xi,$$

gegeben werden, ſo daß man ſetzen kann:

$$fx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\xi d\xi + \frac{2}{\pi} \cdot \Sigma \cdot \cos. ix \int_0^{\pi} \cos. i\xi \cdot f\xi d\xi. \qquad (e)$$

Der Werth des zweiten Theiles dieſer Gleichung, welcher eine paare und periodiſche Function von x iſt, wird durch die Ordinate einer in Beziehung auf die Axe der y (Fig. 95) ſymmetriſchen Linie dargeſtellt, bei welcher den Abſciſſen $x = 0$, $x = \pi$ keine Unterbrechungspunkte entſprechen, ſo daß die Formel an dieſen Grenzen unverändert ſtattfindet.

Aus dieſer Formel ergibt ſich die folgende:

$$fx = \frac{1}{a}\int_0^{a} f\xi d\xi + \frac{2}{a}\Sigma \cdot \cos. \frac{i\pi x}{a} \int_0^{a} \cos. \frac{i\pi\xi}{a} \cdot f\xi d\xi, \qquad (f)$$

welche zwiſchen den Grenzen 0, a und an dieſen Grenzen ſelbſt ſtattfindet. Setzt man alsdann die obere Grenze $a = \infty$, ſo erhält man:

$$fx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \cos. \alpha x \cos. \alpha\xi \cdot f\xi d\xi d\alpha. \qquad (g)$$

Verfolgt man dieſelbe Analogie, ſo findet man auch die Formel:

$$fx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f\xi d\xi + \frac{1}{l}\Sigma \cdot \cos. \frac{i\pi(x+l)}{2l} \int_{-l}^{l} \cos. \frac{i\pi(\xi+l)}{2l} \cdot f\xi d\xi, \qquad (h)$$

welche zwiſchen den Grenzen $-l, +l$ und an dieſen Grenzen ſelbſt ſtattfindet.

§. 432. Um von dieſen letzten Formeln einige Anwendungen mitzutheilen, wollen wir ſucceſſive:

$$fx = \tfrac{1}{4}x, \quad fx = \sin. x, \quad fx = \tfrac{1}{4}\pi$$

ſetzen, ſo haben wir vermöge der Gleichung (e) zwiſchen den Grenzen $0, \pi$:

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\left[\cos. x + \frac{1}{3^2}\cos. 3x + \frac{1}{5^2}\cos. 5x + \text{ꝛc.}\right]$$

$$\sin. x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos. 2x}{1.3} + \frac{\cos. 4x}{3.5} + \frac{\cos. 6x}{5.7} + \text{ꝛc.}\right]$$

$$\tfrac{1}{4}\pi = \cos. x - \tfrac{1}{3}\cos. 3x + \tfrac{1}{5}\cos. 5x - \tfrac{1}{7}\cos. 7x + \text{ꝛc.}$$

In jeder dieſer letzten Formeln braucht man nur $x = 0$ oder $x = \pi$ zu ſetzen, um ebenſo viele merkwürdige Ausdrücke der transcendenten Zahl π zu erhalten, welche ſich ins Unendliche abändern laſſen.

Wenn wir die beiden Theile der letzten Gleichung mit dx multipliciren, zwiſchen den Grenzen 0, x integriren und durch $\frac{1}{2}\pi$ dividiren, ſo kommt:

$$\frac{1}{2}x = \frac{2}{\pi}\left[\sin. x - \frac{1}{3^2}\sin. 3x + \frac{1}{5^2}\sin. 5x - \frac{1}{7^2}\sin. 7x + \text{ꝛc.}\right]. \qquad (11)$$

Da die Reihe (g) convergent iſt, ſo iſt es die Reihe (11) um ſo mehr, und die Vergleichung dieſer beiden Formeln zeigt, daß dieſelbe Function mehrere convergente Reihenentwickelungen, welche nach den Sinuſſen der vielfachen Bogen fortſchreiten, haben kann, wodurch ſich die Reihen, von welchen in dem gegenwärtigen Kapitel die Rede iſt, von den Reihenentwickelungen nach den Potenzen der Veränderlichen, welche nach der Maclaurin'ſchen Formel nur auf eine einzige Weiſe möglich ſind, weſentlich unterſcheiden. Aus dieſer Bemerkung folgt auch, daß das Verfahren im §. 429 nicht alle möglichen Reihenentwickelungen der Function nach den Sinuſſen und Coſinuſſen der vielfachen Bogen gibt.

§. 433. Wenn man die correſpondirenden Theile der Gleichungen (a) und (e) zuſammenaddirt und von der Summe die Hälfte nimmt, ſo erhält man:

$$fx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f\xi d\xi +$$

$$\frac{1}{\pi}\Sigma[\sin. ix \int_0^{\pi} \sin. i\xi \cdot f\xi d\xi + \cos. ix \int_0^{\pi} \cos. i\xi \cdot f\xi d\xi]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f\xi d\xi + \frac{1}{\pi}\Sigma \cdot \int_0^{\pi} \cos. i(x-\xi) \cdot f\xi d\xi. \qquad (i)$$

Der geometriſche Ort der Gleichung:

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f\xi d\xi + \frac{1}{\pi}\Sigma \cdot \int_0^{\pi} \cos. i(x-\xi) \cdot f\xi d\xi$$

beſteht: 1) aus einem Syſteme einzelner Bogen $M_{,,} N_{,,}$, $MN, M'' N'', \ldots$ (Fig. 96) und 2) aus Theilen der Abſciſſenaxe, welche zwiſchen den Ordinaten der Unterbrechungspunkte dieſer Bogen liegen. Hieraus folgt, daß die Formel (i) nur an den Grenzen 0 und π ſtattfindet, wenn $0 = f(0) = f(\pi)$ iſt. Im entgegengeſetzten Falle gibt die Reihe $\frac{1}{2} f(0)$ für $x = 0$ und $\frac{1}{2} f(\pi)$ für $x = \pi$. Wenn man die Formeln (b) und (f), (d) und (g), (c) und (h) auf dieſelbe Weiſe verbindet, ſo findet man:

$$fx = \frac{1}{2a}\int_0^{a} f\xi d\xi + \frac{1}{a}\Sigma \cdot \int_0^{a} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot f\xi d\xi, \qquad (k)$$

$$fx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \cos. \alpha(x-\xi) \cdot f\xi d\xi d\alpha,$$

$$fx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f\xi d\xi + \frac{1}{2l}\Sigma \cdot \int_{-l}^{l} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{2l} \cdot f\xi d\xi. \qquad (l)$$

§. 434. Alle dieſe Formeln ſind noch vieler Transformationen fähig; allein wir wollen nur noch eine derſelben angeben.

Es ſei fx eine Function, welche von 0 bis a den Werth φx und von 0 bis $-a$ den Werth ψx hat, ſo reducirt ſich die Function:

$$\frac{1}{2a}\int_0^{a} \varphi\xi d\xi + \frac{1}{a}\Sigma \cdot \int_0^{a} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot \varphi\xi d\xi$$

nach der Formel (k) für die zwiſchen 0 und a liegende Werthe von x auf φx und für die zwiſchen 0 und $-a$ liegende Werthe von x auf Null. Eben ſo reducirt ſich die Function:

$$-\frac{1}{2a}\int_0^{-a} \psi\xi d\xi - \frac{1}{a}\Sigma \cdot \int_0^{-a} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot \psi\xi d\xi$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{0} \psi\xi d\xi + \frac{1}{a}\Sigma \cdot \int_{-a}^{0} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot \psi\xi d\xi$$

für die zwiſchen 0 und $-a$ liegenden Werthe von x auf ψx und für die zwiſchen 0 und a liegenden Werthe von x auf Null. Folglich reducirt ſich die Function:

$$\frac{1}{2a}\Big[\int_0^{a} \varphi\xi d\xi + \int_{-a}^{0} \psi\xi d\xi\Big]$$

$$+ \frac{1}{a}\Sigma\Big[\int_0^{a} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot \varphi\xi d\xi + \int_{-a}^{0} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot \psi\xi d\xi\Big]$$

für die zwiſchen $-a$ und 0 liegenden Werthe von x auf ψx, und für die zwiſchen 0 und a liegenden Werthe von x auf φx, d. h. die Formel:

$$fx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f\xi d\xi + \frac{1}{a}\Sigma \cdot \int_{-a}^{a} \cos.\frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot f\xi d\xi \qquad (m)$$

findet für alle zwiſchen $-a$ und $+a$ liegenden Werthe von x ſtatt. Man könnte a in 1 verwandeln und man erhielte eine von der Gleichung (l) verſchiedene, obgleich beide für die zwiſchen denſelben Grenzen liegenden Werthe von x ſtattfinden.

§. 435. Durch ein ähnliches Verfahren, wie das im §. 430 ergibt ſich aus der Gleichung (m), wenn man darin $a = \infty$ ſetzt:

$$fx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos.\alpha(x-\xi) \cdot f\xi d\xi d\alpha, \qquad (n)$$

und dieſe letzte Formel findet für alle reellen Werthe von x ſtatt, weil das Integral in Beziehung auf ξ zwiſchen $-\infty$ und $+\infty$ genommen wird, und man nennt ſie die Fourier'ſche Formel, weil der berühmte Geometer Fourier die Analyſis durch dieſe Formel bereichert hat. Der Beweis dieſer Formel ergibt ſich aus dem Vorhergehenden; aber wegen ihrer Wichtigkeit wollen wir noch einen andern einfachern und directern Beweis mittheilen, welcher von Deflers herrühret.

Es ſei:

$$y = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos.\alpha(x-\xi) \cdot f\xi d\xi d\alpha,$$

und wir wollen zuvörderſt das Integral in Beziehung auf α zwiſchen den Grenzen $0, \alpha$ nehmen, ſo kommt, unter dem Vorbehalte, daß nach der zweiten Integration $\alpha = \infty$ geſetzt wird:

$$y = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin.\alpha(x-\xi)}{x-\xi} \cdot f\xi d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin. z}{z} \cdot f\left(x - \frac{z}{\alpha}\right) dz,$$

wenn $\xi = x - \frac{z}{\alpha}$ geſetzt wird.

Setzt man nun $\alpha = \infty$, ſo hat man:

$$f\left(x - \frac{z}{\alpha}\right) = fx,$$

ausgenommen für die Werthe von z, welche ſelbſt unendlich ſind, und welche unberückſichtigt bleiben können, weil der Factor $\frac{\sin. z}{z}$ den correſpondirenden Theil des Integrales unendlich klein macht. Man hat alſo einfach:

$$y = \frac{1}{\pi} fx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin. z}{z} dz = fx.$$

Wenn die Function f ſo beſchaffen iſt, daß ſich die in der Formel (n) angezeigte Integration in Beziehung auf die Veränderliche ξ verrichten läßt, ſo beſtimmt dieſe Formel die Werthe der einfachen beſtimmten Integrale, wie die Formeln in den beiden letzten Kapiteln. Geſetzt z. B., fx müßte ſich zwiſchen den Grenzen $0, \infty$ auf e^{-x} reduciren, ſo hat man nach §. 407:

$$\int_0^\infty \cos.\alpha\xi \cdot e^{-\xi} d\xi = \frac{1}{1+\alpha^2},$$

und folglich gibt die Formel (n) für alle positiven Werthe von x:

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos.\alpha x d\alpha}{1+\alpha^2},$$

was mit der Formel (m) im §. 411 übereinstimmt.

§. 436. Alle in diesem Kapitel abgeleiteten Formeln lassen sich verallgemeinern und auf Functionen von einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen ausdehnen. Setzt man z. B. $f(x,y)$ statt fx, so ergibt sich aus der Fourierschen Formel:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cos.\alpha(x-\xi) \cdot f(\xi,y) d\xi d\alpha$$

und aus demselben Grunde ist:

$$f(\xi,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cos.\beta(y-\eta) \cdot f(\xi,\eta) d\eta d\beta,$$

wo β, η zwei neue Hülfsveränderliche bezeichnen. Man hat also die Formel:

$$f(x,y) =$$

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \cos.\alpha(x-\xi) \cdot \cos.\beta(y-\eta) \cdot f(\xi,\eta) d\xi d\eta d\alpha d\beta,$$

welche für alle reellen Werthe der Veränderlichen x,y stattfindet. Wenn die Integrationsgrenzen in Beziehung auf die Veränderlichen ξ, η durch den Umriß einer in der Ebene der xy beschriebenen Curve gegeben sind, so reducirt sich das vierfache Integral für die innerhalb des von dieser Curve eingeschlossenen Raumes liegenden Punkte auf $f(x,y)$ und für alle außerhalb dieses Raumes liegende Punkte auf Null. Eben so reducirt sich das sechsfache Integral:

$$\frac{1}{\pi^3}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \iiint \cos.\alpha(x-\xi) \cdot \cos.\beta(y-\eta) \cdot \cos.\gamma(z-\zeta) \cdot f(\xi,\eta,\zeta) d\xi d\eta d\zeta d\alpha d\beta d\gamma$$

für welches die Grenzen der Integrationen in Beziehung auf die Veränderlichen ξ, η, ζ dieselben sind, als die des Volumens eines gegebenen Körpers, für alle innerhalb dieses Körpers liegende Punkte auf $f(x,y,z)$ und für alle außerhalb dieses Körpers liegende Punkte auf Null.

Sechstes Buch.

Integration der Differenzialgleichungen mit einer einzigen unabhängigen veränderlichen Größe.

Erstes Kapitel.

Von der Integration der Differenzialgleichungen mit zwei Veränderlichen und von der ersten Ordnung.

§. 437. Man kann das Problem der Integration der Differenzialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen aus zwei verschiedenen Gesichtspunkten betrachten. Aus dem ersten Gesichtspunkte betrachtet, kommt es darauf an, zwischen der unabhängigen Veränderlichen und der Function eine Gleichung zu finden, welche der gegebenen Differenzialgleichung vermittelst der Werthe, welche man daraus für die Differenzialcoefficienten der verschiedenen Ordnungen ableitet, auf die allgemeinste Weise Genüge leistet, oder mit andern Worten, es kommt darauf an, die allgemeinste Gleichung der Curven zu finden, welche in allen ihren Punkten die Eigenschaft haben, welche durch die gegebene Differenzialgleichung ausgedrückt wird.

Aus dem zweiten Gesichtspunkte betrachtet, besteht das Problem der Integration in der Bestimmung der Reihe von Zahlenwerthen, welche eine Function, von einem bestimmten Zahlenwerthe ausgehend, durchlaufen muß, wenn das Gesetz der unendlich kleinen Veränderungen der Function durch eine gegebene Differenzialgleichung ausgedrückt wird. Wir werden sehen, daß Fälle vorkommen, wo sich das Problem der Integration der Differenzialgleichungen nicht auf dieselbe Weise lösen läßt, wenn man es aus dem einen oder aus dem andern der eben erwähnten Gesichtspunkte betrachtet.

Im Vorhergehenden (Buch 3. Kap. 5) haben wir den Zusammenhang nachgewiesen, welcher zwischen einer Differenzialgleichung von beliebiger Ordnung und den Integralen oder ursprünglichen Gleichungen der verschiedenen Ordnungen, aus denen man sich die gegebene Differenzialgleichung durch unmittelbare Differenziation oder durch Differenziation, verbunden mit der Elimination der Constanten, abgeleitet, vorstellen kann, stattfindet, und indem wir uns auf die an dem angeführten Orte aufgestellten Sätze beziehen, machen wir mit der Untersuchung der Hauptfälle, worin man das Integral, woraus eine gegebene Differenzialgleichung abgeleitet ist, wiederfinden kann, den Anfang, worauf wir die Theorie der Differenzialgleichungen, aus dem zweiten Gesichtspunkte betrachtet, untersuchen wollen.

I. Trennung der Veränderlichen.

§. 438. Die allgemeine Form der Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen ist:

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1)$$

Wenn diese Gleichung algebraisch und in Beziehung auf y' vom ersten Grade ist, so kann man sie auf folgende Form bringen:

$$\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy = 0. \qquad (2)$$

Die Gleichung (2) läßt sich immer integriren, oder wenigstens kann die Integration auf einfache Quadraturen zurückgeführt werden, wenn die Veränderlichen **getrennt** sind, d. h. wenn diese Gleichung auf die Form:

$$fxdx + fydy = 0$$

gebracht ist. Das allgemeine Integral derselben ist alsdann:

$$\int fxdx + \int fydy = C,$$

wo C eine willkürliche Constante bezeichnet, oder wenn man zu den bestimmten Integralen übergeht, und den x_0 entsprechenden Werth von y mit y_0 bezeichnet:

$$\int_{x_0}^{x} fxdx + \int_{y_0}^{y} fydy = 0.$$

Es sei z. B. die Differenzialgleichung:

$$ydx - xdy = 0 \qquad (a)$$

gegeben, so bringt man sie auf die Form:

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0,$$

wo die Veränderlichen schon getrennt sind, und wenn man integrirt, so erhält man:

$$\log. y - \log. x = C, \text{ folglich } y = cx,$$

wo c die Zahl bezeichnet, deren Logarithmus C ist.

Die Trennung der Veränderlichen läßt sich unmittelbar jedesmal bewerkstelligen, wenn die Gleichung (1) unter der Form:

$$y' = fx \cdot fy, \quad \text{folglich: } \frac{dy}{fy} = fxdx$$

erscheint.

§. 439. In andern Fällen läßt sich die Trennung der Veränderlichen nur durch eine Transformation oder durch eine Vertauschung der Veränderlichen bewerkstelligen. Wenn z. B. die in der Gleichung (2) vorkommenden Functionen φ, ψ in Beziehung auf die Veränderlichen x, y, homogen sind (§. 122), so setze man $y = xt$, folglich:

$$\varphi(x,y) = x^n ft, \quad \psi(x,y) = x^n f't,$$

wo n die Summe der Exponenten von x und von y in jedem Gliede der gegebenen Gleichung bezeichnet. Diese Gleichung (2) verwandelt sich also nach der Hinweglassung des Factors x^n in:

$$ft \cdot dx + f't \cdot (xdt + tdx) = 0,$$

woraus sich die Gleichung:

$$\frac{dx}{x} + \frac{ft \cdot dt}{ft + tft} = 0$$

ergibt, in welcher die Veränderlichen getrennt sind.

Auf diese Weise verwandelt sich z. B. die Gleichung:

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx$$

in:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 0,$$

woraus folgt, wenn man durch Logarithmen integrirt, und dann wieder von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht:

$$c = \frac{x}{t + \sqrt{1+t^2}} = \frac{x^2}{y + \sqrt{x^2+y^2}} = -y + \sqrt{x^2+y^2},$$

$$x^2 - 2cy - c^2 = 0.$$

In der That erhält man die gegebene Differenzialgleichung wieder, wenn man die letzte Gleichung differenzirt, und zwischen der ursprünglichen Gleichung und ihrem unmittelbaren Differenziale die Constante c eliminirt (§. 162).

In gewissen Fällen kann man eine Gleichung, welche nicht homogen ist, durch eine Vertauschung der Veränderlichen oder der Coordinaten homogen machen, und das einfachste Beispiel einer solchen Transformation bietet uns die Gleichung:

$$(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0$$

dar. Setzt man: $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, d. h. verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten x, y, ohne die Richtung der Axen zu verändern, und nimmt die willkürlichen Constanten α, β so an, daß die Bedingungsgleichungen:

$$a\alpha + b\beta + c = 0, \quad a'\alpha + b'\beta + c' = 0$$

erfüllt werden, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in:

$$(a\xi + b\eta)d\xi + (a'\xi + b'\eta)d\eta = 0$$

und ist homogen gemacht. Die vorhergehende Transformation würde nicht mehr möglich sein, wenn $ab' - ba' = 0$ wäre, weil alsdann die Werthe von α, β unendlich würden, allein in diesem Falle wird die gegebene Gleichung durch die Elimination von b' auf folgende Form gebracht:

$$(ax + by)\left(dx + \frac{a'}{a}dy\right) + cdx + c'dy = 0,$$

und wenn man $ax + by = t$ setzt, so erhält man eine Gleichung mit t, dt, dx, worin sich die Veränderlichen leicht trennen lassen, wie in allen den Gleichungen, wo von der einen Veränderlichen nur das Differenzial vorkommt.

II. Lineare Differenzialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 440. In der Gleichung:

$$y' + yfx = fx, \tag{3}$$

welche eine lineare Differenzialgleichung der ersten Ordnung genannt wird, weil sie weder Potenzen, noch Producte der Function y und ihrer Ableitung y' enthält, wird die Trennung der Veränderlichen durch eine sehr einfache Transformation bewirkt. Es sei:

$$y = \theta t, \quad dy = \theta dt + t d\theta,$$

wo θ und t zwei unbekannte Hülfsfunctionen von x bezeichnen, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in:

$$\theta dt + t d\theta + \theta t \cdot fx dx = f x dx.$$

Die unbestimmten Functionen t und θ kann man so annehmen, daß die vorhergehende Gleichung in die beiden folgenden zerfällt:

$$\theta dt = f x dx, \quad d\theta + \theta \cdot fx dx = 0,$$

wovon die zweite die Trennung der Veränderlichen gestattet und gibt:

$$\theta = e^{-\int fx dx}.$$

Substituirt man diesen Werth in die erste, so erhält man:

$$dt = f x dx \cdot e^{\int fx dx}, \quad t = \int f x dx \cdot e^{\int fx dx} + C,$$

folglich:

$$y = [\int f x dx \cdot e^{\int fx dx} + C] \cdot e^{-\int fx dx}.$$

Beispiele: 1) Es sei:

$$y' + y = -x,$$

so kommt:

$$\int fx dx = x, \quad \int f x dx \cdot e^x = -\int e^x x dx = (1 - x) e^x + C,$$

$$y = 1 - x + Ce^{-x}$$

2) Es sei:

$$y' + y = -x^3,$$

so hat man:

$$\int fx dx = x, \quad \int f x dx \cdot e^x = -e^x [x^3 - 3x^2 + 6(x - 1)] + C,$$

$$y = -[x^3 - 3x^2 + 6(x - 1)] + Ce^{-x}. \tag{4}$$

3) Es sei:

$$y' + \frac{y}{x} = -x,$$

so verschwinden in diesem Falle die Exponentialgrößen, weil

$$\int fx dx = \int \frac{dx}{x} = \log. x, \quad e^{\int fx dx} = e^{\log. x} = x$$

ist, woraus sich leicht ergibt:

$$y = \frac{C}{x} - \frac{1}{3} x^2.$$

Ebenso integrirt man die Gleichung:

$$y^{m-1} y' + y^m fx = fx,$$

denn man braucht nur $y^m = u$ zu setzen, um sie auf die Form der Gleichung (3) zurückzuführen.

Wenn endlich die Differenzialgleichung:

$$y' + yfx = y^n fx \tag{5}$$

gegeben wäre, so könnte man sie ebenfalls auf die Form (3) zurückführen, wenn man $y^{n-1} = \frac{1}{u}$ setzte. Die Gleichung (5) ist unter dem Namen der Bernoulli'schen Gleichung bekannt.

§. 441. Wenn man eine Differenzialgleichung integrirt, indem man mit der Trennung der Veränderlichen beginnt, ſo kann das Integral unter einer unzweckmäßigen und complicirten Form erſcheinen und es kann z. B. eine transcendente Form haben, obgleich die gegebene Gleichung ein algebraiſches Integral geſtattet, wie wir dieſes im §. 438 bei der ſehr einfachen Gleichung $ydx - xdy = 0$ geſehen haben, deren Integration durch die Trennung der Veränderlichen auf das transcendente Zeichen log. führt, welches man alsdann nach den bekannten Eigenſchaften der logarithmiſchen Functionen fortſchaffen kann. Wir wollen z. B. die Differenzialgleichung:

$$\sqrt{1-y^2} \cdot dx + \sqrt{1-x^2} \cdot dy = 0 \qquad (6)$$

betrachten, welche ſich durch die Trennung der Veränderlichen in:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

verwandelt und alsdann auf das Integral:

$$\text{arc. sin. } x + \text{arc. sin. } y = k \qquad (7)$$

von einer transcendenten Form führt, indem k die willkürliche Conſtante bezeichnet. Aber wenn man jedes Glied der Gleichung (6) theilweiſe integrirt und durch μ eine andere willkürliche Conſtante bezeichnet, ſo erhält man:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \int \frac{xydy}{\sqrt{1-y^2}} + \int \frac{xydx}{\sqrt{1-x^2}} = \mu.$$

Die beiden Glieder dieſer Gleichung mit dem Integralzeichen $\int$ laſſen ſich in ein einziges:

$$\int xy \left[\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

zuſammenfaſſen, wofern man y als eine durch die Gleichung (6) beſtimmte unentwickelte Function von x betrachtet. Nun iſt aber vermöge derſelben Gleichung (6) der Factor, womit xy unter dem Zeichen $\int$ multiplicirt iſt, beſtändig $= 0$, und folglich iſt:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \mu, \qquad (8)$$

oder wenn man die Wurzelgrößen wegſchafft:

$$(x^2 - y^2 - \mu^2)^2 = 4\mu^2 y^2 (1 - x^2),$$

das algebraiſche Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Der Werth der Conſtante μ in der Gleichung (8) iſt der Werth, welchen die Veränderliche y für $x = 0$ annimmt, und wenn man in der Gleichung (7) zu gleicher Zeit $x = 0$, $y = \mu$ ſetzt, ſo verwandelt ſie ſich in:

$$\text{arc. sin. } \mu = k,$$

wodurch dieſe Gleichung auf die Form:

$$\text{arc. sin. } x + \text{arc. sin. } y = \text{arc. sin. } \mu \qquad (9)$$

gebracht wird. Die beiden Gleichungen (8) und (9), welche reſp. unter algebraiſcher und transcendenter Form die vollſtändigen Integrale der gegebenen Differenzialgleichung ſind, müſſen identiſch ſein, und in der That ergibt ſich die Identität dieſer beiden Gleichungen aus der Formel:

$$\text{sin. a cos. b} + \text{sin. b cos. a} = \text{sin. (a + b)}.$$

Wenn dieſe Relation nicht aus der Elementartrigonometrie bekannt wäre, ſo ergäbe ſie ſich aus der Vergleichung der Formeln (8) und (9), und man

könnte auf dieſe Weiſe eine Fundamentaleigenſchaft der transcendenten Function arc. sin. x oder des beſtimmten Integrales:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

darthun. Durch ein ganz ähnliches Verfahren haben wir im Kap. 4 des vorhergehenden Buches die Formeln für die Addition der elliptiſchen Functionen aufgeſtellt.

III. Von dem integrirenden Factor.

§. 442. Wenn der erſte Theil der Gleichung (2) ein genaues Differenzial $d \cdot \omega(x,y)$ iſt, ſo findet man die Function ω durch die im §. 394 angegebene Rechnung, und das Integral erſcheint unter der Form $\omega(x,y) = c$, wo c eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Umgekehrt, wenn man, nachdem das Integral der Gleichung (2) durch irgend ein Mittel erhalten iſt, daſſelbe auf die Form $\omega(x,y) = c$ bringt und die erhaltene Gleichung in Beziehung auf die durch die Integration eingeführte willkürliche Conſtante auflöſ't, ſo erhält man durch Differenziation die Gleichung:

$$\frac{d\omega}{dx}dx + \frac{d\omega}{dy}dy = 0,$$

deren erſter Theil nothwendig ein genaues Differenzial iſt, und welche mit der Gleichung (2) zu gleicher Zeit ſtattfinden muß. Man hat alſo:

$$\frac{\frac{d\omega}{dx}}{\varphi(x,y)} = \frac{\frac{d\omega}{dy}}{\psi(x,y)} = \mu,$$

wo μ im Allgemeinen eine Function von x und y bezeichnet. Wenn man folglich den erſten Theil der Gleichung (2) durch den Factor μ multiplicirt, ſo wird derſelbe mit dem Totaldifferenziale $d\omega$ identiſch und leiſtet der Bedingung der Integrabilität Genüge.

So leiſtet z. B. der erſte Theil der Gleichung (a) der Bedingung der Integrabilität kein Genüge, aber da wir im §. 438 für das Integral dieſer Gleichung $\frac{y}{x} = c$ gefunden haben, woraus folgt:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0,$$

ſo ſieht man, daß der Factor $\frac{1}{x^2}$ den erſten Theil der gegebenen Gleichung zu einem genauen Differenziale macht. Desgleichen, da das Integral der Gleichung:

$$(y + \sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0$$

nach §. 439 auf die Form:

$$-y + \sqrt{x^2+y^2} = c$$

gebracht werden kann, woraus folgt:

$$\frac{xdx + (y - \sqrt{x^2+y^2}dy)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

ſo ergibt ſich, daß:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(y+\sqrt{x^2+y^2})} = -\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

der Factor ist, durch welchen man die gegebene Gleichung multipliciren muß, um den ersten Theil derselben zu einem genauen Differenziale zu machen.

§. 443. Es ist zu bemerken, daß man, wenn man einen Werth des Factors μ kennt, daraus unendlich viele andere ableiten kann; denn da:

$$\mu[\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy] = d\omega$$

ist; so hat man:

$$\mu f(\omega)[\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy] = f(\omega)d\omega, \qquad (10)$$

wo $f(\omega)$ eine beliebige Function der Größe ω, deren Bildung aus x,y bekannt ist, bezeichnet. Nun ist aber der Ausdruck $f(\omega)d\omega$ nothwendig ein genaues Differenzial, und die Bestimmung der Function, woraus dasselbe entstanden ist, hängt von einer einfachen Quadratur ab. Folglich ist der erste Theil der Gleichung (10) ebenfalls ein genaues Differenzial. Mit andern Worten, der Factor $\mu f(\omega)$, worin die Functionen μ, ω bekannt sind, und die Function f auf unendlich viele verschiedene Arten particularisirt werden kann, hat, wie der Factor μ, die Eigenschaft, den ersten Theil der Gleichung (2) zu einem genauen Differenziale zu machen.

Nehmen wir z. B. die Gleichung (a), und setzen blos $f(\omega)=\omega$, so haben wir in diesem Falle:

$$\mu = \frac{1}{x^2}, \quad \omega = \frac{y}{x}, \quad \text{folglich } \mu f(\omega) = \frac{y}{x^3}.$$

Dieser letzte Factor macht folglich den ersten Theil der gegebenen Gleichung zu einem genauen Differenziale, und in der That hat man:

$$\frac{y}{x^3}(xdy-ydx) = \frac{x^2ydy-y^2xdx}{x^4} = \frac{1}{2}d\cdot\left(\frac{y^2}{x^2}\right).$$

§. 444. Um den Factor μ a priori zu bestimmen, müßte man der Gleichung:

$$\frac{d\cdot\mu\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\cdot\mu\psi(x,y)}{dx},$$

oder:

$$\varphi\frac{d\mu}{dy}-\psi\frac{d\mu}{dx}+\mu\left(\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\psi}{dx}\right)=0$$

Genüge leisten; allein die Integration dieser Gleichung, welche in Beziehung auf die Function μ der beiden Veränderlichen x,y eine partielle Differenzialgleichung ist, setzt, wie wir in der Folge sehen werden, im Allgemeinen die Integration der Gleichung (2) als bekannt voraus, und nur in ganz speciellen Fällen kann man den Factor μ angeben, und folglich die Integration der gegebenen Gleichung auf die Quadraturen zurückführen.

Wenn z. B. der Factor μ nur die Veränderliche x enthalten müßte, so reducirte sich die vorhergehende Gleichung auf:

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{\psi}\left(\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\psi}{dx}\right),$$

und der zweite Theil dieser letzten Gleichung müßte sich nach der Voraussetzung auf eine Function fx der einen Veränderlichen x reduciren. Man hätte

also $\mu = e^{\int f x dx}$. Ueberdies würde die Allgemeinheit der Voraussetzung nicht beeinträchtigt, wenn man $\psi = 1$ setzte, weil man immer annehmen kann, daß die Gleichung (2) durch den Coefficienten von dy dividirt ist, und alsdann muß der Coefficient $\frac{d\varphi}{dy}$ unabhängig sein von y, oder es muß

$$\varphi(x,y) = y f x + fx$$

sein, d. h. in diesem Falle erscheint die gegebene Gleichung unter der Form einer linearen Differenzialgleichung der ersten Ordnung.

§. 445. Wenn die Gleichung (2) homogen ist, so kann sie auf folgende Form gebracht werden:

$$x^n f\left(\frac{y}{x}\right) dx + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0, \qquad (11)$$

und sie verwandelt sich alsdann nach §. 439 in die Gleichung:

$$\frac{dx}{x} + \frac{f\left(\frac{y}{x}\right) d \cdot \frac{y}{x}}{f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)} = 0, \qquad (12)$$

worin die Veränderlichen getrennt sind, und welche folglich ein genaues Differenzial ist. Der Factor, durch welchen die Gleichung (11) hat multiplicirt werden müssen, um die Gleichung (12) zu erhalten, ist:

$$\mu = \frac{1}{x^{n+1}\left[f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)\right]} = \frac{1}{x\varphi(x,y) + y\psi(x,y)}.$$

Wird die Bedingung der Integrabilität auf die Function:

$$\frac{\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy}{x\varphi(x,y) + y\psi(x,y)},$$

welche ein genaues Differenzial sein muß, wenn die Functionen φ, ψ homogen und von demselben Grade sind, angewandt, so ergibt sich:

$$\frac{x\frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dx} + y\frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy}}{\varphi(x,y)} = \frac{x\frac{d \cdot \psi(x,y)}{dx} + y\frac{d \cdot \psi(x,y)}{dy}}{\psi(x,y)}.$$

Folglich hat jeder Theil dieser letzten Gleichung einen von der Form der Functionen φ, ψ unabhängigen Werth, und wenn man $\psi(x,y) = x^n$ setzt, so erhält man nach dem Lehrsatze über die homogenen Functionen (§. 122):

$$x\frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dx} + y\frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy} = n\varphi(x,y).$$

IV. Ueber die lineare Differenzialgleichungen von einer höhern als von der ersten Ordnung.

§. 446. Wenn die Gleichung (1) die Ableitung y' zum Quadrate oder zu höhern Potenzen erhoben erhält, so ergeben sich daraus durch algebraische Auflösung eben so viele andere Gleichungen:

$$y' - f_1(x,y) = 0, \quad y' - f_2(x,y) = 0, \text{ ꝛc.}$$

als der Grad der gegebenen Gleichung in Beziehung auf y' Einheiten hat. Diese Gleichungen integrirt man einzeln, wenn es möglich ist, so leistet jedes durch eine willkürliche Constante ergänzte Integral der gegebenen Gleichung Genüge, und folglich leistet das Product aller dieser Integrale der gegebenen Differenzialgleichung auf die allgemeinste Weise Genüge, oder mit andern Worten, dieses Product ist das allgemeine Integral derselben. Man könnte die willkürlichen Constanten, welche in den einzelnen Factoren vorkommen, durch verschiedene Buchstaben bezeichnen; allein die Allgemeinheit des Integrales wird nicht beeinträchtigt, wenn man alle diese willkürlichen Constanten durch denselben Buchstaben bezeichnet, weil man offenbar, wenn man diesem einen Buchstaben alle möglichen Zahlenwerthe beilegt, alle particulären Integrale erhält, welche jeder Factor des allgemeinen Integrales zu liefern im Stande ist.

So gibt z. B. die Auflösung der Gleichung:

$$y'^2 - ax = 0$$

die Gleichungen:

$$y' - \sqrt{ax} = 0, \quad y' + \sqrt{ax} = 0,$$

deren Integrale:

$$c + y - \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3} = 0, \quad c_1 + y + \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3} = 0$$

sind, und wenn man das Product derselben bildet, so erhält man zum allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichung:

$$(c + y - \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3})(c_1 + y + \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3}) = 0,$$

dessen Allgemeinheit nicht vermindert wird, wenn man $c_1 = c$ setzt, wodurch es die rationale Form:

$$(c + y)^2 - \tfrac{4}{9}ax^3 = 0$$

annimmt.

Aus der Theorie der Zusammensetzung der algebraischen Gleichung ist einleuchtend, daß das allgemeine Integral in allen Fällen in Beziehung auf x, y rational sein wird, wenn man die in den einzelnen irrationalen Factoren vorkommenden willkürlichen Constanten identificirt, und wenn die gegebene Differenzialgleichung selbst in Beziehung auf x, y, y' rational ist.

§. 447. In gewissen Fällen kann man die Auflösung der gegebenen Differenzialgleichung in Beziehung auf y' auch umgehen. Wenn z. B. die Veränderliche y nicht darin vorkommt und sie sich auf die Form $x = fy'$ bringen läßt, so erhält man, wenn man die Regel der theilweisen Integration auf die Function $dy = y'dx$ anwendet:

$$y = y'x - \int x dy' + C = y'fy' - \int fy' dy' + C.$$

Wenn sich die im letzten Theile dieser Gleichung angedeutete Quadratur algebraisch verrichten läßt, so hat man blos noch y' zwischen dieser Gleichung und der gegebenen zu eliminiren, um das durch die willkürliche Constante C vervollständigte Integral zu erhalten. Auf eine ähnliche Weise würde man die Gleichung $y = fy'$ behandeln, nachdem man $y' = \frac{1}{x'}$ gesetzt, d. h. nachdem man y zur unabhängigen Veränderlichen genommen hat.

§. 448. Wenn die gegebene Differenzialgleichung von der Form $y = f(x, y')$ ist, so ergibt sich daraus:

$$y' = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx}.$$

Dieſe letzte Gleichung iſt in Beziehung auf die Veränderlichen x, y' von der erſten Ordnung, und wenn man annimmt, daß ſie in die Categorie der Differenzialgleichungen gehört, welche man integriren kann, ſo braucht man nur y' zwiſchen dem erhaltenen Integrale und der gegebenen Gleichung zu eliminiren, um das Integral der gegebenen Gleichung ſelbſt zu erhalten.

Wenn die gegebene Gleichung z. B. von der Form iſt:

$$y = x\varphi y' + \psi y',$$

ſo hat man:

$$y' = \varphi y' + (\psi' y' + x\varphi' y') \frac{dy'}{dx}, \text{ oder } \frac{dx}{dy'} - x \frac{\varphi' y'}{y' - \varphi y'} = \frac{\psi' y'}{y' - \varphi y'},$$

und folglich (§. 440):

$$x = \left[\int \frac{\psi' y' dy'}{y' - \varphi y'} \cdot e^{-\int \frac{\varphi' y' dy'}{y' - \varphi y'}} + C \right] \cdot e^{\int \frac{\varphi' y' dy'}{y' - \varphi y'}}.$$

Insbeſondere iſt die Gleichung:

$$y = xy' + \psi y' \tag{13}$$

zu bemerken, woraus ſich durch Differenziation ergibt:

$$0 = (\psi' y' + x) \frac{dy'}{dx}. \tag{14}$$

Der Gleichung (14) wird genügt, wenn man:

$$\frac{dy'}{dx} = 0, \quad \text{folglich } y' = c$$

ſetzt, und die Subſtitution dieſes Werthes von y' in die Gleichung (13) gibt zum allgemeinen Integrale:

$$y = cx + \psi c, \tag{15}$$

d. h. die Gleichung einer geraden Linie, welche ſich auf der Ebene der xy verrückt, wenn man die willkürliche Conſtante c variiren läßt.

Der Gleichung (14) wird auch Genüge geleiſtet, wenn man

$$\psi' y' + x = 0 \tag{16}$$

ſetzt, und wenn man y' zwiſchen den Gleichungen (13) und (16) eliminirt, ſo erhält man eine Gleichung zwiſchen x und y, welche der Gleichung (13) genügt, aber nicht das allgemeine Integral derſelben iſt, weil ſie keine willkürliche Conſtante erhält, und welche auch keine particuläres Integral mehr iſt, weil ſich aus der Gleichung (16) ein durch x ausgedrückten Werth von y' ergibt, welcher mit den aus dem allgemeinen Integrale abgeleiteten Werthen $y' = c$ unverträglich iſt. Dieſe reſultirende Gleichung zwiſchen x, y iſt folglich ein ſinguläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung (§. 164).

Es iſt zu bemerken, daß die Elimination c zwiſchen der Gleichung (15) und ihrer Ableitung in Beziehung auf c:

$$\psi' c + x = 0$$

dieſelbe Endgleichung zwiſchen x und y gibt, als die Elimination von y' zwiſchen den Gleichungen (13) und (16), was auch der Fall ſein muß, weil das ſinguläre Integral nach §. 189 die Curve ausdrückt, welche alle die ge-

raden Linien umſchließt, die man erhält, wenn man in der Gleichung (15) den Parameter c ſich ſtetig ändern läßt.

Zweites Kapitel.

Ueber die Integration der Differenzialgleichungen der höhern Ordnungen, und insbeſondere über die Integration der linearen Differenzialgleichungen.

I. Von der Erniedrigung der Ordnung der Differenzialgleichungen.

§. 449. Die Integration der Differenzialgleichungen einer beliebigen Ordnung von der Form:

$$y^{(n+1)} = fy^{(n)}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy^{(n)}}{dx} = fy^{(n)}, \tag{1}$$

läßt ſich immer auf die Quadraturen zurückführen; denn es ergibt ſich daraus:

$$x = \int \frac{dy^{(n)}}{fy^{(n)}} + C. \tag{2}$$

Ferner iſt:

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)} dx = \int \frac{y^{(n)} dy^{(n)}}{fy^{(n)}} + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx = \int \left[\int \frac{y^{(n)} dy^{(n)}}{fy^{(n)}} + C_1 \right] \frac{dy^{(n)}}{fy^{(n)}} + C_2;$$

und wenn man ſo fortfährt, ſo erhält man den Werth von y als eine Function von $y^{(n)}$ durch eine Reihe von Quadraturen. Es kommt alsdann blos noch darauf an, $y^{(n)}$ zwiſchen der zuletzt erhaltenen Gleichung und der Gleichung (2) zu eliminiren, um das durch $n + 1$ willkürliche Conſtanten vervollſtändigte Integral der Gleichung (1) zu erhalten.

So gibt z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$-\frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''} = a$$

zunächſt:

$$dx = -\frac{a dy'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{folglich} \quad x = C - \frac{ay'}{\sqrt{1-y'^2}}. \tag{3}$$

Hierauf hat man:

$$y = \int y' dx = -a \int \frac{y' dy'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} + C_1 = \frac{a}{\sqrt{1+y'^2}} + C_1,$$

und wenn man y' eliminirt, ſo kommt man auf die Gleichung eines Kreiſes:

$$(x-C)^2 + (y-C_1)^2 = a^2. \tag{4}$$

In der That drückt die gegebene Gleichung aus, daß der Krümmungshalbmesser der ebenen Curve, deren veränderliche Coordinaten x, y bezeichnen, der Constanten a gleich ist.

Wenn man die Gleichung (2) in Beziehung auf $y^{(n)}$ auflösen kann, und man erhält:

$$y^{(n)} = f(x, C),$$

so hat man:

$$y^{(n-1)} = \int f(x, C)dx + C_1,$$
$$y^{(n-2)} = \int dx \int f(x, C)dx + C_1 x + C_2,$$

und wenn man so fortfährt, so erhält man den Werth von y als eine Function von x mit $n+1$ willkürlichen Constanten durch eine Reihe von Quadraturen.

So ergibt sich z. B. aus der Gleichung (3):

$$y' = \pm \frac{x - C}{\sqrt{a^2 - (x-C)^2}},$$

folglich:

$$y = \pm \int \frac{(x-C)dx}{\sqrt{a^2-(x-C)^2}} + C_1 = \mp \sqrt{a^2-(x-C)^2} + C_1,$$

welches wieder auf die Gleichung (4) führt.

§. 450. Auch die Integration jeder Differenzialgleichung von der Form:

$$y^{(n+2)} = fy^{(n)}, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y^{(n)}}{dx^2} = fy^{(n)}$$

kann auf die Quadraturen zurückgeführt werden; denn es folgt daraus

$$dy^{(n)} \cdot \frac{d^2y^{(n)}}{dx^2} = fy^{(n)}dy^{(n)},$$

und wenn man integrirt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy^{(n)}}{dx}\right)^2 = \int fy^{(n)}dy^{(n)} + \text{const.},$$

folglich:

$$\frac{dy^{(n)}}{dx} = \sqrt{2\int fy^{(n)}dy^{(n)} + C},$$

$$x = \int \frac{dy^{(n)}}{\sqrt{2\int fy^{(n)}dy^{(n)} + C}} + C_1. \qquad (5)$$

Alsdann ist:

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx = \int \frac{y^{(n)}dy^{(n)}}{\sqrt{2\int fy^{(n)}dy^{(n)} + C}} + C_2,$$

und wenn man auf dieselbe Weise weiter fortfährt, so erhält man den Werth von y als Function von $y^{(n)}$ durch eine Reihe von Quadraturen. Man hat alsdann blos noch $y^{(n)}$ zwischen der letzten erhaltenen Gleichung und der Gleichung (5) zu eliminiren, und die resultirende Gleichung ist das gesuchte allgemeine Integral.

Wenn sich die Gleichung (5) auf die Form:

$$y^{(n)} = f(x, C, C_1)$$

bringen läßt, ſo erhält man den Werth von y als Function von x mit der zur Allgemeinheit des Integrales erforderlichen Anzahl willkürlicher Conſtanten, wie vorhin, unmittelbar durch ſucceſſive Quadraturen.

Das vollſtändige Integral der Gleichung:

$$y'' = fy, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = fy,$$

welche in der Mechanik oft vorkommt, iſt:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int fydy + C}} + C_1,$$

wo die Veränderliche x in dieſer Formel gewöhnlich die Zeit bezeichnet.

§. 451. Die Ordnung der Differenzialgleichungen, welche nur eine einzige urſprüngliche Veränderliche enthalten, läßt ſich wenigſtens um eine Einheit erniedrigen. Dieſer Satz iſt für alle die Differenzialgleichungen für ſich klar, welche nur die unabhängige Veränderliche und die Ableitungen der Function enthalten, oder welche die Form:

$$F(x, y^{(n)}, y^{(n+1)}, \ldots y^{(n+\nu)}) = 0 \qquad (6)$$

haben, weil dieſe Gleichung, welche in Beziehung auf die Veränderlichen x, y von der $n + \nu^{ten}$ Ordnung iſt, nur noch von der ν^{ten} Ordnung iſt, wenn man $x, y^{(n)}$ zu den urſprüngtichen Veränderlichen nimmt.

Wenn die Function y ſtatt der unabhängigen Veränderlichen x in der gegebenen Differenzialgleichung vorkäme, ſo könnte man die unabhängige Veränderliche vertauſchen (§. 134 und folg.) und die Ordnung der transformirten Gleichung würde wenigſtens um eine Einheit niedriger ſein.

Nachdem man das Integral der Gleichung (6) erhalten hat, indem $x, y^{(n)}$ zu den urſprünglichen Veränderlichen genommen wurden, löſ't man die Integralgleichung in Beziehung auf x oder $y^{(n)}$ auf, und wenn man das eine oder das andere der bereits angegebenen Verfahren anwendet; ſo erhält man den Werth von y als Function von x mit $n + \nu$ willkürlichen Conſtanten durch eine Reihe von Quadraturen.

§. 452. Wenn die zu integrirende Gleichung von der Form:

$$y^{(n)} = fx, \quad \text{oder} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = fx$$

iſt, ſo erhält man, wenn man n mal hinter einander in Beziehung auf x integrirt, und der Kürze wegen $f^{(2)}$ ſtatt ff, $f^{(3)}$ ſtatt fff, ꝛc. ſetzt:

$$y = f^{(n)}fxdx^n = \int dx \int dx \ldots \int fxdx + Cx^{n-1} + C_1 x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + C_{n-2}x + C_{n-1}.$$

Aber vermittelſt der theilweiſen Integration kann man das vielfache Integral im letzten Theile der vorhergehenden Gleichung durch eine Reihe einfacher Integrale erſetzen; denn wenn man zuerſt die Conſtanten hinwegläßt, ſo hat man:

$$f^{(2)}fxdx^2 = \int dx \int fxdx = x\int fxdx - \int fx \cdot xdx,$$
$$f^{(3)}fxdx^3 = \int dx f^{(2)}fxdx^2 = \int xdx \int fxdx - \int dx \int fx \cdot xdx,$$
$$\int xdx \int fxdx = \tfrac{1}{2}x^2 \int fxdx - \tfrac{1}{2}\int fx \cdot x^2 dx,$$
$$\int dx \int fx \cdot xdx = x\int fx \cdot xdx - \int fx \cdot x^2 dx,$$

folglich:

$$\int^{(3)} f x dx^3 = \frac{1}{1.2} (x^2 \int f x dx - 2x \int f x \cdot x dx + \int f x \cdot x^2 dx).$$

Eben ſo fände man:

$$\int^{(4)} f x dx^4$$

$$= \frac{1}{1.2.3} (x^3 \int f x dx - 3x^2 \int f x \cdot x dx + 3x \int f x \cdot x^2 dx - \int f x \cdot x^3 dx),$$

woraus durch Induction folgt:

$$\int^{(n)} f x dx^n = \frac{1}{1.2.3...(n-1)} \left[x^{n-1} \int f x dx - \frac{n-1}{1} x^{n-2} \int f x \cdot x dx \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} x^{n-3} \int f x \cdot x^2 dx \ldots \pm \int f x \cdot x^{n-1} dx \right],$$

oder ſymboliſch ausgedrückt:

$$\int^{(n)} f x dx^n = \frac{(x-\xi)^{n-1} \int f x dx}{1.2.3...(n-1)},$$

wenn nach der Entwickelung die Potenzen von ξ unter das Zeichen $\int$ geſetzt werden, und man alsdann ξ mit x vertauſcht.

Man beweiſt dieſe Formel wie die Binomialformel und wie alle ähnlichen Formeln, indem man darthut, daß ſie, wenn ſie für einen beſondern Werth von n richtig iſt, auch für den folgenden Werth $n + 1$ ſtattfindet.

Wir haben alſo, wenn wir die durch alle Integrationen eingeführten willkürlichen Conſtanten wieder herſtellen, und der Kürze wegen die vorhin angewandte ſymboliſche Bezeichnung beibehalten:

$$y = \frac{(x-\xi)^{n-1} \int f x dx}{1.2.3...(n-1)} + C x^{n-1} + C_1 x^{n-2} + \ldots + C^{n-2} x + C^{n-1}.$$

II. Von den integrirenden Factoren der Differenzialgleichungen der höhern Ordnungen.

§. 453. Man kann ſich immer vorſtellen, daß eine Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung auf die Form:

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (7)$$

gebracht iſt, und wenn man andererſeits durch:

$$\omega(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-2)}, y^{(n-1)}) = C \qquad (8)$$

die Differenzialgleichung der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, woraus die gegebene abgeleitet iſt, darſtellt, indem C die willkürliche Conſtante bezeichnet, welche bei dem Uebergange von der Gleichung (8) zu der Gleichung (7) verſchwindet; ſo erhält man durch Differenziation:

$$\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy} y' + \frac{d\omega}{dy'} y'' + \ldots + \frac{d\omega}{dy^{(n-2)}} y^{(n-1)} + \frac{d\omega}{dy^{(n-1)}} y^{(n)} = 0 \qquad (9)$$

oder:

$$\left[\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy} y' + \frac{d\omega}{dy'} y'' + \ldots + \frac{d\omega}{dy^{(n-2)}} y^{(n-1)} \right] : \frac{d\omega}{dy^{(n-1)}} + y^{(n)} = 0. \qquad (10)$$

Die Gleichungen (7) und (10) müſſen nach der Vorausſetzung identiſch ſein; folglich umgekehrt, wenn man die Gleichung (7) durch einen gewiſſen Factor:

$$\mu = \frac{d\omega}{dy^{(n-1)}}$$

multiplicirt, welcher, wie die Function ω ſelbſt, nur von den Größen $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ abhängen kann; ſo macht man die gegebene Gleichung mit der Gleichung (9) identiſch, d. h. man macht den erſten Theil der gegebenen Differenzialgleichung zu einem genauen Differenziale. Uebrigens iſt einleuchtend, daß nicht blos der Factor μ, ſondern auch alle die unendlich vielen in der Formel $\mu f(\omega)$, wo f eine beliebige Function bezeichnet, enthaltenen Factoren die Eigenſchaft beſitzen, den erſten Theil der Gleichung (7) zu einem genauen Differenziale zu machen.

Da die gegebene Differenzialgleichung von der n^{ten} Ordnung iſt, ſo geſtattet ſie n erſte Integrale von der Ordnung $n-1$ (§. 164), und es ſei:

$$\omega_1(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-2)}, y^{(n-1)}) = C_1$$

ein anderes dieſer erſten Integrale, ſo wird die gegebene Differenzialgleichung aus demſelben Grunde, wie vorhin, zu einem genauen Differenziale gemacht, wenn man ſie durch den Factor:

$$\mu_1 = \frac{d\omega_1}{dy^{(n-1)}}$$

multiplicirt, oder allgemeiner durch einen der unendlich vielen Factoren, welche in der Formel $\mu_1 f_1(\omega_1)$ enthalten ſind, wo f_1 eine andere willkürliche Function bezeichnet.

Allgemeiner, wenn man durch $\Phi(\omega, \omega_1)$ eine beliebige Function der beiden Größen ω, ω_1 bezeichnet, ſo haben alle in der Formel:

$$\mu \frac{d\Phi(\omega, \omega_1)}{d\omega} + \mu_1 \frac{d\Phi(\omega, \omega_1)}{d\omega_1}$$

oder:

$$\frac{d\omega}{dy^{(n-1)}} \cdot \frac{d\Phi(\omega, \omega_1)}{d\omega} + \frac{d\omega_1}{dy^{(n-1)}} \cdot \frac{d\Phi(\omega, \omega_1)}{d\omega_1}$$

enthaltenen Factoren die Eigenſchaft, daß ſie den erſten Theil der gegebenen Differenzialgleichung zu einem genauen Differenziale machen, weil dieſer erſte Theil alsdann das Differenzial der Function $\Phi(\omega, \omega_1)$ wird.

Wenn man alſo endlich durch:

$$\omega = C, \quad \omega_1 = C_1, \quad \omega_2 = C_2, \ldots \omega_{n-1} = C_{n-1}$$

die n erſten Integrale der gegebenen Differenzialgleichung, und durch Φ eine beliebige Function der Größen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ bezeichnet; ſo ſind die Factoren, welche den erſten Theil der gegebenen Differenzialgleichung zu einem genauen Differenziale machen können, in der allgemeinen Gleichung:

$$\frac{d\omega}{dy^{(n-1)}} \cdot \frac{d\Phi}{d\omega} + \frac{d\omega_1}{dy^{(n-1)}} \cdot \frac{d\Phi}{d\omega_1} + \ldots + \frac{d\omega_{n-1}}{dy^{(n-1)}} \cdot \frac{d\Phi}{d\omega^{n-1}}$$

enthalten.

§. 454. Wir wollen dieſes auf die Gleichung der zweiten Ordnung:

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0$$

anwenden, welche ſich, je nachdem man ſie durch x multiplicirt oder dividirt, reſp. in die Gleichungen:

$$xy'' - y' = 0, \quad \frac{y''}{x} - \frac{y'}{x^2} = 0$$

verwandelt, deren erſte Theile reſp. die genauen Differenziale der Functionen:

$$\omega = xy' - 2y, \quad \omega_1 = \frac{y'}{x} \tag{11}$$

ſind.

Die Integrale der erſten Ordnung der gegebenen Differenzialgleichung ſind:

$$xy' - 2y = C, \quad \frac{y'}{x} = C_1$$

und das Integral der zweiten Ordnung, welches ſich aus der Elimination der Function y' zwiſchen den beiden Integralen der erſten Ordnung ergibt, iſt:

$$C_1 x^2 - 2y = C.$$

In dieſem Falle werden die Factoren, welche die Eigenſchaft beſitzen, den erſten Theil der gegebenen Gleichung zu einem genauen Differenziale zu machen, durch die Formel:

$$x \cdot \frac{d\Phi(\omega, \omega_1)}{d\omega} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\Phi(\omega, \omega_1)}{d\omega_1}$$

ausgedrückt, wo die Zuſammenſetzung der Functionen ω, ω_1 durch die Gleichungen (11) gegeben wird, und die Function Φ willkürlich bleibt.

III. Von den linearen Differenzialgleichungen einer beliebigen Ordnung.

§. 455. Unter einer **linearen** Differenzialgleichung verſteht man eine ſolche, welche weder höhern Potenzen als die erſte, noch Producte der Function und ihrer Ableitungen der verſchiedenen Ordnungen enthält, und welche folglich von der Form:

$$y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \ldots + Uy = V \tag{a}$$

iſt, indem $P, Q, \ldots U, V$ Functionen der unabhängigen Veränderlichen x allein bezeichnen. Allgemein, wenn die Gleichung:

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

das Geſetz einer Erſcheinung genau ausdrückt, und wenn außerdem die Größen $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$ nach der Natur dieſer Erſcheinung immer ſehr klein bleiben müſſen, ſo daß man die Producte und die höhern Potenzen dieſer Größen vernachläſſigen kann; ſo verwandelt ſich die Function Φ in eine lineare Function derſelben veränderlichen Größen, und die Gleichung der Aufgabe wird eine lineare Differenzialgleichung. Die Theorie der Integration der Gleichungen dieſer Art muß alſo unſere Aufmerkſamkeit beſonders auf ſich ziehen, und zwar nicht blos wegen der ſehr merkwürdigen analytiſchen Reſultate, auf welche man kommt, ſondern auch wegen der Wichtigkeit der Anwendungen.

Wir wollen daher zunächſt annehmen, daß der zweite Theil der Gleichung (a) Null ſei, oder daß man die Gleichung:

$$y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \ldots + Uy = 0 \tag{b}$$

zu integriren habe, ſo beſteht die charakteriſtiſche Eigenſchaft einer Differenzialgleichung dieſer Form darin, daß, wenn verſchiedene beſondere Werthe $y_1, y_2, y_3, \ldots$ von y als Functionen von x derſelben Genüge leiſten, auch die Summe dieſer reſp. mit den willkürlichen Conſtanten C_1, C_2, C_3, ꝛc. multiplicirten Werthe, d. h.:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \text{ꝛc.}$$

derſelben genügen. Die Form der Rechnung, worauf dieſer Satz beruht, folgt ſo unmittelbar aus der Form der Gleichung (b) ſelbſt, daß ſie blos angedeutet zu werden braucht.

Wenn man alſo n beſondere und verſchiedene Werthe $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ kennt, welche der Gleichung (b) genügen, ſo iſt das allgemeine Integral derſelben:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n;$$

denn dieſer Werth von y genügt der gegebenen Differenzialgleichung, und wegen der darin vorkommenden n verſchiedenen willkürlichen Conſtanten hat derſelbe alle Allgemeinheit, welche ein ſolches Integral nur geſtattet.

§. 456. Nun gibt es aber einen Fall, wo man leicht n beſondere Werthe von y findet, welche der Gleichung (b) genügen können, und dieſes iſt der Fall, wo ſich alle die Coefficienten $P, Q, \ldots U$ auf Conſtanten reduciren; denn wenn man $y = e^{mx}$ ſetzt, ſo iſt für jeden Werth von i, $y^{(i)} = m^i e^{mx}$, ſo daß die Subſtitution dieſes Werthes von y in die Gleichung (b) das Reſultat:

$$e^{mx}(m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} + \ldots + U) = 0$$

gibt, und alsdann leiſtet die Function $y = e^{mx}$ offenbar der Gleichung (b) Genüge, wofern der der Zahl m beigelegte Werth eine der Wurzeln der Zahlengleichung:

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} + \ldots + U = 0, \qquad (m)$$

iſt. Wenn man alſo die n Wurzeln dieſer Gleichung mit $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ willkürliche Conſtanten bezeichnet, ſo iſt das allgemeine Integral der Gleichung (b):

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}. \qquad (c)$$

§. 457. Ehe wir weiter gehen, wird es gut ſein, zu zeigen, weswegen der eben betrachtete, anſcheinend ſo particuläre Fall in den Anwendungen nichtsdeſtoweniger eine ſolche Wichtigkeit hat, daß er beſonders unterſucht zu werden verdient.

Zuvörderſt iſt klar, daß dieſer Fall den mit in ſich begreift, wo der zweite Theil der Gleichung (b), ſtatt Null zu ſein, irgend eine Zahl V iſt, denn man braucht blos $y = \eta + \frac{V}{U}$ zu ſetzen, um den zweiten Theil der transformirten Gleichung mit η auf Null zu reduciren.

Ferner wollen wir bemerken, daß in den meiſten Anwendungen der Analyſis auf die Phyſik die Zeit die hier mit x bezeichnete unabhängige veränderliche Größe iſt, und daß dieſe Veränderliche gewöhnlich nur durch ihre Differenziale in den Gleichungen der Aufgaben vorkommt. Wenn es ſich z. B. um eine mechaniſche Aufgabe handelt, ſo ändern ſich die auf ein materielles Syſtem wirkenden Kräfte gewöhnlich nur mit den gegenſeitigen Entfernungen der Theile des Syſtemes, ſind zu einer beliebigen Zeit entwickelte Functionen dieſer Entfernungen und hängen von der ſeit dem zum Anfangspunkte genommenen Augenblicke verfloſſenen Zeit implicite ab.

§. 458. Wenn alle Wurzeln der Gleichung (m) reell und ungleich ſind, ſo läßt ſich leicht darthun, daß die willkürlichen Conſtanten $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ immer vermittelſt der $x = 0$ entſprechenden anfänglichen Werthe:

$$y_0, y'_0, y''_0, \ldots y_0^{(n-1)}, \qquad (o)$$

numeriſch beſtimmt werden können. Es ſei z. B. $n = 3$, ſo hat man:

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 + C_2 + C_3 \\ y'_0 &= m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3 \\ y''_0 &= m_1^2 C_1 + m_2^2 C_2 + m_3 C_3, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$C_1 = \frac{m_2 m_3 y_0 - (m_2 + m_3) y'_0 + y''_0}{(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)}$$

$$C_2 = \frac{m_1 m_3 y_0 - (m_1 + m_3) y'_0 + y''_0}{(m_2 - m_1)(m_2 - m_3)}$$

$$C_3 = \frac{m_1 m_2 y_0 - (m_1 + m_2) y'_0 + y''_0}{(m_3 - m_1)(m_3 - m_2)}.$$

Aus der Symmetrie dieſer Formeln erhellet das Bildungsgeſetz der Ausdrücke zur Genüge, welche man erhalten würde, wenn wan vermittelſt der anfänglichen Werthe der Function und ihrer Ableitungen eine größere Anzahl willkürlicher Conſtanten zu beſtimmen hätte.

Wenn man nach der Natur der Aufgabe wüßte, daß die Größe y nicht ohne Ende mit x wachſen kann, ſo muß man die willkürlichen Conſtanten C_i, welche den poſitiven Wurzeln m_i der Gleichung (m) entſprechen, nothwendig $= 0$ ſetzen. Alsdann können die anfänglichen Werthe (0) nicht mehr willkürlich gegeben werden, ſondern es müſſen zwiſchen ihnen ſo viele Bedingungsgleichungen ſtattfinden, als die Gleichung (m) poſitive Wurzeln hat. Dieſe Reductionsart der Anzahl der willkürlichen Conſtanten nach den Betrachtungen der Form der Functionen, unabhängig von den Zahlenwerthen ihrer Parameter, verdient bemerkt zu werden; denn Betrachtungen derſelben Art kommen häufig bei den Anwendungen der Analyſis auf phyſikaliſche Aufgaben vor.

§. 459. Wenn die Gleichung (m) imaginäre Wurzeln hätte, ſo würden ſich die imaginär gewordene Exponentialgrößen paarweiſe vereinigen, und in Sinus oder Coſinus reeller Bogen verwandelt. Wenn z. B. durch $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ zwei zuſammengehörige imaginäre Wurzeln der Gleichung (m) bezeichnet werden, ſo verwandeln ſich die Exponentialglieder, welche durch dieſe Wurzeln in das allgemeine Integral eingeführt werden, nämlich:

$$C_1 e^{x(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + C_2 e^{x(\alpha-\beta\sqrt{-1})}$$

in:

$$e^{\alpha x}(C_1 e^{\beta x\sqrt{-1}} + C_2 e^{-\beta x\sqrt{-1}})$$

$$= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos.\beta x + (C_1 - C_2)\sqrt{-1}\cdot\sin.\beta x]$$

und nehmen zuletzt die Form an:

$$e^{\alpha x}(M\cos.\beta x + N\sin.\beta x),$$

wenn man zwiſchen den unbeſtimmten Conſtanten C_1, C_2, M, N die beiden Relationen:

$$C_1 + C_2 = M, \quad (C_1 - C_2)\sqrt{-1} = N$$

aufſtellt. Man kann dieſen Ausdruck auch noch vereinfachen, wenn man

$$M = \lambda\cos.\varepsilon, \quad N = -\lambda\sin.\varepsilon$$

ſetzt, welches gibt:

$$e^{\alpha x}(M \cos. \beta x + N \sin. \beta x) = \lambda e^{\alpha x} \cos.(\beta x + \varepsilon),$$

wo alsdann λ, ε zwei willkürliche Conſtanten ſind.

Wenn der reelle Theil α des betrachteten Paares imaginärer Wurzeln negativ iſt, ſo nimmt der Factor $e^{\alpha x}$ für zunehmende Weethe von x ohne Ende ab, während der Factor $\lambda \cos.(\beta x + \varepsilon)$ zwiſchen den Werthen $-\lambda$ und $+\lambda$ periodiſche Schwankungen macht, und die aus dem Producte dieſer beiden Factoren beſtehende Function bietet folglich periodiſche Schwankungen dar, deren Amplitude für zunehmende Werthe von x ſchnell abnimmt. Wenn dagegen α poſitiv wäre, ſo würde die Amplitude der Schwankungen der Function ſehr ſchnell und über jede Grenze hinaus zunehmen, was offenbar mit dem Geſetze jeder Naturerſcheinung unverträglich iſt, und ein ſolcher Fall würde folglich nur in der reinen Abſtraction vorkommen können.

Wenn die Gleichung (m) nur imaginäre Wurzeln hat, deren reelle Theile verſchwinden, ſo iſt der vollſtändige Werth von y eine Reihe von Gliedern von der Form:

$$\lambda \cos.(\beta x + \varepsilon). \qquad (\eta)$$

Denken wir uns y als die mit x veränderliche Größe, deren mittlerer Werth η größer oder kleiner iſt, als eine andere Größe, welche die Aſtronomen die Ungleichheit von η der Kürze wegen nennen, ſo iſt dieſe Ungleichheit die Summe mehrerer periodiſcher Ungleichheiten, wovon jede durch ein Glied von der Form (η) ausgedrückt wird.

Die Conſtante λ wird der Coefficient der Ungleichheit genannt, beſtimmt die Amplitude derſelben und iſt, wie die Conſtante ε, von den anfänglichen Werthen der Function und ihrer Ableitungen abhängig. Die Zahl β beſtimmt die Ausdehnung der Periode, weil die Ungleichheit für Werthe von x, deren Unterſchied $= \frac{2\pi}{\beta}$ iſt, wieder dieſelben Werthe annimmt, und die Größe β wird durch die Differenzialgleichung unabhängig von den anfänglichen Werthen der Function und ihrer Ableitungen gegeben. Alle dieſe Betrachtungen kommen bei periodiſchen Erſcheinungen häufig zur Anwendung.

§. 460. Wenn einige Wurzeln der Gleichung (m) einander gleich werden, ſo iſt die vorhergehende Analyſe unzuläſſig. Es ſei z. B. $m_1 = m_2$, ſo vereinigen ſich die beiden Glieder $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ in ein einziges $(C_1 + C_2) e^{m_1 x}$, und der Coefficient $C_1 + C_2$ iſt nur noch ſo gut, wie eine einzige willkürliche Conſtante (§. 164), ſodaß das Integral (c) nicht mehr die erforderliche Allgemeinheit hat. Wenn wir in dieſem Falle

$$y_1 = e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x) \qquad (12)$$

ſetzen, ſo gibt die Subſtitution dieſes Werthes in die Gleichung (b):

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x)(m_1^n + P m_1^{n-1} + Q m_1^{n-2} + \ldots + T m_1 + U)$$
$$+ B_1 e^{m_1 x}[n m_1^{n-1} + (n-1) P m_1^{n-2} + (n-2) Q m_1^{n-3} + \ldots + T] = 0.$$

Der Factor:

$$m_1^n + P m_1^{n-1} + Q m_1^{n-2} + \ldots + T m_1 + U$$

verſchwindet, weil m_1 Wurzel der Gleichung (m) iſt, und das Polynom, womit $B_1 e^{m_1 x}$ multiplicirt iſt, verſchwindet auch, weil m_1 nach der Vorausſetzung eine doppelte Wurzel der Gleichung (m) und folglich auch eine Wurzel der abgeleiteten Gleichung:

$$n m^{n-1} + (n-1) P m^{n-2} + (n-2) Q m^{n-3} + \ldots + T = 0$$

iſt. Wenn alſo $m_2, \ldots m_n$ wieder die einfachen Wurzeln der Gleichung (m) bezeichnen, und man ſetzt:

$$y = e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x) + C_3 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x},$$

ſo wird der Gleichung (b) genügt, deren allgemeines Integral man auf dieſe Weiſe erhält, weil die n Conſtanten $A_1, B_1, C_3, \ldots C_n$ unter ſich irreductibel ſind.

Eben ſo würde man finden, daß man in dem Falle drei gleicher Wurzeln das Trinom:

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} \qquad (13)$$

durch:

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x + C_1 x^2)$$

erſetzen muß, u. ſ. f.

Die Form, welche das allgemeine Integral in dem Falle annimmt, wo die Gleichung (m) gleiche Wurzeln hat, ergibt ſich auch aus folgender Rechnung.

Statt unmittelbar $m_2 = m_1$ zu ſetzen, wollen wir zuvörderſt $m_2 = m_1 + \varepsilon$ ſetzen, welches

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_1 x} = e^{m_1 x}(C_1 + C_2 e^{\varepsilon x})$$

$$= e^{m_1 x}[C_1 + C_2(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{1.2} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.})]$$

gibt, indem für $e^{\varepsilon x}$ die immer convergirende Reihenentwickelung geſetzt iſt. Es iſt erlaubt, dieſen Ausdruck dadurch auf eine andere Form zu bringen, daß man die willkürlichen Conſtanten verändert, und zu dem Zwecke $C_1 + C_2 = A_1$, $C_2 \varepsilon = B_1$ ſetzt. Auf dieſe Weiſe verwandelt ſich der vorhergehende Ausdruck in:

$$e^{m_1 x}\left[A_1 + B_1 x + B_1\left(\frac{\varepsilon x^2}{1.2} + \frac{\varepsilon^2 x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}\right)\right],$$

und wenn man nun $\varepsilon = 0$ ſetzt, ſo reducirt er ſich auf den zweiten Theil der Gleichung (12).

Da in dem Falle, wo die beiden Wurzeln m_1, m_2, einander gleich werden, das Trinom (13) durch:

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x) + C_3 e^{m_3 x}$$

erſetzt iſt, ſo kann man $m_3 = m_1 + \varepsilon$ ſetzen, wodurch der vorhergehende Ausdruck in folgenden verwandelt wird:

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x + C_3 e^{\varepsilon x})$$

$$= e^{m_1 x}[A_1 + B_1 x + C_3(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{1.2} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.})].$$

Auch kann man die Conſtanten verändern, indem man

$$A_1 + C_3 = D_1, \quad B_1 + C_3 \varepsilon = E_1, \quad \tfrac{1}{2} C_3 \varepsilon^2 = F_1$$

ſetzt, ſo daß ſich der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung in:

$$e^{m_1 x}\left[D_1 + E_1 x + F_1 x^2 + F_1\left(\frac{\varepsilon x^3}{3} + \text{ꝛc.}\right)\right]$$

verwandelt und ſich für $\varepsilon = 0$ auf:

$$e^{m_1 x}(D_1 + F_1 x + F_1 x^2)$$

reducirt. Dieſelbe Methode iſt offenbar auch auf den Fall einer beliebigen Anzahl gleicher Wurzeln anwendbar. Es iſt zweckmäßig, dieſe Methode zu kennen, welche die Analyſten in ähnlichen und complicirtern Fällen oft angewandt haben, obgleich ſie einigen Schwierigkeiten unterliegt, welche verſchwin-

den, wenn man die dem allgemeinen Integrale in der Voraussetzung, wo die Gleichung (m) gleiche Wurzeln bekommt, gegebene Form direct rechtfertigt, wie wir es zuvor gethan haben.

§. 461. Die Gleichung (b) läßt sich selten integriren, wenn die Coefficienten Functionen von x sind. Betrachtet man z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

und setzt:

$$y = e^{\int z dx}, \qquad (d)$$

so verwandelt sie sich in:

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + Pz + Q = 0,$$

und wenn sich diese Gleichung der ersten Ordnung zwischen z und x durch Trennung der Veränderlichen, oder auf andere Weise integriren läßt, so erhält man den Werth von y als Function von x durch die Quadraturen.

Allgemein, wenn man in die Gleichung (b) den durch die Gleichung (d) gegebenen Werth von y als Function von z substituirt, so ist die transformirte Gleichung mit z und x nur noch von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, aber keine lineare Gleichung mehr.

Die linearen Differenzialgleichungen von der Form:

$$(a+bx)^n y^{(n)} + P(a+bx)^{n-1} y^{(n-1)} + Q(a+bx)^{n-2} y^{(n-2)} \ldots$$
$$\ldots + T(a+bx) + U = 0, \qquad (e)$$

wo $P, Q, \ldots T, U$ wieder constante Coefficienten bezeichnen, werden integrirt, wenn man $y = (a+bx)^m$ setzt, so daß man zur Bestimmung von m die algebraische Gleichung des m^{ten} Grades:

$$m(m-1)\ldots(m-n+1) + \frac{P}{b} \cdot m(m-1)\ldots(m-n+2)$$
$$+ \frac{Q}{b^2} \cdot m(m-1)\ldots(m-n+3) + \ldots + \frac{Tm}{b^{n-1}} + \frac{U}{b^n} = 0$$

hat, und wenn man die n Wurzeln dieser Gleichung mit $m_1, m_2, \ldots m_n$ und mit $C_1, C_2, \ldots C_n$ willkürliche Constanten bezeichnet, so ist das allgemeine Integral der Gleichung (e):

$$y = C_1(a+bx)^{m_1} + C_2(a+bx)^{m_2} + \ldots + C_n(a+bx)^{m_n},$$

welches folglich transcendent ist, wofern die Gleichung mit m nicht lauter rationale Wurzeln hat.

§. 462. Wenn man einen particulären Werth y_1 könnte, welcher der Gleichung (b) zu genügen vermag, so könnte man die Ordnung der Gleichung (b), und selbst die der Gleichung (a) um eine Einheit erniedrigen, zu welchem Zwecke man nur

$$y = y_1 \int z dx \qquad (f)$$

zu setzen braucht, wo z, wie oben, eine neue Veränderliche, die eine Function von x ist, bezeichnet. In dieser Beziehung wollen wir bemerken, daß man, wenn u, v beliebige Functionen derselben unabhängigen veränderlichen Größe bezeichnen, hat:

$$d \cdot uv = udv + vdu$$

$$d^2 \cdot uv = ud^2u + 2dudv + vd^2u$$

.....

$$d^n \cdot uv = ud^nv + \frac{n}{1} \cdot dud^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2ud^{n-2}v + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n}{1} \cdot dvd^{n-1}u + d^nu.$$

und vermöge dieſer Formeln gibt die Subſtitution des Werthes von y in die Gleichung (a):

$$y_1 z^{(n-1)} + (ny'_1 + Py_1)z^{(n-2)}$$

$$+ \left[\frac{n(n-1)}{1.2} y''_1 + (n-1)Py'_1 + Qy_1\right] z^{(n-3)} + \ldots$$

$$\ldots + (y_1^{(n)} + Py_1^{(n-1)} + Qy_1^{(n-2)} + \ldots + Uy_1) \int z dx = V.$$

Nun iſt aber der Coefficient von $\int z dx$ in dieſer Gleichung nach der Vorausſetzung $= 0$, weil y_1 ein particuläres Integral der Gleichung (b) iſt, und wenn man dieſe Gleichung durch y_1, welches eine bekannte Function von x iſt, dividirt; ſo wird ſie folglich auch die Form:

$$z^{(n-1)} + P_1 z^{(n-2)} + Q_1 z^{(n-3)} + \ldots + T_1 z = \frac{V}{y_1}, \qquad (a_1)$$

zurückgeführt, indem $P_1, Q_1, \ldots T_1$ wie $P, Q, \ldots T$ bekannte Functionen von x ſind, und die Ordnung der Gleichung (a) iſt um eine Einheit erniedrigt.

Wenn man nicht die Gleichung (a), ſondern die Gleichung (b) integriren will, ſo hat man ſtatt der letzten erhaltenen Gleichung folgende:

$$z^{(n-1)} + P_1 z^{(n-2)} + Q_1 z^{(n-3)} + \ldots + T_1 z = 0. \qquad (b_1)$$

Wenn man in dieſer Vorausſetzung einen zweiten particulären Werth y kennte, welcher der Gleichung (b) genügte, ſo müßte einer der aus der Gleichung (b_1) gezogenen Werthe von z der Gleichung (f), nachdem darin y_2 für y geſetzt iſt, genügen, und wenn man dieſen particulären Werth von z mit z_1 bezeichnete, ſo hätte man folglich:

$$y_2 = y_1 \int z_1 dx, \text{ oder } z_1 = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}.$$

Wenn man alſo zwei particuläre Integrale der Gleichung (b) kennt, ſo kennt man dadurch ein particuläres Integral der Gleichung (b_1), und folglich wird die Ordnung der Gleichung (b_1) durch die Transformation $z = z_1 \int u dx$ um eine Einheit erniedrigt. Da ſich dieſe Schlüſſe allmälig weiter fortſetzen laſſen, ſo folgt, daß, wenn man m particuläre Integrale der Gleichung (b) kennt, die allgemeine Integration dieſer Gleichung, und ſelbſt die der Gleichung (a) auf die Integration einer Differenzialgleichung von der Ordnung $n - m$ zurückgeführt iſt, ſo daß man, wenn dieſe integrirt wird, das allgemeine Integral der Gleichung (a) durch einfache Quadraturen erhält. Dieſes ſchöne Theorem verdankt man Lagrange; allein der vorhin gegebene Beweis deſſelben, gewährt, wie Libri in einer ſehr intereſſanten Abhandlung *) gezeigt hat, den Vortheil, die zwiſchen der Theorie der algebraiſchen Gleichungen und

*) Crelle's Journal der Math. Bd. 10.

der der Integration der linearen Differenzialgleichungen stattfindenden Analogien in das hellste Licht zu setzen.

§. 463. Wenn die Coefficienten $P, Q, \ldots U$ der Gleichung (a) constante Zahlen sind, indem das letzte Glied V allein eine Function von x ist, so kennt man n particuläre Integrale der Gleichung (b):

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}, \ldots y_n = e^{m_n x},$$

wo $m_1, m_2, \ldots m_n$ wieder die Wurzeln der Gleichung (m) bezeichnen. Die allgemeine Integration der Gleichung (a) ist also auf die Quadraturen zurückgeführt.

Es sei z. B. die lineare Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y'' + Py' + Qy = V$$

gegeben, wo P, Q constante Zahlen bezeichnen, so sind m_1, m_2 die Wurzeln der Zahlengleichung:

$$m^2 + Pm + Q = 0, \qquad (g)$$

und man hat:

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}.$$

Setzt man:

$$y = y_1 \int z\,dx = e^{m_1 x} \int z\,dx,$$

so ist die transformirte Gleichung mit z, wegen $P = -(m_1 + m_2)$, folgende:

$$z' + (2m_1 + P)z = Ve^{-m_1 x}, \quad \text{oder} \quad z' - (m_2 - m_1)z = Ve^{-m_1 x}.$$

Setzt man außerdem:

$$z = z_1 \int u\,dx = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} \int u\,dx = (m_2 - m_1) e^{(m_2 - m_1)x} \int u\,dx,$$

so gibt die transformirte Gleichung mit u:

$$u = \frac{Ve^{-m_2 x}}{m_2 - m_1},$$

woraus folgt:

$$z = e^{(m_2 - m_1)x} \int Ve^{-m_2 x}\,dx$$

$$y = e^{m_1 x} \int dx \left[e^{(m_2 - m_1)x} \int Ve^{-m_2 x}\,dx \right],$$

oder, wenn man theilweise integrirt:

$$y = \frac{e^{m_2 x} \int Ve^{-m_2 x}\,dx - e^{m_1 x} \int Ve^{-m_1 x}\,dx}{m_2 - m_1}, \qquad (h)$$

wo jedes der beiden unbestimmten Integrale, als eine willkürliche Constante enthaltend, betrachtet wird.

Wenn m_1, m_2 zwei conjugirte imaginäre Wurzeln sind, von der Form $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, so verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck in:

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} (\sin.\, \beta x \int Ve^{-\alpha x} \cos.\, \beta x \cdot dx - \cos.\, \beta x \int Ve^{-\alpha x} \sin.\, \beta x \cdot dx).$$

Wenn endlich $m_2 = m_1$ wäre, so erschiene der zweite Theil der Gleichung (h) unter der Form $\frac{0}{0}$; aber wenn man in Beziehung auf den Parameter m_2 vom Zähler und Nenner die Ableitungen nimmt, und dann $m_2 = m_1$ setzt, so findet man für diesen Fall:

$$y = e^{m_1 x} (x \int Ve^{-m_1 x} dx - \int Ve^{-m_1 x} x\,dx).$$

$$d \cdot uv = udv + vdu$$
$$d^2 \cdot uv = ud^2u + 2dudv + vd^2u$$

.....

$$d^n \cdot uv = ud^nv + \frac{n}{1} \cdot dud^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2ud^{n-2}v + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1} \cdot dvd^{n-1}u + d^nu.$$

und vermöge dieſer Formeln gibt die Subſtitution des Werthes von y in die Gleichung (a):

$$y_1 z^{(n-1)} + (ny'_1 + Py_1)z^{(n-2)}$$
$$+ \left[\frac{n(n-1)}{1.2} y''_1 + (n-1)Py'_1 + Qy_1\right] z^{(n-3)} + \ldots$$
$$\ldots + (y_1^{(n)} + Py_1^{(n-1)} + Qy_1^{(n-2)} + \ldots + Uy_1) \int z dx = V.$$

Nun iſt aber der Coefficient von $\int z dx$ in dieſer Gleichung nach der Vorausſetzung $= 0$, weil y_1 ein particuläres Integral der Gleichung (b) iſt, und wenn man dieſe Gleichung durch y_1, welches eine bekannte Function von x iſt, dividirt; ſo wird ſie folglich auch die Form:

$$z^{(n-1)} + P_1 z^{(n-2)} + Q_1 z^{(n-3)} + \ldots + T_1 z = \frac{V}{y_1}, \qquad (a_1)$$

zurückgeführt, indem $P_1, Q_1, \ldots T_1$ wie $P, Q, \ldots T$ bekannte Functionen von x ſind, und die Ordnung der Gleichung (a) iſt um eine Einheit erniedrigt.

Wenn man nicht die Gleichung (a), ſondern die Gleichung (b) integriren will, ſo hat man ſtatt der letzten erhaltenen Gleichung folgende:

$$z^{(n-1)} + P_1 z^{(n-2)} + Q_1 z^{(n-3)} + \ldots + T_1 z = 0. \qquad (b_1)$$

Wenn man in dieſer Vorausſetzung einen zweiten particulären Werth y kennte, welcher der Gleichung (b) genügte, ſo müßte einer der aus der Gleichung (b_1) gezogenen Werthe von z der Gleichung (f), nachdem darin y_2 für y geſetzt iſt, genügen, und wenn man dieſen particulären Werth von z mit z_1 bezeichnete, ſo hätte man folglich:

$$y_2 = y_1 \int z_1 dx, \text{ oder } z_1 = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}.$$

Wenn man alſo zwei particuläre Integrale der Gleichung (b) kennt, ſo kennt man dadurch ein particuläres Integral der Gleichung (b_1), und folglich wird die Ordnung der Gleichung (b_1) durch die Transformation $z = z_1 \int u dx$ um eine Einheit erniedrigt. Da ſich dieſe Schlüſſe allmälig weiter fortſetzen laſſen, ſo folgt, daß, wenn man m particuläre Integrale der Gleichung (b) kennt, die allgemeine Integration dieſer Gleichung, und ſelbſt die der Gleichung (a) auf die Integration einer Differenzialgleichung von der Ordnung $n - m$ zurückgeführt iſt, ſo daß man, wenn dieſe integrirt wird, das allgemeine Integral der Gleichung (a) durch einfache Quadraturen erhält. Dieſes ſchöne Theorem verdankt man Lagrange; allein der vorhin gegebene Beweis deſſelben, gewährt, wie Libri in einer ſehr intereſſanten Abhandlung *) gezeigt hat, den Vortheil, die zwiſchen der Theorie der algebraiſchen Gleichungen und

*) Crelle's Journal der Math. Bd. 10.

der der Integration der linearen Differenzialgleichungen stattfindenden Analogien in das hellste Licht zu setzen.

§. 463. Wenn die Coefficienten P, Q, ... U der Gleichung (a) constante Zahlen sind, indem das letzte Glied V allein eine Function von x ist, so kennt man n particuläre Integrale der Gleichung (b):

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}, \ldots y_n = e^{m_n x},$$

wo $m_1, m_2, \ldots m_n$ wieder die Wurzeln der Gleichung (m) bezeichnen. Die allgemeine Integration der Gleichung (a) ist also auf die Quadraturen zurückgeführt.

Es sei z. B. die lineare Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y'' + Py' + Qy = V$$

gegeben, wo P, Q constante Zahlen bezeichnen, so sind m_1, m_2 die Wurzeln der Zahlengleichung:

$$m^2 + Pm + Q = 0, \qquad (g)$$

und man hat:

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}.$$

Setzt man:

$$y = y_1 \int z dx = e^{m_1 x} \int z dx,$$

so ist die transformirte Gleichung mit z, wegen $P = -(m_1 + m_2)$, folgende:

$$z' + (2m_1 + P)z = Ve^{-m_1 x}, \quad \text{oder} \quad z' - (m_2 - m_1)z = Ve^{-m_1 x}.$$

Setzt man außerdem:

$$z = s_1 \int u dx = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} \int u dx = (m_2 - m_1) e^{(m_2 - m_1)x} \int u dx,$$

so gibt die transformirte Gleichung mit u:

$$u = \frac{Ve^{-m_2 x}}{m_2 - m_1},$$

woraus folgt:

$$z = e^{(m_2 - m_1)x} \int V e^{-m_2 x} dx$$

$$y = e^{m_1 x} \int dx [e^{(m_2 - m_1)x} \int V e^{-m_2 x} dx],$$

oder, wenn man theilweise integrirt:

$$y = \frac{e^{m_2 x} \int V e^{-m_2 x} dx - e^{m_1 x} \int V e^{-m_1 x} dx}{m_2 - m_1}, \qquad (h)$$

wo jedes der beiden unbestimmten Integrale, als eine willkürliche Constante enthaltend, betrachtet wird.

Wenn m_1, m_2 zwei conjugirte imaginäre Wurzeln sind, von der Form $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, so verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck in:

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} (\sin. \beta x \int V e^{-\alpha x} \cos. \beta x \cdot dx - \cos. \beta x \int V e^{-\alpha x} \sin. \beta x \cdot dx).$$

Wenn endlich $m_2 = m_1$ wäre, so erschiene der zweite Theil der Gleichung (h) unter der Form $\frac{0}{0}$; aber wenn man in Beziehung auf den Parameter m_2 vom Zähler und Nenner die Ableitungen nimmt, und dann $m_2 = m_1$ setzt, so findet man für diesen Fall:

$$y = e^{m_1 x} (x \int V e^{-m_1 x} dx - \int V e^{-m_1 x} x dx).$$

§. 464. Wir können dieſen Gegenſtand nicht verlaſſen, ohne die Methode anzugeben, welche man gewöhnlich zum Beweiſe des Lehrſatzes im §. 462 anwendet.

Wir wollen zuvörderſt annehmen, man kenne n particuläre Integrale der Gleichung (b), ſo daß das allgemeine Integral dieſer Gleichung:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n \qquad (i)$$

iſt; ſo behaupten wir, daß dieſer Werth von y auch für das allgemeine Integral der Gleichung (a) genommen werden kann, wenn man die Factoren $C_1, C_2 \ldots C_n$ nicht als Conſtanten, ſondern als Functionen von x betrachtet, welche gehörig beſtimmt werden müſſen.

Denn in dieſer Vorausſetzung hat man:

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C_3 y'_3 + \ldots + C_n y'_n + y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 + \ldots + y_n C'_n,$$

wo C'_i die Ableitung von C_i in Beziehung auf x bezeichnet, und wenn die Functionen C_i der Gleichung:

$$y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 + \ldots + y_n C'_n = 0$$

genügen müſſen, ſo bleibt:

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C_3 y'_3 + \ldots + C_n y'_n,$$

wie in dem Falle, wo die Factoren C_i Conſtanten ſind. Aus dieſer letzten Gleichung ergibt ſich:

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C_3 y''_3 + \ldots + C_n y''_n + y'_1 C'_1 + y'_2 C'_2 + y'_3 C'_3 + \ldots + y'_n C'_n,$$

oder blos:

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C_3 y''_3 + \ldots + C_n y''_n,$$

wenn die Ableitungen C'_i der Bedingungsgleichung:

$$y'_1 C'_1 + y'_2 C'_2 + y'_3 C'_3 + \ldots + y'_n C'_n = 0$$

genügen müſſen.

Fährt man auf dieſe Weiſe fort, ſo findet man, daß der durch die Gleichung (i) gegebene Werth von y, welcher nach der Vorausſetzung der Gleichung (b) genügt, auch der Gleichung (a) Genüge leiſtet, wofern die Ableitungen C'_i dem Syſteme von Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 + \ldots + y_n C'_n &= 0 \\
y'_1 C'_1 + y'_2 C'_2 + y'_3 C'_3 + \ldots + y'_n C'_n &= 0 \\
y''_1 C'_1 + y''_2 C'_2 + y''_3 C'_3 + \ldots + y''_n C'_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
y_1^{(n-1)} C'_1 + y_2^{(n-1)} C'_2 + y_3^{(n-1)} C'_3 + \ldots + y_n^{(n-1)} C'_n &= V
\end{aligned}$$

genügen.

Aus dieſen n Gleichungen ergibt ſich nun der Werth jeder Unbekannten C_i als eine gewiſſe Function $\omega_i x$, und folglich gibt eine einfache Quadratur:

$$C_i = \int \omega_i x \, dx + c_i,$$

wo c_i eine neue willkürliche Conſtante bezeichnet. Man erhält alſo auf dieſe Weiſe durch einfache Quadraturen das allgemeine Integral der Gleichung (a) mit den n willkürlichen Conſtanten, welche es geſtattet.

Wir wollen nun annehmen, daß man nur $n-1$ particuläre Integrale der Gleichung (b) kenne, und der Einfachheit der Darſtellung wegen ſtatt der Gleichungen (a) und (b) die Differenzialgleichungen der vierten Ordnung:

$$y^{IV} + Py''' + Qy'' + Ty' + Uy = V \qquad (14)$$
$$y^{IV} + P''' + Qy'' + Ty' + Uy = 0$$

nehmen, wo y_1, y_2, y_3 drei bekannte Functionen von x bezeichnen, welche der letzten Gleichung genügen. Soll die Function:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \qquad (15)$$

der Gleichung (14) genügen, so kann man zwischen den unbekannten Factoren C_1, C_2, C_3 noch die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 &= 0 \\ y'_1 C'_1 + y'_2 C'_2 + y'_3 C'_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

aufstellen, vermöge welcher die Werthe von y', y'' dieselbe Form behalten, als wenn die Factoren C_1, C_2, C_3 constant wären; aber die Werthe von y''', y^{IV} enthalten die ersten und zweiten Ableitungen derselben Factoren, und damit die Function (15) der Gleichung (14) genügt, müssen die Factoren C_1, C_2, C_3 noch der dritten Bedingungsgleichung:

$$C_1(2y'''_1 + Py''_1) + C'_2(2y'''_2 + Py''_2) + C'_3(2y'''_3 + Py''_3)$$
$$+ C''_1 y''_1 + C''_2 y''_2 + C''_3 y''_3 = V \qquad (17)$$

Genüge leisten. Aus den Gleichungen (16) und ihren Differenzialgleichungen leitet man die Werthe von C'_2, C'_3, C''_2, C''_3 als Functionen von $C'_1\, C''_1$ ab, und substituirt sie in die Gleichung (17), welche in Beziehung auf C'_1, x von der zweiten, oder in Beziehung auf C'_1, x von der ersten Ordnung wird. Wird diese Gleichung integrirt, so erhält man den Werth von C_1 als Function von x, und folglich die von C_2, C_3 vermittelst einfacher Quadraturen als Functionen von x. Durch die vier Integrationen oder Quadraturen sind vier willkürliche Constanten eingeführt, so daß das Integral (15) alle erforderliche Allgemeinheit hat.

Verfolgt man ganz denselben Weg, so kann man allgemein darthun, daß die Integration der Gleichung (a) nur von der Integration einer Gleichung der $(n-m)^{ten}$ Ordnung, und von m auf einander folgenden Quadraturen abhängt, wenn man m particuläre Integrale der Gleichung (b) kennt.

Drittes Kapitel.

Ueber die Integration der Differenzialgleichungen durch Reihen und durch bestimmte Integrale.

§. 465. Im Allgemeinen kann man eine Function nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze in eine nach den ganzen Potenzen der unabhängigen veränderlichen Größe geordnete Reihe entwickeln, wenn man zwischen der unabhängigen Veränderlichen und der Function eine Differenzialgleichungen von einer beliebigen Ordnung hat. Denn es sei:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)})$$

diese Differenzialgleichung, so ergeben sich daraus durch neue Differenziationen die Werthe von $y^{(n+1)}, y^{(n+2)}$ und im Allgemeinen die der Ableitungen von

einer beliebigen höhern, als der n^{ten} Ordnung als Functionen von $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$. Andererseits gibt die Maclaurin'sche Formel:

$$y = y_0 + y'_0 \frac{x}{1} + y''_0 \frac{x^2}{1.2} + y'''_0 \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$\cdots + y_0^{(n-1)} \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + y_0^{(n)} \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + y_0^{(n+1)} \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$$

$+ \text{ ꝛc.},$

wo y_0, y'_0, ꝛc. die $x = 0$ entsprechenden Werthe von y, y', ꝛc. bezeichnen. Wenn man also in dem aus der gegebenen Differenzialgleichung und ihren successiven Ableitungen abgeleiteten Ausdrücken von $y^{(n)}, y^{(n+1)}$, ꝛc., $x = 0$, $y = y_0, y' = y'_0$, ꝛc. setzt, so kann man alle Coefficienten der Reihe als Functionen der n frühere Coefficienten $y_0, y'_0, y_0^{(n-1)}$ bestimmen, wo aber die letztere willkürlich bleiben und dem Ausdrucke von y alle Allgemeinheit ertheilen, welche er nur gestattet. Eine solche Reihe kann zur Berechnung der Zahlenwerthe von y für alle Werthe von x, für welche die Reihe convergent wird, dienen.

Nehmen wir z. B. die Differenzialgleichung $y' = -(y + x^2)$, so gibt die eben angedeutete Rechnung:

$$y = y_0 - \frac{x}{1} + y_0 \frac{x^2}{1.2} - y_0 \frac{x^3}{1.2.3}$$

$$+ (y_0 - 6) \frac{x^4}{1.2.3.4} - (y_0 - 6) \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ ꝛc.}$$

Die gegebene Differenzialgleichung gehört zu denen, welche sich unter endlicher Form integriren lassen, und folglich gehört die vorhergehende Reihe auch zu denjenigen, welche summirt werden können. In der That kann man den Ausdruck von y auf die Form:

$$y = (y_0 - 6)\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ ꝛc.}\right)$$

$$+ 6\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\right) = (y_0 - 6)e^{-x} + 6(1 - x) + 3x^2 - x^3,$$

bringen, und dieser Werth von y stimmt mit dem überein, welchen die Gleichung (4) im §. 440 gibt, wenn man für die willkürliche Constante $y_0 - 6$ die ebenfalls willkürliche Constante C setzt.

Betrachten wir noch die Differenzialgleichung:

$$y'' = -xy, \tag{1}$$

so ist die entsprechende Reihenentwickelung:

$$y = y_0 + y'_0 \frac{x}{1} - y_0 \frac{x^3}{1.2.3} - 2y'_0 \frac{x^4}{1.2.3.4}$$

$$+ 4y_0 \frac{x^5}{1.2.3.4.5.6} + 10y'_0 \frac{x^7}{1.2.3\ldots 7} + \text{ ꝛc.} \tag{2}$$

§. 466. Wenn die Differenzialcoefficienten von einer beliebigen Ordnung an für den Werth $x = 0$ unendlich würden, so müßte man die Reihe nicht mehr nach den Potenzen von x, sondern nach den Potenzen von $x - a$ ordnen, wo a ein Werth von x ist, welcher die Differenzialcoefficienten nicht unendlich macht. Man hätte folglich:

$$y = y_a + y'_a \frac{x-a}{1} + y''_a \frac{(x-a)^2}{1.2} + y'''_a \frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}, \qquad (3)$$

wo y_a, y'_a, y''_a ꝛc. die $x = a$ entſprechenden Werthe von y, y', y'', ꝛc. bezeichnen.

Es ſei z. B.:

$$y' = -\left(\frac{y}{x} + x\right), \quad \text{oder} \quad xy' + y + x^2 = 0$$

die gegebene Differenzialgleichung, ſo macht der Werth $x = 0$ die Größe y'_0 unendlich, wofern y_0 nicht verſchwindet. Alsdann kann die Maclaurin'ſche Reihe, mit Ausnahme dieſes beſondern Falles, nicht unter der gewöhnlichen Form angewandt werden, und wenn man die angedeutete Transformation damit vornimmt, ſo findet man:

$$y = y_a - \frac{y_a + a^2}{a} \cdot \frac{x-a}{1^*}$$

$$+ \frac{2y_a}{a^2} \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2} - \frac{2(3y_a + a^2)}{a^3} \cdot \frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.} \qquad (4)$$

wo a einen beliebigen von Null verſchiedenen Werth von x bezeichnet.

Die Differenziation der gegebenen Gleichung gibt:

$$xy'' + 2y' + 2x = 0, \quad xy''' + 3y'' + 2 = 0, \quad xy^{\text{IV}} + 4y''' = 0, \text{ ꝛc.},$$

woraus in der Vorausſetzung, daß zugleich $x = 0$, $y = 0$ iſt, indem keine der abgeleiteten Functionen unendlich wird, folgt:

$$y'_0 = 0, \quad y''_0 = -\tfrac{2}{3}, \quad y'''_0 = 0, \quad y^{\text{IV}}_0 = 0, \text{ ꝛc.}$$

Es iſt alſo $y = -\frac{1}{3}x^2$ ein der Vorausſetzung $y_0 = 0$ entſprechendes particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung. In der That iſt nach §. 440 das Integral dieſer Gleichung unter endlicher Form:

$$y = \frac{C}{x} - \frac{1}{3}x^2$$

und dieſer Werth von y, welcher ſich nicht nach den Potenzen von x entwickeln läßt, ſo lange die Conſtante C nicht Null iſt, gibt die Reihe (4) wieder, wenn man ſie nach den ganzen Potenzen von $x - a$ entwickelt, wofern man, wie es geſtattet iſt, $C = a\,y_a + \frac{1}{3}a^3$ ſetzt.

§. 467. Es ſei ferner die Differenzialgleichung:

$$y'' = -\frac{y}{x}, \quad \text{oder} \quad xy'' + y = 0 \qquad (5)$$

gegeben, ſo macht der Werth $x = 0$ die Größe y''_0 unendlich, wofern y_0 nicht verſchwindet. Man muß alſo die Reihe (3) anwenden, welche ſich in:

$$y = y_a + y'_a \cdot \frac{x-a}{1} - \frac{y_a}{a} \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2} + \frac{y_a - ay'_a}{a^2} \cdot \frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.} \qquad (6)$$

verwandelt, und von zwei willkürlichen Conſtanten y_a, y'_a abhängt.

Die ſucceſſiven Ableitungen der gegebenen Gleichung ſind:

$$xy''' + y'' - y' = 0, \quad xy^{\text{IV}} + 2y''' + y'' = 0$$

$$xy^{\text{V}} + 3y^{\text{IV}} + y''' = 0, \text{ ꝛc.},$$

ſo daß in der Vorausſetzung, daß y für $x = 0$ verſchwindet, und keine der Ableitungen y', y'', y''' für dieſen Werth von x unendlich wird:

$$y''_0 = -y'_0, \quad y'''_0 = \frac{y'_0}{1.2}, \quad y^v_0 = -\frac{y'_0}{1.2.3}, \text{ ꝛc.}$$

und folglich:

$$y = y'_0\left(x - \frac{1}{1}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}\right) \quad (7)$$

iſt. Aber da dieſe Entwickelung nur von der willkürlichen Conſtanten y'_0 abhängt, ſo drückt ſie nur ein particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung aus, welches der Vorausſetzung $y_0 = 0$ entſpricht.

Wir wollen durch y_1 die Function von x bezeichnen, welche die convergente Reihe:

$$x - \frac{1}{1}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

beſtimmt, ſo kann man das allgemeine Integral der Gleichung (5), welche in Beziehung auf $y = C_1 y_1$ linear iſt, wofern man C_1 nicht mehr als eine Conſtante, ſondern als eine Function von x betrachtet, welche man nach dem Verfahren im §. 464 beſtimmen muß, erhalten. Auf dieſe Weiſe ergibt ſich:

$$y_1 C''_1 + 2C'_1 y'_1 = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{C'_1}\cdot\frac{dC'_1}{dx} + \frac{2}{y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx} = 0,$$

woraus durch zwei ſucceſſive Integrationen folgt:

$$C'_1 = \frac{c_1}{y_1^2}, \quad C_1 = c_1\int\frac{dx}{y_1^2} + c_2,$$

wo c_1, c_2 zwei willkürliche Conſtanten bezeichnen. Das allgemeine Integral der Gleichung (5) wird alſo außer der Reihe (6) auch durch:

$$y = y_1\left(c_1\int\frac{dx}{y_1^2} + c_2\right), \quad \text{oder} \quad y = c_1 y_1\left(\int\frac{dx}{y_1^2} + c_2\right)$$

ausgedrückt.

§. 468. Die durch eine Differenzialgleichung beſtimmte Function kann oft in eine nach den negativen oder gebrochenen Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortſchreitende Reihe entwickelt werden. Wenn ſolche Entwickelungen möglich ſind, ſo erhält man ſie durch die Methode der unbeſtimmten Coefficienten, deren Anwendung faſt immer vor der directen Anwendung der Maclaurin'ſchen Reihe den Vorzug verdient, ſelbſt, wenn die Entwickelung nach den ganzen und poſitiven Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortſchreiten kann, wie das folgende Beiſpiel zeigen wird.

Wir wollen die Differenzialgleichung:

$$y'' = kx^n y \quad (8)$$

nehmen, welche die Gleichungen (1) und (5) als beſondere Fälle unter ſich begreift, ſo kommt es darauf an, zu wiſſen, ob man das Integral derſelben durch die Reihe:

$$y = Ax^\alpha + A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + A_3 x^{\alpha_3} + \text{ꝛc.}$$

darſtellen kann, wenn man die Coefficienten A_i und die Exponenten α_i, welche poſitiv oder negativ, ganz oder gebrochen ſein können, gehörig beſtimmt.

Die Subſtitution dieſes Werthes von y in die gegebene Differenzialgleichung gibt:

$$A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+A_1\alpha_1(\alpha_1-1)x^{\alpha_1-2}+A_2\alpha_2(\alpha_2-1)x^{\alpha_2-2}+\text{ꝛc.}$$
$$=kAx^{\alpha+n}+kA_1x^{\alpha_1+n}+kA_2x^{\alpha_2+n}+\text{ꝛc.}$$

Dieſe Gleichung kann aber nur dann identiſch ſein, wenn die Gleichungen:

$$\alpha(\alpha-1)=0 \qquad (9)$$
$$\alpha_i=\alpha+i(n+2)$$
$$A_i\alpha_i(\alpha_i-1)=kA_{i-1}$$

ſtattfinden, vermittelſt welcher alle Exponenten α_i numeriſch beſtimmt ſind, und alle Coefficienten A_i ſich als Functionen des Coefficienten A, welcher die Stelle der willkürlichen Conſtante vertritt, ausdrücken laſſen.

Der Gleichung (9) kann man auf zwei Arten genügen, indem man $\alpha=0$, oder $\alpha=1$ ſetzt. Dieſen beiden Auflöſungen entſprechen zwei verſchiedene Reihen, wovon jede einen willkürlichen Coefficienten enthält, und welche beide der Gleichung (8), wovon ſie particuläre Integrale ſind, Genüge leiſten. Die Summe beider Reihen gibt folglich das allgemeine Integral (§. 455) und wenn man durch C_0, C_1 reſp. die $\alpha=0$, $\alpha=1$ entſprechenden Werthe des Coefficienten A bezeichnet; ſo findet man für das vollſtändige Integral leicht folgenden Reihenausdruck:

$$y=C_0[1+\frac{kx^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{k^2x^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}+\text{ꝛc.}]$$
$$+C_1x[1+\frac{kx^{n+2}}{(n+2)(n+3)}+\frac{k^2x^{2n+4}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}+\text{ꝛc.}].$$

So oft der Exponent n eine ganze poſitive Zahl iſt, ſchreitet dieſe Reihe nach den ganzen und poſitiven Potenzen von x fort und ſtimmt nothwendig mit der überein, welche ſich aus der Maclaurin'ſchen Formel ergeben würde, und die Conſtanten C_0, C_1 drücken alsdann die Werthe von y_0, y'_0 aus. Setzt man insbeſondere $k=-1$, $n=1$, ſo kommt man wieder auf die Reihe (2), und dieſe letzte Ableitung derſelben hat den Vortheil, das Bildungsgeſetz der ſucceſſiven Coefficienten deutlich vor Augen zu legen.

Wenn in der Reihe weniger Coefficienten unbeſtimmt bleiben, als der Ordnungse.ponent der Differenzialgleichung Einheiten hat, ſo drückt die Reihe nur ein particuläres Integral aus, und dieſes iſt ein Beweis, daß ſich die Function nur in eine Reihe von dieſer Form entwickeln läßt, wenn die willkürlichen Conſtanten Bedingungen genügen müſſen, welche die Anzahl derſelben vermindern, und die Allgemeinheit der gegebenen Differenzialgleichung beſchränken.

Wenn man z. B. in der Gleichung (8), $k=-1$, $n=-1$ ſetzte, ſo daß ſie mit der Gleichung (5) übereinſtimmte; ſo würden die verſchiedenen Glieder der Reihe, womit C_0 multiplicirt iſt, von dem zweiten an unendlich Dieſe Reihe muß alſo verworfen werden, weil ſie kein particuläres Integral der Gleichung (8) mehr ausdrückt, und wobei wohl zu bemerken iſt, daß die Reihe, womit C_1 multiplicirt iſt, alsdann mit der übereinſtimmt, womit y'_0 in der Gleichung (7) multiplicirt iſt.

§. 469. Nach dem im §. 461 Geſagten ſinkt die Gleichung (8) zur erſten Ordnung herab, indem ſie aber aufhört, eine lineare Differenzialgleichung zu ſein, wenn man $y=e^{\int z dx}$ ſetzt, ſo daß man für die transformirte Gleichung mit z

$$y = e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x) + C_3 e^{m_3 x} + \ldots + C_n e^{m_n x},$$

so wird der Gleichung (b) genügt, deren allgemeines Integral man auf dieſe Weiſe erhält, weil die n Conſtanten $A_1, B_1, C_3, \ldots C_n$ unter ſich irreductibel ſind.

Eben ſo würde man finden, daß man in dem Falle drei gleicher Wurzeln das Trinom:

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} \qquad (13)$$

durch:

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x + C_1 x^2)$$

erſetzen muß, u. ſ. f.

Die Form, welche das allgemeine Integral in dem Falle annimmt, wo die Gleichung (m) gleiche Wurzeln hat, ergibt ſich auch aus folgender Rechnung.

Statt unmittelbar $m_2 = m_1$ zu ſetzen, wollen wir zuvörderſt $m_2 = m_1 + \varepsilon$ ſetzen, welches

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} = e^{m_1 x}(C_1 + C_2 e^{\varepsilon x})$$

$$= e^{m_1 x}[C_1 + C_2(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{1.2} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.})]$$

gibt, indem für $e^{\varepsilon x}$ die immer convergirende Reihenentwickelung geſetzt iſt. Es iſt erlaubt, dieſen Ausdruck dadurch auf eine andere Form zu bringen, daß man die willkürlichen Conſtanten verändert, und zu dem Zwecke $C_1 + C_2 = A_1$, $C_2 \varepsilon = B_1$ ſetzt. Auf dieſe Weiſe verwandelt ſich der vorhergehende Ausdruck in:

$$e^{m_1 x}\left[A_1 + B_1 x + B_1\left(\frac{\varepsilon x^2}{1.2} + \frac{\varepsilon^2 x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}\right)\right],$$

und wenn man nun $\varepsilon = 0$ ſetzt, ſo reducirt er ſich auf den zweiten Theil der Gleichung (12).

Da in dem Falle, wo die beiden Wurzeln m_1, m_2, einander gleich werden, das Trinom (13) durch:

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x) + C_3 e^{m_3 x}$$

erſetzt iſt, ſo kann man $m_3 = m_1 + \varepsilon$ ſetzen, wodurch der vorhergehende Ausdruck in folgenden verwandelt wird:

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x + C_3 e^{\varepsilon x})$$

$$= e^{m_1 x}[A_1 + B_1 x + C_3(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{1.2} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.})].$$

Auch kann man die Conſtanten verändern, indem man

$$A_1 + C_3 = D_1, \quad B_1 + C_3 \varepsilon = E_1, \quad \tfrac{1}{2} C_3 \varepsilon^2 = F_1$$

ſetzt, ſo daß ſich der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung in:

$$e^{m_1 x}\left[D_1 + E_1 x + F_1 x^2 + F_1\left(\frac{\varepsilon x^3}{3} + \text{ꝛc.}\right)\right]$$

verwandelt und ſich für $\varepsilon = 0$ auf:

$$e^{m_1 x}(D_1 + F_1 x + F_1 x^2)$$

reducirt. Dieſelbe Methode iſt offenbar auch auf den Fall einer beliebigen Anzahl gleicher Wurzeln anwendbar. Es iſt zweckmäßig, dieſe Methode zu kennen, welche die Analyſten in ähnlichen und complicirtern Fällen oft angewandt haben, obgleich ſie einigen Schwierigkeiten unterliegt, welche verſchwin-

den, wenn man die dem allgemeinen Integrale in der Voraussetzung, wo die Gleichung (m) gleiche Wurzeln bekommt, gegebene Form direct rechtfertigt, wie wir es zuvor gethan haben.

§. 461. Die Gleichung (b) läßt sich selten integriren, wenn die Coefficienten Functionen von x sind. Betrachtet man z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

und setzt:

$$y = e^{\int z dx}, \qquad (d)$$

so verwandelt sie sich in:

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + Pz + Q = 0,$$

und wenn sich diese Gleichung der ersten Ordnung zwischen z und x durch Trennung der Veränderlichen, oder auf andere Weise integriren läßt, so erhält man den Werth von y als Function von x durch die Quadraturen.

Allgemein, wenn man in die Gleichung (b) den durch die Gleichung (d) gegebenen Werth von y als Function von z substituirt, so ist die transformirte Gleichung mit z und x nur noch von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, aber keine lineare Gleichung mehr.

Die linearen Differenzialgleichungen von der Form:

$$(a+bx)^n y^{(n)} + P(a+bx)^{n-1} y^{(n-1)} + Q(a+bx)^{n-2} y^{(n-2)} \ldots$$
$$\ldots + T(a+bx) + U = 0, \qquad (e)$$

wo $P, Q, \ldots T, U$ wieder constante Coefficienten bezeichnen, werden integrirt, wenn man $y = (a+bx)^m$ setzt, so daß man zur Bestimmung von m die algebraische Gleichung des m^{ten} Grades:

$$m(m-1)\ldots(m-n+1) + \frac{P}{b} \cdot m(m-1)\ldots(m-n+2)$$
$$+ \frac{Q}{b^2} \cdot m(m-1)\ldots(m-n+3) + \ldots + \frac{Tm}{b^{n-1}} + \frac{U}{b^n} = 0$$

hat, und wenn man die n Wurzeln dieser Gleichung mit $m_1, m_2, \ldots m_n$ und mit $C_1, C_2, \ldots C_n$ willkürliche Constanten bezeichnet, so ist das allgemeine Integral der Gleichung (e):

$$y = C_1(a+bx)^{m_1} + C_2(a+bx)^{m_2} + \ldots + C_n(a+bx)^{m_n},$$

welches folglich transcendent ist, wofern die Gleichung mit m nicht lauter rationale Wurzeln hat.

§. 462. Wenn man einen particulären Werth y_1 könnte, welcher der Gleichung (b) zu genügen vermag, so könnte man die Ordnung der Gleichung (b), und selbst die der Gleichung (a) um eine Einheit erniedrigen, zu welchem Zwecke man nur

$$y = y_1 \int z dx \qquad (f)$$

zu setzen braucht, wo z, wie oben, eine neue Veränderliche, die eine Function von x ist, bezeichnet. In dieser Beziehung wollen wir bemerken, daß man, wenn u, v beliebige Functionen derselben unabhängigen veränderlichen Größe bezeichnen, hat:

$$d \cdot uv = udv + vdu$$
$$d^2 \cdot uv = ud^2u + 2dud v + vd^2u$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d^n \cdot uv = ud^n v + \frac{n}{1} \cdot dud^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2u d^{n-2}v + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1} \cdot dv d^{n-1}u + d^n u.$$

und vermöge dieſer Formeln gibt die Subſtitution des Werthes von y in die Gleichung (a):

$$y_1 z^{(n-1)} + (ny'_1 + Py_1) z^{(n-2)}$$
$$+ \left[\frac{n(n-1)}{1.2} y''_1 + (n-1) Py'_1 + Qy_1\right] z^{(n-3)} + \ldots$$
$$\ldots + (y_1^{(n)} + Py_1^{(n-1)} + Qy_1^{(n-2)} + \ldots + Uy_1) \int z dx = V.$$

Nun iſt aber der Coefficient von $\int z dx$ in dieſer Gleichung nach der Vorausſetzung $= 0$, weil y_1 ein particuläres Integral der Gleichung (b) iſt, und wenn man dieſe Gleichung durch y_1, welches eine bekannte Function von x iſt, dividirt; ſo wird ſie folglich auch die Form:

$$z^{(n-1)} + P_1 z^{(n-2)} + Q_1 z^{(n-3)} + \ldots + T_1 z = \frac{V}{y_1}, \qquad (a_1)$$

zurückgeführt, indem $P_1, Q_1, \ldots T_1$ wie $P, Q, \ldots T$ bekannte Functionen von x ſind, und die Ordnung der Gleichung (a) iſt um eine Einheit erniedrigt.

Wenn man nicht die Gleichung (a), ſondern die Gleichung (b) integriren will, ſo hat man ſtatt der letzten erhaltenen Gleichung folgende:

$$z^{(n-1)} + P_1 z^{(n-2)} + Q_1 z^{(n-3)} + \ldots + T_1 z = 0. \qquad (b_1)$$

Wenn man in dieſer Vorausſetzung einen zweiten particulären Werth y kennte, welcher der Gleichung (b) genügte, ſo müßte einer der aus der Gleichung (b_1) gezogenen Werthe von z der Gleichung (f), nachdem darin y_2 für y geſetzt iſt, genügen, und wenn man dieſen particulären Werth von z mit z_1 bezeichnete, ſo hätte man folglich:

$$y_2 = y_1 \int z_1 dx, \text{ oder } z_1 = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}.$$

Wenn man alſo zwei particuläre Integrale der Gleichung (b) kennt, ſo kennt man dadurch ein particuläres Integral der Gleichung (b_1), und folglich wird die Ordnung der Gleichung (b_1) durch die Transformation $z = z_1 \int u dx$ um eine Einheit erniedrigt. Da ſich dieſe Schlüſſe allmälig weiter fortſetzen laſſen, ſo folgt, daß, wenn man m particuläre Integrale der Gleichung (b) kennt, die allgemeine Integration dieſer Gleichung, und ſelbſt die der Gleichung (a) auf die Integration einer Differenzialgleichung von der Ordnung $n - m$ zurückgeführt iſt, ſo daß man, wenn dieſe integrirt wird, das allgemeine Integral der Gleichung (a) durch einfache Quadraturen erhält. Dieſes ſchöne Theorem verdankt man Lagrange; allein der vorhin gegebene Beweis deſſelben, gewährt, wie Libri in einer ſehr intereſſanten Abhandlung *) gezeigt hat, den Vortheil, die zwiſchen der Theorie der algebraiſchen Gleichungen und

*) Crelle's Journal der Math. Bd. 10.

der der Integration der linearen Differenzialgleichungen ſtattfindenden Analogien in das hellſte Licht zu ſetzen.

§. 463. Wenn die Coefficienten $P, Q, \ldots U$ der Gleichung (a) conſtante Zahlen ſind, indem das letzte Glied V allein eine Function von x iſt, ſo kennt man n particuläre Integrale der Gleichung (b):

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}, \ldots y_n = e^{m_n x},$$

wo $m_1, m_2, \ldots m_n$ wieder die Wurzeln der Gleichung (m) bezeichnen. Die allgemeine Integration der Gleichung (a) iſt alſo auf die Quadraturen zurückgeführt.

Es ſei z. B. die lineare Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y'' + Py' + Qy = V$$

gegeben, wo P, Q conſtante Zahlen bezeichnen, ſo ſind m_1, m_2 die Wurzeln der Zahlengleichung:

$$m^2 + Pm + Q = 0, \tag{g}$$

und man hat:

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}.$$

Setzt man:

$$y = y_1 \int z\,dx = e^{m_1 x} \int z\,dx,$$

ſo iſt die transformirte Gleichung mit z, wegen $P = -(m_1 + m_2)$, folgende:

$$z' + (2m_1 + P)z = Ve^{-m_1 x}, \quad \text{oder} \quad z' - (m_2 - m_1)z = Ve^{-m_1 x}.$$

Setzt man außerdem:

$$z = z_1 \int u\,dx = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} \int u\,dx = (m_2 - m_1) e^{(m_2 - m_1)x} \int u\,dx,$$

ſo gibt die transformirte Gleichung mit u:

$$u = \frac{Ve^{-m_2 x}}{m_2 - m_1},$$

woraus folgt:

$$z = e^{(m_2 - m_1)x} \int Ve^{-m_2 x}\,dx$$

$$y = e^{m_1 x} \int dx \left[e^{(m_2 - m_1)x} \int Ve^{-m_2 x}\,dx\right],$$

oder, wenn man theilweiſe integrirt:

$$y = \frac{e^{m_2 x} \int Ve^{-m_2 x}\,dx - e^{m_1 x} \int Ve^{-m_1 x}\,dx}{m_2 - m_1}, \tag{h}$$

wo jedes der beiden unbeſtimmten Integrale, als eine willkürliche Conſtante enthaltend, betrachtet wird.

Wenn m_1, m_2 zwei conjugirte imaginäre Wurzeln ſind, von der Form $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, ſo verwandelt ſich der vorhergehende Ausdruck in:

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} (\sin. \beta x \int Ve^{-\alpha x} \cos. \beta x \cdot dx - \cos. \beta x \int Ve^{-\alpha x} \sin. \beta x \cdot dx).$$

Wenn endlich $m_2 = m_1$ wäre, ſo erſchiene der zweite Theil der Gleichung (h) unter der Form $\frac{0}{0}$; aber wenn man in Beziehung auf den Parameter m_2 vom Zähler und Nenner die Ableitungen nimmt, und dann $m_2 = m_1$ ſetzt, ſo findet man für dieſen Fall:

$$y = e^{m_1 x} (x \int Ve^{-m_1 x}\,dx - \int Ve^{-m_1 x} x\,dx).$$

§. 464. Wir können dieſen Gegenſtand nicht verlaſſen, ohne die Methode anzugeben, welche man gewöhnlich zum Beweiſe des Lehrſatzes im §. 462 anwendet.

Wir wollen zuvörderſt annehmen, man kenne n particuläre Integrale der Gleichung (b), ſo daß das allgemeine Integral dieſer Gleichung:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n \qquad (i)$$

iſt; ſo behaupten wir, daß dieſer Werth von y auch für das allgemeine Integral der Gleichung (a) genommen werden kann, wenn man die Factoren $C_1, C_2 \ldots C_n$ nicht als Conſtanten, ſondern als Functionen von x betrachtet, welche gehörig beſtimmt werden müſſen.

Denn in dieſer Vorausſetzung hat man:

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C_3 y'_3 + \ldots + C_n y'_n + y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 + \ldots + y_n C'_n,$$

wo C'_i die Ableitung von C_i in Beziehung auf x bezeichnet, und wenn die Functionen C_i der Gleichung:

$$y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 + \ldots + y_n C'_n = 0$$

genügen müſſen, ſo bleibt:

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C_3 y'_3 + \ldots + C_n y'_n,$$

wie in dem Falle, wo die Factoren C_i Conſtanten ſind. Aus dieſer letzten Gleichung ergibt ſich:

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C_3 y''_3 + \ldots + C_n y''_n + y'_1 C'_1 + y'_2 C'_2 + y'_3 C'_3 + \ldots + y'_n C'_n,$$

oder blos:

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C_3 y''_3 + \ldots + C_n y''_n,$$

wenn die Ableitungen C'_i der Bedingungsgleichung:

$$y'_1 C'_1 + y'_2 C'_2 + y'_3 C'_3 + \ldots + y'_n C'_n = 0$$

genügen müſſen.

Fährt man auf dieſe Weiſe fort, ſo findet man, daß der durch die Gleichung (i) gegebene Werth von y, welcher nach der Vorausſetzung der Gleichung (b) genügt, auch der Gleichung (a) Genüge leiſtet, wofern die Ableitungen C'_i dem Syſteme von Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 + \ldots + y_n C'_n &= 0 \\
y'_1 C'_1 + y'_2 C'_2 + y'_3 C'_3 + \ldots + y'_n C'_n &= 0 \\
y''_1 C'_1 + y''_2 C'_2 + y''_3 C'_3 + \ldots + y''_n C'_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots

$$y^{IV} + Py''' + Qy'' + Ty' + Uy = V \qquad (14)$$
$$y^{IV} + P''' + Qy'' + Ty' + Uy = 0$$

nehmen, wo y_1, y_2, y_3 drei bekannte Functionen von x bezeichnen, welche der letzten Gleichung genügen. Soll die Function:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \qquad (15)$$

der Gleichung (14) genügen, so kann man zwischen den unbekannten Factoren C_1, C_2, C_3 noch die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 &= 0 \\ y'_1 C'_1 + y'_2 C'_2 + y'_3 C'_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

aufstellen, vermöge welcher die Werthe von y', y'' dieselbe Form behalten, als wenn die Factoren C_1, C_2, C_3 constant wären; aber die Werthe von y''', y^{IV} enthalten die ersten und zweiten Ableitungen derselben Factoren, und damit die Function (15) der Gleichung (14) genügt, müssen die Factoren C_1, C_2, C_3 noch der dritten Bedingungsgleichung:

$$C_1(2y'''_1 + Py''_1) + C'_2(2y'''_2 + Py''_2) + C'_3(2y'''_3 + Py''_3)$$
$$+ C''_1 y''_1 + C''_2 y''_2 + C''_3 y''_3 = V \qquad (17)$$

Genüge leisten. Aus den Gleichungen (16) und ihren Differenzialgleichungen leitet man die Werthe von C'_2, C'_3, C''_2, C''_3 als Functionen von $C'_1\, C''_1$ ab, und substituirt sie in die Gleichung (17), welche in Beziehung auf C'_1, x von der zweiten, oder in Beziehung auf C'_1, x von der ersten Ordnung wird. Wird diese Gleichung integrirt, so erhält man den Werth von C_1 als Function von x, und folglich die von C_2, C_3 vermittelst einfacher Quadraturen als Functionen von x. Durch die vier Integrationen oder Quadraturen sind vier willkürliche Constanten eingeführt, so daß das Integral (15) alle erforderliche Allgemeinheit hat.

Verfolgt man ganz denselben Weg, so kann man allgemein darthun, daß die Integration der Gleichung (a) nur von der Integration einer Gleichung der $(n - m)^{ten}$ Ordnung, und von m auf einander folgenden Quadraturen abhängt, wenn man m particuläre Integrale der Gleichung (b) kennt.

Drittes Kapitel.

Ueber die Integration der Differenzialgleichungen durch Reihen und durch bestimmte Integrale.

§. 465. Im Allgemeinen kann man eine Function nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze in eine nach den ganzen Potenzen der unabhängigen veränderlichen Größe geordnete Reihe entwickeln, wenn man zwischen der unabhängigen Veränderlichen und der Function eine Differenzialgleichungen von einer beliebigen Ordnung hat. Denn es sei:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)})$$

diese Differenzialgleichung, so ergeben sich daraus durch neue Differenziationen die Werthe von $y^{(n+1)}, y^{(n+2)}$ und im Allgemeinen die der Ableitungen von

einer beliebigen höhern, als der n^{ten} Ordnung als Functionen von $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$. Andererseits gibt die Maclaurin'sche Formel:

$$y = y_0 + y'_0 \frac{x}{1} + y''_0 \frac{x^2}{1.2} + y'''_0 \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$\cdots + y_0^{(n-1)} \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + y_0^{(n)} \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + y_0^{(n+1)} \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$$

$+ \text{ꝛc.},$

wo y_0, y'_0, ꝛc. die $x = 0$ entsprechenden Werthe von y, y', ꝛc. bezeichnen. Wenn man also in dem aus der gegebenen Differenzialgleichung und ihren successiven Ableitungen abgeleiteten Ausdrücken von $y^{(n)}, y^{(n+1)}$, ꝛc., $x = 0$, $y = y_0, y' = y'_0$, ꝛc. setzt, so kann man alle Coefficienten der Reihe als Functionen der n frühere Coefficienten $y_0, y'_0, y_0^{(n-1)}$ bestimmen, wo aber die letztere willkürlich bleiben und dem Ausdrucke von y alle Allgemeinheit ertheilen, welche er nur gestattet. Eine solche Reihe kann zur Berechnung der Zahlenwerthe von y für alle Werthe von x, für welche die Reihe convergent wird, dienen.

Nehmen wir z. B. die Differenzialgleichung $y' = -(y + x^2)$, so gibt die eben angedeutete Rechnung:

$$y = y_0 - \frac{x}{1} + y_0 \frac{x^2}{1.2} - y_0 \frac{x^3}{1.2.3}$$

$$+ (y_0 - 6) \frac{x^4}{1.2.3.4} - (y_0 - 6) \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ꝛc.}$$

Die gegebene Differenzialgleichung gehört zu denen, welche sich unter endlicher Form integriren lassen, und folglich gehört die vorhergehende Reihe auch zu denjenigen, welche summirt werden können. In der That kann man den Ausdruck von y auf die Form:

$$y = (y_0 - 6)\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ 6\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\right) = (y_0 - 6)e^{-x} + 6(1 - x) + 3x^2 - x^3,$$

bringen, und dieser Werth von y stimmt mit dem überein, welchen die Gleichung (4) im §. 440 gibt, wenn man für die willkürliche Constante $y_0 - 6$ die ebenfalls willkürliche Constante C setzt.

Betrachten wir noch die Differenzialgleichung:

$$y'' = -xy, \tag{1}$$

so ist die entsprechende Reihenentwickelung:

$$y = y_0 + y'_0 \frac{x}{1} - y_0 \frac{x^3}{1.2.3} - 2y'_0 \frac{x^4}{1.2.3.4}$$

$$+ 4y_0 \frac{x^5}{1.2.3.4.5.6} + 10y'_0 \frac{x^7}{1.2.3\ldots 7} + \text{ꝛc.} \tag{2}$$

§. 466. Wenn die Differenzialcoefficienten von einer beliebigen Ordnung an für den Werth $x = 0$ unendlich würden, so müßte man die Reihe nicht mehr nach den Potenzen von x, sondern nach den Potenzen von $x - a$ ordnen, wo a ein Werth von x ist, welcher die Differenzialcoefficienten nicht unendlich macht. Man hätte folglich:

$$y = y_a + y'_a \frac{x-a}{1} + y''_a \frac{(x-a)^2}{1.2} + y'''_a \frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}, \qquad (3)$$

wo y_a, y'_a, y''_a ꝛc. die $x = a$ entſprechenden Werthe von y, y', y'', ꝛc. bezeichnen.

Es ſei z. B.:

$$y' = -\left(\frac{y}{x} + x\right), \quad \text{oder} \quad xy' + y + x^2 = 0$$

die gegebene Differenzialgleichung, ſo macht der Werth $x = 0$ die Größe y'_0 unendlich, wofern y_0 nicht verſchwindet. Alsdann kann die Maclaurin'ſche Reihe, mit Ausnahme dieſes beſondern Falles, nicht unter der gewöhnlichen Form angewandt werden, und wenn man die angedeutete Transformation damit vornimmt, ſo findet man:

$$y = y_a - \frac{y_a + a^2}{a} \cdot \frac{x-a}{1} + \frac{2y_a}{a^2} \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2} - \frac{2(3y_a + a^2)}{a^3} \cdot \frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.} \qquad (4)$$

wo a einen beliebigen von Null verſchiedenen Werth von x bezeichnet.

Die Differenziation der gegebenen Gleichung gibt:

$$xy'' + 2y' + 2x = 0, \quad xy''' + 3y'' + 2 = 0, \quad xy^{\text{IV}} + 4y''' = 0, \text{ ꝛc.},$$

woraus in der Vorausſetzung, daß zugleich $x = 0$, $y = 0$ iſt, indem keine der abgeleiteten Functionen unendlich wird, folgt:

$$y'_0 = 0, \quad y''_0 = -\tfrac{2}{1}, \quad y'''_0 = 0, \quad y^{\text{IV}}_0 = 0, \text{ ꝛc.}$$

Es iſt alſo $y = -\frac{1}{3}x^3$ ein der Vorausſetzung $y_0 = 0$ entſprechendes particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung. In der That iſt nach §. 440 das Integral dieſer Gleichung unter endlicher Form:

$$y = \frac{C}{x} - \frac{1}{3}x^3$$

und dieſer Werth von y, welcher ſich nicht nach den Potenzen von x entwickeln läßt, ſo lange die Conſtante C nicht Null iſt, gibt die Reihe (4) wieder, wenn man ſie nach den ganzen Potenzen von $x - a$ entwickelt, wofern man, wie es geſtattet iſt, $C = a\,y_a + \frac{1}{3}a^3$ ſetzt.

§. 467. Es ſei ferner die Differenzialgleichung:

$$y'' = -\frac{y}{x}, \quad \text{oder} \quad xy'' + y = 0 \qquad (5)$$

gegeben, ſo macht der Werth $x = 0$ die Größe y''_0 unendlich, wofern y_0 nicht verſchwindet. Man muß alſo die Reihe (3) anwenden, welche ſich in:

$$y = y_a + y'_a \cdot \frac{x-a}{1} - \frac{y_a}{a} \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2} + \frac{y_a - ay'_a}{a^2} \cdot \frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.} \qquad (6)$$

verwandelt, und von zwei willkürlichen Conſtanten y_a, y'_a abhängt.

Die ſucceſſiven Ableitungen der gegebenen Gleichung ſind:

$$xy''' + y'' - y' = 0, \quad xy^{\text{IV}} + 2y''' + y'' = 0$$
$$xy^{\text{V}} + 3y^{\text{IV}} + y''' = 0, \text{ ꝛc.},$$

ſo daß in der Vorausſetzung, daß y für $x = 0$ verſchwindet, und keine der Ableitungen y', y'', y''' für dieſen Werth von x unendlich wird:

$$y''_0 = -y'_0, \quad y'''_0 = \frac{y'_0}{1.2}, \quad y^{v} = -\frac{y'_0}{1.2.3}, \text{ ꝛc.}$$

und folglich:

$$y = y'_0\left(x - \frac{1}{1}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}\right) \quad (7)$$

iſt. Aber da dieſe Entwickelung nur von der willkürlichen Conſtanten y'_0 abhängt, ſo drückt ſie nur ein particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung aus, welches der Vorausſetzung $y_0 = 0$ entſpricht.

Wir wollen durch y_1 die Function von x bezeichnen, welche die convergente Reihe:

$$x - \frac{1}{1}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

beſtimmt, ſo kann man das allgemeine Integral der Gleichung (5), welche in Beziehung auf $y = C_1 y_1$ linear iſt, wofern man C_1 nicht mehr als eine Conſtante, ſondern als eine Function von x betrachtet, welche man nach dem Verfahren im §. 464 beſtimmen muß, erhalten. Auf dieſe Weiſe ergibt ſich:

$$y_1 C''_1 + 2C'_1 y'_1 = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{C'_1}\cdot\frac{dC'_1}{dx} + \frac{2}{y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx} = 0,$$

woraus durch zwei ſucceſſive Integrationen folgt:

$$C'_1 = \frac{c_1}{y_1^2}, \quad C_1 = c_1\int\frac{dx}{y_1^2} + c_2,$$

wo c_1, c_2 zwei willkürliche Conſtanten bezeichnen. Das allgemeine Integral der Gleichung (5) wird alſo außer der Reihe (6) auch durch:

$$y = y_1\left(c_1\int\frac{dx}{y_1^2} + c_2\right), \quad \text{oder} \quad y = c_1 y_1\left(\int\frac{dx}{y_1^2} + c_2\right)$$

ausgedrückt.

§. 468. Die durch eine Differenzialgleichung beſtimmte Function kann oft in eine nach den negativen oder gebrochenen Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortſchreitende Reihe entwickelt werden. Wenn ſolche Entwickelungen möglich ſind, ſo erhält man ſie durch die Methode der unbeſtimmten Coefficienten, deren Anwendung faſt immer vor der directen Anwendung der Maclaurin'ſchen Reihe den Vorzug verdient, ſelbſt, wenn die Entwickelung nach den ganzen und poſitiven Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortſchreiten kann, wie das folgende Beiſpiel zeigen wird.

Wir wollen die Differenzialgleichung:

$$y'' = kx^n y \quad (8)$$

nehmen, welche die Gleichungen (1) und (5) als beſondere Fälle unter ſich begreift, ſo kommt es darauf an, zu wiſſen, ob man das Integral derſelben durch die Reihe:

$$y = Ax^{\alpha} + A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + A_3 x^{\alpha_3} + \text{ꝛc.}$$

darſtellen kann, wenn man die Coefficienten A_i und die Exponenten α_i, welche poſitiv oder negativ, ganz oder gebrochen ſein können, gehörig beſtimmt.

Die Subſtitution dieſes Werthes von y in die gegebene Differenzialgleichung gibt:

$$A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+A_1\alpha_1(\alpha_1-1)x^{\alpha_1-2}+A_2\alpha_2(\alpha_2-1)x^{\alpha_2-2}+\text{ꝛc.}$$
$$=kAx^{\alpha+n}+kA_1x^{\alpha_1+n}+kA_2x^{\alpha_2+n}+\text{ꝛc.}$$

Dieſe Gleichung kann aber nur dann identiſch ſein, wenn die Gleichungen:

$$\alpha(\alpha-1)=0 \qquad (9)$$
$$\alpha_i=\alpha+i(n+2)$$
$$A_i\alpha_i(\alpha_i-1)=kA_{i-1}$$

ſtattfinden, vermittelſt welcher alle Exponenten α_i numeriſch beſtimmt ſind, und alle Coefficienten A_i ſich als Functionen des Coefficienten A, welcher die Stelle der willkürlichen Conſtante vertritt, ausdrücken laſſen.

Der Gleichung (9) kann man auf zwei Arten genügen, indem man $\alpha=0$, oder $\alpha=1$ ſetzt. Dieſen beiden Auflöſungen entſprechen zwei verſchiedene Reihen, wovon jede einen willkürlichen Coefficienten enthält, und welche beide der Gleichung (8), wovon ſie particuläre Integrale ſind, Genüge leiſten. Die Summe beider Reihen gibt folglich das allgemeine Integral (§. 455) und wenn man durch C_0, C_1 reſp. die $\alpha=0$, $\alpha=1$ entſprechenden Werthe des Coefficienten A bezeichnet; ſo findet man für das vollſtändige Integral leicht folgenden Reihenausdruck:

$$y=C_0[1+\frac{kx^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{k^2x^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}+\text{ꝛc.}]$$
$$+C_1x[1+\frac{kx^{n+2}}{(n+2)(n+3)}+\frac{k^2x^{2n+4}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}+\text{ꝛc.}].$$

So oft der Exponent n eine ganze poſitive Zahl iſt, ſchreitet dieſe Reihe nach den ganzen und poſitiven Potenzen von x fort und ſtimmt nothwendig mit der überein, welche ſich aus der Maclaurin'ſchen Formel ergeben würde, und die Conſtanten C_0, C_1 drücken alsdann die Werthe von y_0, y'_0 aus. Setzt man insbeſondere $k=-1$, $n=1$, ſo kommt man wieder auf die Reihe (2), und dieſe letzte Ableitung derſelben hat den Vortheil, das Bildungsgeſetz der ſucceſſiven Coefficienten deutlich vor Augen zu legen.

Wenn in der Reihe weniger Coefficienten unbeſtimmt bleiben, als der Ordnungse.ponent der Differenzialgleichung Einheiten hat, ſo drückt die Reihe nur ein particuläres Integral aus, und dieſes iſt ein Beweis, daß ſich die Function nur in eine Reihe von dieſer Form entwickeln läßt, wenn die willkürlichen Conſtanten Bedingungen genügen müſſen, welche die Anzahl derſelben vermindern, und die Allgemeinheit der gegebenen Differenzialgleichung beſchränken.

Wenn man z. B. in der Gleichung (8), $k=-1$, $n=-1$ ſetzte, ſo daß ſie mit der Gleichung (5) übereinſtimmte; ſo würden die verſchiedenen Glieder der Reihe, womit C_0 multiplicirt iſt, von dem zweiten an unendlich Dieſe Reihe muß alſo verworfen werden, weil ſie kein particuläres Integral. der Gleichung (8) mehr ausdrückt, und wobei wohl zu bemerken iſt, daß die Reihe, womit C_1 multiplicirt iſt, alsdann mit der übereinſtimmt, womit y'_0 in der Gleichung (7) multiplicirt iſt.

§. 469. Nach dem im §. 461 Geſagten ſinkt die Gleichung (8) zur erſten Ordnung herab, indem ſie aber aufhört, eine lineare Differenzialgleichung zu ſein, wenn man $y=e^{\int z\,dx}$ ſetzt, ſo daß man für die transformirte Gleichung mit z

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = kx^n$$

hat.

Umgekehrt, wenn die Differenzialgleichung der ersten Ordnung:

$$y' + ay^2 = bx^n \tag{10}$$

gegeben ist, welche die Riccati'sche Gleichung genannt wird, und der Gegenstand vieler Untersuchungen gewesen ist, so kann man die Integration derselben auf die der Gleichung (8), welche wegen ihrer binomischen und linearen Form einfacher ist, zurückführen, wenn man

$$y = \frac{1}{au} \cdot \frac{du}{dx}$$

setzt, so daß man für die transformirte Gleichung mit u

$$\frac{d^2u}{dx^2} = abux^n$$

erhält, welche mit der Gleichung (8) identisch ist, wenn man y für u und k für ab setzt. Die Gleichung (8) wird auch auf die Form:

$$y'' + \frac{g}{x} y' = hy \tag{11}$$

zurückgeführt, wenn man die unabhängige Veränderliche vertauscht, und $x^{\frac{n}{2}+1} = t$ setzt; denn auf diese Weise findet man:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{ky}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}, \tag{12}$$

und um die Gleichungen (11) und (12) übereinstimmend zu machen, braucht man nur t mit x zu vertauschen und

$$g = \frac{n}{n+2}, \quad h = \frac{k}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}$$

zu nehmen.

Endlich kommt die Gleichung:

$$y'' - \frac{m(m-1)}{x^2} y = hy \tag{13}$$

auch auf die Gleichungen (8), (10) und (11) zurück, weil man blos $y = x^m u$ zu setzen braucht, um sie in:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{x} \cdot \frac{du}{dx} = hu$$

zu verwandeln. Die Gleichungen (11) und (13) kommen in den Problemen der mathematischen Physik vor, und in dieser Beziehung bieten sie mehr Interesse dar, als die Gleichungen (8) und (10).

§. 470. Wenn wir die zu der Reihenentwickelung des Integrales der Gleichung (8) angewandte Methode direct auf die Gleichung (13) angewandt hätten, so hätten wir die Gleichung:

$$A[\alpha(\alpha-1)-m(m-1)]x^{\alpha-2}+A_1[\alpha_1(\alpha_1-1)-m(m-1)]x^{\alpha_1-2}$$
$$+A_2[\alpha_2(\alpha_2-1)-m(m-1)]x^{\alpha_2-2}+\text{ꝛc.}$$
$$=hAx^{\alpha}+hA_1x^{\alpha_1}+hA_2x^{\alpha_2}+\text{ꝛc.}$$

identiſch zu machen, oder die Bedingungsgleichungen

$$\alpha(\alpha-1)-m(m-1)=0 \qquad (14)$$
$$\alpha_i=\alpha+2i$$
$$A_i[\alpha_i(\alpha_i-1)-m(m-1)]=hA_{i-1}$$

zu erfüllen gehabt. Die dritte dieſer Bedingungsgleichungen verwandelt ſich, wenn man für α_i ſeinen aus der zweiten abgeleiteten Werth ſetzt, in:

$$A_i[\alpha(\alpha-1)+2i(2i+2\alpha-1)-m(m-1)]=hA_{i-1},$$

oder vermöge der erſten Bedingungsgleichung einfacher in:

$$2i(2i+2\alpha-1)A_i=hA_{i-1}. \qquad (15)$$

Die Wurzeln der Gleichung (14) ſind $\alpha=m$, $\alpha=1-m$, und man erhält folglich für den Werth des vollſtändigen Integrales den Reihenausdruck:

$$y=C_0x^m\left[1+\frac{hx^2}{2(2m+1)}+\frac{h^2x^4}{2.4.(2m+1)(2m+3)}+\text{ꝛc.}\right]$$
$$+C_1x^{1-m}\left[1+\frac{hx^2}{2(3-2m)}+\frac{h^2x^4}{2.4.(3-2m)(5-2m)}+\text{ꝛc.}\right].$$

§. 471. Die eben erhaltenen Reihen haben das Bemerkenswerthe, daß ſie ſummirt und durch beſtimmte Integrale von der Art, wie wir ſie in den drei letzten Kapiteln des vorhergehenden Buches betrachtet haben, erſetzt werden können. In der That erhält man, wenn man in der Formel (ν) im §. 309, $x=\omega$, $\mu=2\alpha-1$, und $\nu=2i$ ſetzt:

$$\int\cos.^{2i}\omega\sin.^{2\alpha-1}\omega d\omega=\frac{\cos.^{2i}\omega\sin.^{2\alpha}\omega}{2i+2\alpha-1}$$
$$+\frac{2i-1}{2i+2\alpha-1}\int\cos.^{2i-2}\omega\sin.^{2\alpha-1}\omega d\omega$$

und wenn man $0, \pi$ für die Grenzen der Integrale nimmt, ſo verſchwindet das Glied außerhalb des Zeichens $\int$ jedesmal, wenn α eine poſitive reelle Größe, oder eine imaginäre Größe mit einem reellen poſitiven Beſtandtheile iſt, ſo daß man hat:

$$\int_0^{\pi}\cos.^{2i}\omega\sin.^{2\alpha-1}\omega d\omega$$
$$=\frac{2i-1}{2i+2\alpha-1}\int_0^{\pi}\cos.^{2i-2}\omega\sin.^{2\alpha-1}\omega d\omega. \qquad (16)$$

Vermöge dieſer letzten Relation wird der Gleichung (15) genügt, wenn man

$$A_i=\frac{Ah^i}{1.2.3\ldots(2i-1)2i}\int_0^{\pi}\cos.^{2i}\omega\sin.^{2\alpha-1}\omega d\omega$$

ſetzt, und man kann folglich das erhaltene Integral auf die Form:

$$y = C_0 x^m \int_0^\pi (1 + \frac{hx^2}{1.2} \cos.^2\omega + \frac{h^2x^4}{1.2.3.4} \cos.^4\omega + \text{ꝛc.}) \sin.^{2m-1}\omega d\omega$$

$$+ C_1 x^{1-m} \int_0^\pi (1 + \frac{hx^2}{1.2} \cos.^2\omega + \frac{h^2x^4}{1.2.3.4} \cos.^4\omega + \text{ꝛc.}) \sin.^{1-2m}\omega d\omega$$

bringen, wenn man der Größe α ſucceſſive die Werthe m und $1 - m$, welche die Wurzeln der Gleichung (14) ſind, beilegt.

Nun iſt aber:

$$1 + \frac{hx^2}{1.2} \cos.^2\omega + \frac{h^2x^4}{1.2.3.4} \cos.^4\omega + \frac{h^3x^6}{1.2.3.4.5.6} \cos.^6\omega + \text{ꝛc.}$$

$$= \cos.(\sqrt{-1} \cdot x\sqrt{h} \cdot \cos.\omega) = \tfrac{1}{2} e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} + \tfrac{1}{2} e^{-x\sqrt{h}.\cos.\omega}$$

folglich:

$$y = C_0 x^m \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} + \frac{1}{2} e^{-x\sqrt{h}.\cos.\omega}\right) \sin.^{2m-1}\omega d\omega$$

$$+ C_1 x^{1-m} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} + \frac{1}{2} e^{-x\sqrt{h}.\cos.\omega}\right) \sin.^{1-2m}\omega d\omega.$$

Dieſer Ausdruck läßt ſich noch vereinfachen, denn wegen der Wahl der Grenzen, und wegen der Natur der Functionen sin. ω, cos. ω hat man:

$$\int_0^\pi e^{-\mu\cos.\omega} \sin.^\nu\omega d\omega = \int_0^\pi e^{\mu\cos.\omega} \sin.^\nu\omega d\omega$$

folglich:

$$y = C_0 x^m \int_0^\pi e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} \sin.^{2m-1}\omega d\omega$$

$$+ C_1 x^{1-m} \int_0^\pi e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} \sin.^{1-2m}\omega d\omega. \qquad (17)$$

Die Gleichung (16) findet nur unter der Bedingung ſtatt, daß α eine reelle poſitive Größe, oder eine imaginäre Größe mit einem reellen poſitiven Beſtandtheile bezeichnet, und folglich findet die Gleichung (17), um nur den Fall reeller Werthe zu betrachten, nur unter der Bedingung ſtatt, daß m und $1 - m$ poſitive Zahlen bezeichnen, oder daß die Größe m zwiſchen den Grenzen 0, 1 liegt. Unter dieſer Beſchränkung gibt die Gleichung (17) das vollſtändige Integral der Gleichung (13), durch beſtimmte Integrale ausgedrückt.

An den Grenzen $m = 0$, $m = 1$ reducirt ſich die Gleichung (13) auf $y'' = hy$, und in dieſem Falle iſt ihr vollſtändiges Integral bekanntlich:

$$y = C_0 e^{x\sqrt{h}} + C_1 e^{-x\sqrt{h}}.$$

Wenn man in der Formel (17), $m = \frac{1}{2}$ ſetzt, ſo gibt ſie:

$$y = (C_0 + C_1)\sqrt{x} \int_0^\pi e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} d\omega,$$

und da die beiden willkürlichen Conſtanten C_0, C_1 in eine einzige zuſammenfallen, ſo hat man nur noch ein particuläres Integral. Jedoch erhält man ſelbſt in dieſem Falle das vollſtändige Integral durch einen bereits im §. 460 angewandten Rechnungskunſtgriff. Wir wollen in dem Gliede, womit C_0 multiplicirt iſt, $m = \frac{1}{2}$, und in dem Gliede, womit C_1 multiplicirt iſt, $m = \frac{1}{2} + \varepsilon$ ſetzen; ſo kommt:

$$y = C_0 \sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{h}\,.\cos.\omega} d\omega$$

$$+ C_1 \sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{h}\,.\cos.\omega} (x \sin.^2 \omega)^{-\varepsilon} d\omega. \qquad (18)$$

Nun iſt aber:

$$u^{-\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1} \log. u + \frac{\varepsilon^2}{1.2} (\log. u)^2 - \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} (\log. u)^3 + \text{ꝛc.},$$

ſo daß, wenn man den Ausdruck (18) nach den Potenzen von ε entwickelt und $C_0 + C_1 = A$, $C_1 \varepsilon = -B$ ſetzt, kommt:

$$y = A\sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{h}\,.\cos.\omega} d\omega$$

$$+ B\sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{h}\,.\cos.\omega} \log. (x \sin.^2 \omega) d\omega + \varepsilon B X,$$

wo X eine Größe bezeichnet, welche einen endlichen Werth behält, wenn ε verſchwindet. Wenn man nun $\varepsilon = 0$ ſetzt, ſo erhält man:

$$y = A\sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{h}\,.\cos.\omega} d\omega$$

$$+ B\sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{h}\,.\cos.\omega} \log. (x \sin.^2 \omega) d\omega$$

für das vollſtändige Integral der Gleichung (13), welche ſich in dieſem Falle in:

$$y'' + \frac{y}{4x^2} = hy$$

verwandelt.

§. 472. Wenn m einen größern poſitiven Werth hat, als die Einheit, ſo muß das Glied mit dem Coefficienten C_1 in der Gleichung (17) hinweggelaſſen werden, wogegen man nur dieſes Glied beibehalten muß, wenn m einen negativen Werth hat. In dem einen wie in dem andern Falle erhält man alſo unmittelbar unter endlicher Form nur ein particuläres Integral der Gleichung (13). Es ſei y_1 dieſes particuläre Integral, worin die willkürliche Conſtante der Einfachheit wegen der Einheit gleich geſetzt iſt; ſo findet man durch eine ähnliche Rechnung, wie die im §. 467, daß das allgemeine Integral durch:

$$y = c_1 y_1 \left(\int \frac{dx}{y_1^2} + c_2 \right) \qquad (19)$$

ausgedrückt wird.

Wenn man $\cos. \omega = \zeta$ ſetzt, ſo wird die Gleichung (17) auf die Form:

$$y = C_0 x^m \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{h}\,.\zeta} (1 - \zeta^2)^{m-1} d\zeta$$

$$+ C_1 x^{1-m} \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{h}\,.\zeta} (1 - \zeta^2)^{-m} d\zeta$$

gebracht, und das particuläre Integral der Gleichung (13) wird für $m > 1$ ausgedrückt durch:

$$y = C_0 x^m \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{h}\cdot\zeta} (1-\zeta^2)^{m-1} d\zeta \qquad (20)$$

und für $m < 0$ durch:

$$y = C_1 x^{1-m} \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{h}\cdot\zeta} (1-\zeta^2)^{-m} d\zeta. \qquad (21)$$

Nach §. 313 ist einleuchtend, daß sich die in der Formel (20) angedeutete bestimmte Integration verrichten läßt, wenn m eine ganze positive Zahl bezeichnet, und daß dasselbe mit der in der Formel (21) angedeuteten Integration der Fall ist, wenn m eine ganze negative Zahl bezeichnet. So oft also m eine ganze positive, oder negative Zahl bezeichnet, hat man unter endlicher Form ein von dem Zeichen $\int$ befreites particuläres Integral der Gleichung (13) und nach der Formel (19) wird die Bestimmung des allgemeinen Integrales derselben Gleichung auf die Quadraturen zurückgeführt.

§. 473. Erinnern wir nun, daß die Riccati'sche Differenzialgleichung:

$$y' + ay^2 = bx^n, \qquad (10)$$

wenn man:

$$y = \frac{1}{au}\cdot\frac{du}{dx}, \quad ab = k,$$

setzt, sich in die Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = kux^n$$

verwandelt, welche ihrerseits übergeht in:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2m}{t}\cdot\frac{du}{dt} = hu,$$

und endlich in:

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{m(m-1)}{t^2}v = hv, \qquad (22)$$

wenn man

$$x^{\frac{n}{2}+1} = t, \quad m = \frac{n}{2(n+2)}, \quad h = \frac{k}{\frac{n}{2}+1}, \quad v = t^m u$$

setzt. Es sei $m = \pm i$, wo i eine ganze positive Zahl bezeichnet, so ergibt sich aus der zweiten der vorhergehenden Gleichungen:

$$n = \frac{-4i}{2i \mp 1}. \qquad (23)$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (22) läßt sich jedesmal auf die Quadraturen zurückführen, wenn m eine ganze positive Zahl ist, und folglich wird das allgemeine Integral der Riccati'schen Differenzialgleichung auch für alle in der Formel (23) enthaltenen Werthe von n auf die Quadraturen zurückgeführt, was man auch fände, wenn man untersuchte, in welchen Fällen sich die Veränderlichen in der Riccati'schen Differenzialgleichung trennen lassen.

Viertes Kapitel.

Theorie der singulären Integrale der Differenzialgleichungen mit zwei Veränderlichen.

I. Singuläre Integrale der Differenzialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 474. Es sei:

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (f)$$

eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung, deren vollständiges Integral von der Form:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (a)$$

ist, wo a eine durch die Integration eingeführte willkürliche Constante ist; so leistet nach dem Vorhergehenden (Buch 4 Kap. 2) die Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad (\varphi)$$

welche sich aus der Elimination von a zwischen dem Integrale (a) und einer der Gleichungen:

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = \infty \qquad (a')$$

ergibt, auch der Gleichung (f), wovon sie ein singuläres Integral ist, Genüge, wofern sie nicht mit einem particulären Integrale zusammenfällt, indem sich der aus einer der Gleichungen (a') abgeleitete Werth von a auf eine Constante, oder auf eine Function von x, y reducirt, welche sich vermöge der Gleichung (φ) selbst auf eine Constante reducirt. Ferner gehört bekanntlich die Gleichung (φ) einer Linie an, welche alle die Linien berührt oder umschließt, deren System durch das allgemeine Integral (a) ausgedrückt wird, so lange der Parameter a unbestimmt bleibt.

Hieraus ergibt sich eine sehr einfache Regel zur Bestimmung der singulären Integrale einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung, deren allgemeines Integral vorher bestimmt ist. Wir behaupten ferner, daß diese singulären Integrale angegeben werden können, ohne daß man das allgemeine Integral zu kennen braucht, und selbst dann, wenn man für das allgemeine Integral keinen analytischen Ausdruck unter endlicher Form würde angeben können, was gewöhnlich der Fall ist.

In der That kann die Umschließungslinie, welche das singuläre Integral darstellt, nur existiren, wenn zwischen den Linien, welche particuläre Integrale darstellen, und welche verschiedenen Werthen der willkürlichen Constante entsprechen, Durchschnitte stattfinden. Folglich muß für die diesen Durchschnittspunkten entsprechenden Werthe von x, y der aus der Gleichung (f) abgeleitete und durch x, y ausgedrückte Werth von y' ein vielfacher sein, d. h., diese als algebraisch vorausgesetzte Gleichung muß nach Fortschaffung der Wurzelgrößen in Beziehung auf y' vom zweiten oder von einem höhern Grade sein.

Hieraus folgt, daß im Allgemeinen die den Werthen von x, y, welche y' nicht imaginär machen, entsprechenden Durchschnittspunkte wenigstens Durchschnittspunkte von zweien der Linien, welche die particulären Integrale darstellen, sind.

Aber für die auf der Umſchließungs- oder Berührungscurve aller dieſer Curven liegenden Punkte findet kein Durchſchnitt mehr ſtatt, oder es verſchwindet wenigſtens ein Durchſchnitt, und folglich muß die Gleichung (f), worin man y' als Unbekannte betrachtet, vielfache Wurzeln bekommen, ſo daß die Bedingung:

$$\frac{df}{dy'} = 0 \qquad (f')$$

erfüllt wird. Die Gleichung (f') beſtimmt alſo umgekehrt die zwiſchen x und y ſtattfindende Relation, welche die Berührungslinie oder das ſinguläre Integral charakteriſirt.

Wir wollen z. B. die Differenzialgleichung:

$$y'^2(x^2 - r^2) - 2xyy' = x^2 \qquad (1)$$

nehmen, deren allgemeines Integral:

$$x^2 - 2ay = r^2 + a^2 \qquad (2)$$

iſt, wo a eine willkürliche Conſtante bezeichnet.

Die erſte der Gleichungen (a') gibt in dieſem Falle $a = -y$, und wenn man dieſen Werth von a in die Gleichung (2) ſubſtituirt, ſo erhält man das ſinguläre Integral $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Nun gibt aber die Gleichung (f'), ohne daß man das Integral (2) zu kennen braucht, die Relation:

$$y' = -\frac{xy}{r^2 - x^2},$$

und wenn dieſer Werth von y' in die Gleichung (1) ſubſtituirt wird, ſo erhält man das zuerſt aus dem allgemeinen Integrale abgeleitete ſinguläre Integral wieder.

§. 475. Der Erfolg dieſer Methode hängt davon ab, daß die Differenzialgleichung ſo vorbereitet iſt, daß ſie keine Wurzelgrößen mehr enthält. Wenn ſie dagegen in Beziehung auf y' aufgelöſ't oder auf die Form $y' = f(x,y)$ gebracht wäre, ſo würde die Methode nicht mehr anwendbar ſein. Allein es iſt zu bemerken, daß man, wenn man die Gleichung (f) in Beziehung auf y und in Beziehung auf x differenzirt, indem man y' als eine durch dieſe Gleichung implicite beſtimmte Function von x,y betrachtet,

$$\frac{dy'}{dy} = -\frac{df}{dy} : \frac{df}{dy'}, \qquad \frac{dy'}{dx} = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy'}$$

hat. Nun macht aber der dem ſingulären Integrale entſprechende, durch x ausgedrückte Werth von y die Größe $\frac{df}{dy'}$ verſchwinden, und folglich muß derſelbe Werth die Differenzialcoefficienten $\frac{dy'}{dy}$, $\frac{dy'}{dx}$, nachdem für y' ſein aus der Gleichung (f) abgeleiteter und durch x,y ausgedrückter Werth ſubſtituirt iſt, unendlich machen. Wenn man alſo aus den Gleichungen:

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \infty, \quad \frac{df(x,y)}{dx} = \infty$$

einen durch x ausgedrückten Werth von y ableiten kann, welcher auch der Gleichung (f) Genüge leiſtet, ſo gibt dieſer Werth das ſinguläre Integral wieder.

So gibt z. B. die in Beziehung auf y' aufgelöſ'te Gleichung (1):

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 - r^2}(y \pm \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}),$$

folglich:

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \frac{x}{x^2 - r^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2} + y}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}},$$

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{-(x^2 + r^2)y\sqrt{x^2 + y^2 - r^2} \mp r^2(x^2 + y^2 - r^2) \mp x^2y^2}{(x^2 - r^2)^2\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}},$$

und dieſe Werthe werden unendlich, wenn man $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ ſetzt, wodurch der Gleichung (1) genügt wird, von welcher man alſo ein ſinguläres Integral erhält.

§. 476. Wenn man die Gleichnng (f) differenzirt, indem man y, y' als unentwickelte Functionen von x betrachtet, ſo erhält man:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dy'}y'' = 0, \qquad (f'')$$

folglich:

$$y'' = -\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y'\right) : \frac{df}{dy'}. \qquad (c)$$

Aber der Werth von y als Function von x, welcher das ſinguläre Integral gibt, macht $\frac{df}{dy'} = 0$, und reducirt die Gleichung (f'') auf:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' = 0.$$

Derſelbe durch x ausgedrückte Werth von y bewirkt alſo, daß der durch die Gleichung (c) gegebene Werth:

$$y'' = \frac{\varphi(x,y,y')}{\psi(x,y,y')}$$

unter der Form $\frac{0}{0}$ erſcheint, welches noch ein anderes Verfahren zur Beſtimmung der ſingulären Integrale an die Hand gibt. Denn wenn man

$$\varphi(x,y,y') = 0, \quad \psi(x,y,y') = 0$$

ſetzt, und dann ſucceſſive y' zwiſchen jeder dieſer beiden Gleichungen und der gegebenen Gleichung (f) eliminirt, und die beiden reſultirenden Gleichungen haben einen gemeinſchaftlichen Factor; ſo gibt dieſer Factor das geſuchte ſinguläre Integral.

Verfährt man auf dieſe Weiſe mit der Gleichung (1), ſo findet man:

$$y'' = \frac{yy' + x}{y'(x^2 - r^2) - xy},$$

und wenn man y' zwiſchen der gegebenen Gleichung und jeder der Gleichungen:

$$yy' + x = 0, \quad y'(x^2 - r^2) - xy = 0$$

eliminirt; ſo erhält man die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2-r^2)=0, \quad \frac{x^2}{x^2-r^2}(x^2+y^2-r^2)=0,$$

welche offenbar den gemeinschaftlichen Factor $x^2+y^2-r^2$ haben.

§. 477. Es ist wohl zu bemerken, daß die geometrische Betrachtung, worauf wir uns in den drei vorhergehenden §§. gestützt haben, auf alle Berührungslinien der Curven, welche durch das allgemeine Integral gegeben werden, sowie auf die, welche die particulären und singulären Integrale darstellen können, anwendbar ist. Nachdem man also durch eins der vorhin angegebenen Verfahren die singulären Integrale bestimmt hat, müßte man sich also noch überzeugen, daß man sie nicht auf das allgemeine Integral zurückführen kann, indem man die Constante gehörig particularisirt, welche Prüfung aber so lange unmöglich ist, als das allgemeine Integral nicht gegeben ist. Der unterscheidende Charakter der singulären Integrale muß also aus analytischen Betrachtungen abgeleitet werden, und zu dem Zwecke müssen wir die Untersuchung aus einem neuen Gesichtspunkte betrachten.

Betrachten wir eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung von der Form:

$$y'-f(x,y)=0, \tag{d}$$

welcher die Gleichung $y=X$ genügt, wo X eine gewisse Function von x ohne willkürliche Constante bezeichnet, so daß identisch:

$$\frac{dX}{dx}-f(x,X)=0 \tag{e}$$

ist. Soll die Gleichung $y=X$ mit einem particulären Integrale übereinstimmen, so muß das allgemeine Integral auf die Form:

$$y=X+\varepsilon\varphi \tag{g}$$

gebracht werden können, wo ε eine willkürliche Constante und φ eine Function von x und ε bezeichnet, welche für $\varepsilon=0$ weder verschwindet, noch unendlich wird. Zu gleicher Zeit hat man:

$$f(x,y)=f(x,X)+(\varepsilon\varphi)^k\cdot\omega, \tag{h}$$

wo k den Exponenten der höchsten Potenz von ε, welche ein Factor von

$$f(x,X+\varepsilon\varphi)-f(x,X)$$

ist, und ω eine Function von x und $\varepsilon\varphi$ bezeichnet, welche für $\varepsilon=0$ weder Null, noch unendlich wird.

Wir wollen

$$\varphi=\varphi_0+\varepsilon^{\alpha_1}\varphi_1+\varepsilon^{\alpha_2}\varphi_2+\text{ꝛc.}$$

$$\omega=\omega_0+(\varepsilon\varphi)^{\beta_1}\omega_1+(\varepsilon\varphi)^{\beta_2}\omega_2+\text{ꝛc.}$$

setzen, wo φ_i, ω_i Functionen von x, und α_i, β_i positive Exponenten bezeichnen, welche eine zunehmende Reihe bilden. Da die Function f gegeben ist, so ist die Entwickelung von $f(x,X+\varepsilon\varphi)$ nach den Potenzen von $\varepsilon\varphi$ bekannt, und folglich werden die Function ω_1, sowie die Zahlen β_1 als bekannt angesehen, und es kommt darauf an, die Functionen φ_i und die Exponenten α_i so zu bestimmen, daß der Gleichung (h) unabhängig von ε Genüge geschieht.

Nun gibt aber die Substitution, nachdem man die Glieder, welche sich vermöge der Gleichung (e) gegenseitig aufheben, hinweggelassen hat:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon\frac{d\varphi_0}{dx}+(\alpha_1+1)\varepsilon^{\alpha_1}\frac{d\varphi_1}{dx}+(\alpha_2+1)\varepsilon^{\alpha_2}\frac{d\varphi_2}{dx}+\text{ꝛc.}\\ &=\varepsilon^k(\varphi_0+\varepsilon^{\alpha_1}\varphi_1+\varepsilon^{\alpha_2}\varphi_2+\text{ꝛc.})^k\omega_0\\ &+\varepsilon^{k+\beta_1}(\varphi_0+\varepsilon^{\alpha_1}\varphi_1+\varepsilon^{\alpha_2}\varphi_2+\text{ꝛc.})^{k+\beta_1}\omega_1+\text{ꝛc.}\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

Setzt man $k=1$, so hat man zur Bestimmung von φ_0 die Gleichung:

$$\frac{d\varphi_0}{dx}=\varphi_0\,\omega_0,\quad\text{woraus folgt:}\quad\varphi_0=e^{\int\omega_0 dx},$$

worauf man

$$\alpha_1=\beta_1+1,\quad(\beta_2+2)\frac{d\varphi_1}{dx}=\varphi^{\beta_1+1}\omega_1$$

setzen muß, und wenn man so fortfährt, so bestimmt man allmälig alle in der Entwickelung von φ vorkommenden Größen, d. h. man entwickelt das allgemeine Integral in eine nach den Potenzen von ε geordnete Reihe.

Wenn $k>1$ ist, so kann man die Gleichung α nur noch identisch machen, wenn man zuvörderst:

$$\frac{d\varphi_0}{dx}=0,\quad\text{oder}\quad\varphi=\text{const.}$$

setzt.

Der Einfachheit wegen wollen wir diese Constante $=1$ setzen, und dann:

$$\alpha_1=k,\quad(\alpha_1+1)\frac{d\varphi_1}{dx}=\omega_0,\quad\text{folglich}\quad\varphi_1=\frac{1}{k+1}\int\omega_0 dx,$$

und wenn man dieselbe Rechnung weiter fortsetzt, so erhält man successive wieder alle Glieder der Entwickelung des allgemeinen Integrales.

Aber wenn dagegen $k<1$ ist, so ist es nicht mehr möglich, die Gleichung (α) identisch zu machen, und folglich kann die Auflösung $y=X$ nicht aus dem allgemeinen Integrale durch Particularisirung einer willkürlichen Constante hervorgehen, und ist mithin ein singuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Nun macht aber der Werth X, für welchen der Exponent $k<1$ ist nach dem im §. 106 über den Ausnahmefall der Taylor'schen Reihe Gesagten die Ableitung:

$$\frac{df(x,y)}{dy}=\frac{dy'}{dy}$$

unendlich; folglich ist die Gleichung $\frac{dy'}{dy}=\pm\infty$ das wahre Kriterium der singulären Integrale, und enthält sie alle als Factoren, mit Ausnahme derer, welche von der Form $x=\text{const.}$ sind, und welche man erhält, wenn man in der gegebenen Gleichung die Veränderliche y als unabhängig betrachtet.

Wenn also die Werthe von y als Functionen von x, welche $\frac{df}{dy'}=0$ machen, den Ableitungen $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dx}$ endliche Werthe geben, so entsprechen diese Werthe singulären Integralen von (f); aber wenn sie diese Ableitungen verschwinden machen, so muß man durch die gewöhnlichen Verfahrungsarten die Werthe der zweiten Theile der Gleichungen (b), welche alsdann unter einer

unbestimmten Form erscheinen, suchen. Wenn diese Werthe unendlich sind, so bilden die zu prüfenden Auflösungen ebenfalls singuläre Integrale, und wenn dieses nicht der Fall ist, so gehören sie in die Categorien der particulären Integrale, drücken aber nichts desto weniger die Umschließungslinien aus. Der eben nach Poisson gegebene Beweis unterliegt wegen der Anwendung der Reihen, welche divergent werden können, einigen Schwierigkeiten, und wir werden Gelegenheit haben, wieder auf diesen Gegenstand zurückzukommen, wenn wir von der Construction der Differenzialgleichungen reden werden.

§. 478. Vermöge der Gleichungen (d), (e), (g), (h) hat man:

$$\frac{d(y-X)}{dx} = f(x,y) - f(x,X) = (\varepsilon\varphi)^k \omega = (y-X)^k \omega,$$

und wenn man die Veränderlichen vertauscht, indem man $y - X = u$ setzt; so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$\frac{du}{dx} = u^k \omega,$$

wo ω alsdann eine Function der Veränderlichen x, u bezeichnet, welche für $u = 0$ weder verschwindet, noch unendlich groß wird. Wir können die Veränderlichen nochmals vertauschen, und zu dem Ende $u^{1-k} = v$ setzen, wodurch die Differenzialgleichung der Form:

$$v^{\frac{k}{1-k}}\left(\frac{dy}{dx} - (1-k)\omega\right) = 0$$

annimmt. Für $k < 1$ zerfällt diese letzte Gleichung von selbst in die beiden andern:

$$v = 0, \quad \frac{dy}{dx} - (1-k)\omega = 0,$$

wovon die erste, welche gleichbedeutend ist mit $y - X = 0$, das singuläre Integral gibt, wogegen der zweiten durch dieses singuläre Integral nicht mehr genügt werden kann, weil ω eine Function ist, welche nicht mit v verschwindet.

Wenn also eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung ein singuläres Integral gestattet, so kann man sie durch eine Vertauschung der Veränderlichen in eine andere verwandeln, worin das singuläre Integral als gemeinschaftlicher Factor erscheint, so daß nach Hinweglassung dieses Factors die transformirte Gleichung kein singuläres Integral mehr hat, und bei einem rechtwinkligen Coordinatensysteme eine Reihe von Linien ausdrückt, welche keine Umschließungslinien mehr haben.

§. 479. Wir wollen dieses auf die Gleichung:

$$y'^2 - 4xy' + 4y = 0, \quad \text{oder} \quad y' = 2(x \pm \sqrt{x^2 - y}), \qquad (3)$$

anwenden, deren allgemeines Integral:

$$y = 2ax - a^2 \qquad (4)$$

ist, und folglich ein System von geraden Linien ausdrückt, welche die Parabel $x^2 - y = 0$ zur Berührungslinie haben. Wir wollen $x^2 - y = u = v^2$ setzen, so verwandelt sich die Gleichung (3) in:

$$\frac{du}{dx} = \mp 2\sqrt{u}, \quad \text{oder} \quad v\left(\frac{dv}{dx} \pm 1\right) = 0.$$

Nach der Hinweglaſſung des Factors v bleibt die Gleichung $\frac{dv}{dx} \pm 1 = 0$, deren allgemeines Integral:

$$v = \mp (x - a) \qquad (5)$$

iſt, und welches, wenn man x zur Abſciſſe und v zur rechtwinkligen Ordinate nimmt, ein Syſtem von parallelen geraden Linien ausdrückt, welche folglich keine Berührungslinie haben. Uebrigens würde man wieder auf die Gleichung (5) kommen, wenn man für y ſeinen durch v und x ausgedrückten Werth in die Gleichung (4) ſubſtituirte.

Die Anwendung dieſer Methode auf die Gleichung (1) würde einigen Schwierigkeiten unterliegen, wenn man x als unabhängige Veränderliche beibehalten wollte. Aber wenn man dieſe Gleichung auf die Form:

$$(x^2 - r^2)dy = xdx(y \pm \sqrt{x^2 + y^2 - r^2})$$

bringt, und dann x^2 und xdx vermittelſt der Hülfsgleichungen:

$$x^2 + y^2 - r^2 = u^2, \quad xdx + ydy = udu$$

fortſchafft; ſo nimmt ſie die ſehr einfache Form $u(du \mp dy) = 0$ an, ſo daß ſie nach der Hinweglaſſung des Factors u kein ſinguläres Integral mehr geſtattet.

§. 480. Umgekehrt kann man eine Differenzialgleichung, welche kein ſinguläres Integral geſtattet, ſo transformiren, daß ſie eine gegebene Gleichung, als ſinguläres Integral darbietet. Es ſei z. B. die oben gefundene Differenzialgleichung $\frac{dv}{dx} \pm 1 = 0$ gegeben, in welche man für v eine Function von x und von einer neuen Veränderlichen z von ſolcher Beſchaffenheit ſubſtituiren ſoll, daß nach der Subſtitution die reſultirende Gleichung die lineare Gleichung:

$$z - mx = 0 \qquad (6)$$

als ſinguläres Integral darbietet.

Man multiplicire die gegebene Gleichung durch $(z - mx)^k$, wo k eine zwiſchen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet; ſo verwandelt ſie ſich in:

$$(z - mx)^k dv \pm (z - mx)^k dx = 0. \qquad (7)$$

Alsdann wollen wir die Veränderliche z, welche eine Function von v und x ſein muß, ſo beſtimmen, daß

$$\frac{dz}{dv} = (z - mx)^k$$

wird; ſo ergibt ſich durch Integration:

$$\frac{(z - mx)^{1-k}}{1 - k} = v + X,$$

wo X eine willkürliche Function von x bezeichnet, und folglich iſt:

$$dz - mdx = (z - mx)^k (dv + dX)$$

Leiten wir hieraus den Werth von dv ab und ſubſtituiren denſelben in die Gleichung (7), ſo verwandelt ſie ſich in:

$$dz - mdx - (z - mx)^k (dX \mp dx) = 0,$$

und es iſt einleuchtend, daß die Gleichung (6) derſelben als ſinguläres Integral Genüge leiſtet.

§. 481. Im §. 448 haben wir geſehen, daß die Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$\cdot y = xy + \psi y'$$

durch eine zweite Differenziation die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$(x + \psi y')y'' = 0$$

gibt, welche unmittelbar in zwei Factoren zerfällt, wovon der eine das allgemeine, und der andere das ſinguläre Integral der gegebenen Differenzialgleichung liefert. Dieſes analytiſche Factum müſſen wir nun verallgemeinern und zeigen, daß man, wenn eine Differenzialgleichung der erſten Ordnung ein ſinguläres Integral geſtattet, ſie immer unter eine ſolche Form bringen kann, daß ihre Ableitung in zwei Factoren zerfällt, wovon der eine durch Elimination von y' vermittelſt der gegebenen Gleichung das ſinguläre Integral gibt, während der andere, welcher durch den aus dem allgemeinen Integrale abgeleiteten und durch eine Function von x ausgedrückten Werth von y' verſchwinden gemacht wird, nicht mehr für den aus dem ſingulären Integrale abgeleiteten Werth verſchwindet.

Wird die Differenzialgleichung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0 \qquad (a'_1)$$

in Beziehung auf a aufgelöſ't, ſo gibt ſie:

$$a = \omega(x, y, y'), \qquad (i)$$

und wenn man dieſen Werth von a in die Gleichung (a) ſubſtituirt, ſo iſt die reſultirende Gleichung:

$$F(x, y, \omega) = 0 \qquad (j)$$

mit der Gleichung (f) in ſo fern gleichbedeutend, daß man, wenn ſie nicht übereinſtimmen, von der einen zur andern übergeht, wenn man den erſten Theil der erſten Gleichung durch eine ſchicklich gewählte Function der Veränderlichen x, y, y' multiplicirt. Differenzirt man nun die Gleichung (j), ſo erhält man:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{d\omega}\left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy}y' + \frac{d\omega}{dy'}y''\right) = 0,$$

und ferner iſt die Summe der beiden erſten Glieder $= 0$, weil man für a ſeinen aus der Gleichung (a'_1) gezogenen Werth in die Function F ſubſtituirt hat. Die Ableitung der Gleichung (j) reducirt ſich alſo auf:

$$\frac{dF}{d\omega}\left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy}y' + \frac{d\omega}{dy'}y''\right) = 0$$

und zerfällt in die beiden Factoren:

$$\frac{dF}{d\omega} = 0 \qquad (j_1)$$

$$\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy}y' + \frac{d\omega}{dy'}y'' = 0. \qquad (j_2)$$

Die Gleichung (j_2), welche von der zweiten Ordnung iſt, hat offenbar die Gleichung (j) zum Integrale der erſten Ordnung, und die Elimination von y' zwiſchen den Gleichungen (i) und (j) findet ſtatt, wenn man ω zwiſchen denſelben Gleichungen eliminirt, oder wenn man in der Gleichung (j), a für ω ſetzt, d. h. dieſe Elimination gibt das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Ebenſo wird die Elimination von y' zwiſchen den Gleichungen (i) und (j_1) vereitelt durch die Elimination von ω zwiſchen denſelben Gleichungen, oder durch die Elimination von a zwiſchen der Gleichung (a) und ihrer Ableitung in Beziehung auf a. Sie führt folglich auf das ſinguläre Integral der gegebenen Differenzialgleichung, oder wenigſtens auf die Gleichung einer Berührungslinie der Curven, welche die particulären Integrale derſelben ausdrücken.

Aus dieſer Rechnung erhellet auch, daß der aus dem ſingulären Integrale abgeleitete Werth von y als Function von x der gegebenen Differenzialgleichung Genüge leiſtet; aber daß der daraus abgeleitete Werth von y'' der Gleichung (j_2) nicht Genüge leiſtet, und folglich auch, daß die daraus abgeleiteten Werthe von y''', y^{iv}, ꝛc. die ſucceſſiven Ableitungen der gegebenen Differenzialgleichungen nicht verificiren.

Wendet man dieſe Analyſe auf die Gleichung (2) an, ſo erhält man:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\,y' = 2x - 2ay',$$

woraus ſich die Gleichung:

$$\omega = \frac{x}{y'}, \quad F(x, y, \omega) = x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2} - r^2 = 0 \qquad (8)$$

ergibt, welche nach der Fortſchaffung des Nenners y'^2 mit der Gleichung (1) übereinſtimmen würde. Die Differenziation der Gleichung (8) gibt:

$$-\frac{y}{y'} + \frac{xyy''}{y'^2} - \frac{x}{y'^2} + \frac{x^2y''}{y'^2} = 0,$$

oder vielmehr:

$$\left(y + \frac{x}{y'}\right)\left(\frac{1}{y'} - \frac{xy''}{y'^2}\right) = 0.$$

Der aus der Gleichung $y + \frac{x}{y'} = 0$ abgeleitete und in die gegebene Differenzialgleichung ſubſtituirte Werth von y' gibt das ſinguläre Integral $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Der andere Factor iſt die Ableitung der Function $\frac{x}{y'}$ in Beziehung auf x; die Integration gibt folglich $\frac{x}{y'} = a$, und wenn man dieſen Werth von y' in die gegebene Differenzialgleichung ſubſtituirt, ſo erhält man die Gleichung (2) wieder.

II. Singuläre Integrale der Differenzialgleichungen höherer Ordnungen.

§. 482. Es ſei:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}, a) = 0 \qquad (K)$$

ein erſtes Integral der Differenzialgleichung der $(n+1)^{ten}$ Ordnung:

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}, y^{(n+1)}) = 0, \qquad (k)$$

wo a die durch die Integration eingeführte willkürliche Conſtante bezeichnet. Wenn man a zwiſchen den Gleichungen (K) und:

$$\frac{dF}{da} = 0 \qquad (K')$$

$$y = C_0 x^m \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{h}\cdot\zeta} (1-\zeta^2)^{m-1} d\zeta \qquad (20)$$

und für $m < 0$ durch:

$$y = C_1 x^{1-m} \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{h}\cdot\zeta} (1-\zeta^2)^{-m} d\zeta. \qquad (21)$$

Nach §. 313 ist einleuchtend, daß sich die in der Formel (20) angedeutete bestimmte Integration verrichten läßt, wenn m eine ganze positive Zahl bezeichnet, und daß dasselbe mit der in der Formel (21) angedeuteten Integration der Fall ist, wenn m eine ganze negative Zahl bezeichnet. So oft also m eine ganze positive, oder negative Zahl bezeichnet, hat man unter endlicher Form ein von dem Zeichen $\int$ befreites particuläres Integral der Gleichung (13) und nach der Formel (19) wird die Bestimmung des allgemeinen Integrales derselben Gleichung auf die Quadraturen zurückgeführt.

§. 473. Erinnern wir nun, daß die Riccati'sche Differenzialgleichung:

$$y' + ay^2 = bx^n, \qquad (10)$$

wenn man:

$$y = \frac{1}{au}\cdot\frac{du}{dx}, \quad ab = k,$$

setzt, sich in die Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = kux^n$$

verwandelt, welche ihrerseits übergeht in:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2m}{t}\cdot\frac{du}{dt} = hu,$$

und endlich in:

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{m(m-1)}{t^2}v = hv, \qquad (22)$$

wenn man

$$x^{\frac{n}{2}+1} = t, \quad m = \frac{n}{2(n+2)}, \quad h = \frac{k}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}, \quad v = t^m u$$

setzt. Es sei $m = \pm i$, wo i eine ganze positive Zahl bezeichnet, so ergibt sich aus der zweiten der vorhergehenden Gleichungen:

$$n = \frac{-4i}{2i \mp 1}. \qquad (23)$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (22) läßt sich jedesmal auf die Quadraturen zurückführen, wenn m eine ganze positive Zahl ist, und folglich wird das allgemeine Integral der Riccati'schen Differenzialgleichung auch für alle in der Formel (23) enthaltenen Werthe von n auf die Quadraturen zurückgeführt, was man auch fände, wenn man untersuchte, in welchen Fällen sich die Veränderlichen in der Riccati'schen Differenzialgleichung trennen lassen.

indem aber a_1 als eine durch die Gleichung (L) implicite bestimmte Function von a_1 betrachtet wird, zu eliminiren. Man hat also:

$$\frac{da_2}{da_1} = -\frac{dF}{da_1} : \frac{dF}{da_2},$$

so daß sich die Gleichung (f') in:

$$\frac{dF}{da_2} \cdot \frac{df}{da_1} - \frac{dF}{da_1} \cdot \frac{df}{da_2} = 0 \qquad (f'_{1,2})$$

verwandelt. Das gesuchte singuläre Integral ergibt sich also aus der Elimination von a_1, a_2 zwischen den Gleichungen (L), (f), $(f'_{1,2})$, und da die letzte Gleichung durch die Vertauschung der Indices nicht geändert wird, so ist der Satz bewiesen. Dieser Beweis läßt sich leicht auf Gleichungen von einer beliebigen Ordnung erstrecken.

Es sei z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y''^2 - \frac{2y'y''}{x} + 1 = 0 \qquad (9)$$

gegeben, deren vollständiges Integral:

$$\frac{x^3}{3} - 2a_1 y + a_1^2 x + a_2 = 0$$

ist, und deren beide Integrale der ersten Ordnung:

$$F_1 = x^2 - 2a_1 y' + a_1^2 = 0 \qquad (10)$$

$$F_2 = 4x^2(y - xy')^2 - 4\left(a_2 - \frac{2x^3}{3}\right)(y - xy')y' + (a_2 - \frac{2}{3}x^3)^2 = 0$$

sind.

Die Gleichungen $(L'_{1,2})$ verwandeln sich in:

$$a_1 = y', \quad -4(y - xy')y' + 2(a_2 - \tfrac{2}{3}x^3) = 0,$$

und durch Elimination erhält man:

$$x^2 - y'^2 = 0, \quad 4(y - xy')^2 (x^2 - y'^2) = 0.$$

Die zweite Gleichung begreift die erste in sich, und hat keine größere Allgemeinheit; denn wenn man den Factor $y - xy' = 0$ setzt, so ergibt sich daraus ein Werth von y', welcher der gegebenen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung kein Genüge leistet.

§. 483. Der Lehrsatz im §. 481 läßt sich leicht auf die singulären Integrale der Differenzialgleichungen von einer beliebigen Ordnung anwenden. Gesetzt, die gegebene Differenzialgleichung wäre von der zweiten Ordnung und würde durch die Gleichung (1) ausgedrückt, so daß

$$F_1(x, y, y', a_1) = 0 \qquad (L_1)$$

eins ihrer Integrale der ersten Ordnung wäre, so hätte man, wenn man vermittelst der Gleichung:

$$\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy} y' + \frac{dF_1}{dy'} y'' = 0 \qquad (L'_1)$$

welche:

$$a_1 = \omega(x, y, y', y'')$$

gibt, a_1 fortschaffte, die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$F_1(x, y, y', \omega) = 0, \qquad (\omega)$$

welche mit der gegebenen (l) identisch ist, oder sich nur durch einen Factor, welcher eine Function von x, y, y', y'' ist, unterscheidet. Andererseits, wenn man a_1 vermittelst seines aus der Gleichung $\frac{dF_1}{da_1} = 0$ abgeleiteten Werthes aus der Gleichung (L_1) fortschafft, so erhält man das singuläre Integral. Differenzirt man aber die Gleichung (ω), indem man die vermöge der Gleichung (L'_1) verschwindenden Glieder hinwegläßt, so erhält man:

$$\frac{dF}{d\omega}\left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy}y' + \frac{d\omega}{dy'}y'' + \frac{d\omega}{dy''}y'''\right) = 0,$$

und der übrige Theil des Beweises wird wie in dem angeführten § geführt. Hieraus folgt ebenfalls, daß der aus dem singulären Integrale abgeleitete Werth von y' als Function von x, y für y'' einen Werth gibt, welcher die gegebene Differenzialgleichung verificirt; aber für y''', y^{IV}, y^{V}, ꝛc. Werthe, welche den successiven Ableitungen, der gegebenen Differenzialgleichung nicht genügen.

Nimmt man für $f = 0$ $F_1 = 0$, die Gleichungen (9) und (10), so hat man $\omega = \frac{x}{y''}$, folglich:

$$F_1(x, y, y', \omega) = x^2 - \frac{2xy'}{y''} + \frac{x^2}{y''^2} = 0, \qquad (11)$$

welche Gleichung mit (9) übereinstimmte, wenn man alle Glieder derselben mit $\frac{y''^2}{x^2}$ multiplicirte. Die Differenziation der Gleichung (11) gibt:

$$-\frac{y'}{y''} + \frac{xy'y'''}{y''^2} + \frac{x}{y''^2} - \frac{x^2y'''}{y''^3} = 0$$

oder vielmehr:

$$\frac{x^2}{y''^2} \cdot \left(\frac{y'}{x} - \frac{1}{y''}\right)\left(y''' - \frac{y''}{x}\right) = 0.$$

Der aus der Gleichung:

$$\frac{y'}{x} - \frac{1}{y''} = 0$$

abgeleitete, und in die Gleichung (11) substituirte Werth von y'' gibt das singuläre Integral $x^2 - y'^2 = 0$. Andererseits folgt aus der Differenzialgleichung der dritten Ordnung:

$$y''' - \frac{y''}{x} = 0,$$

wenn man integrirt $\frac{x}{y''} = a_2$, und wenn man diesen Werth in die Gleichung (11) substituirt, so erhält man das Integral (10) wieder.

§. 484. Die Differenzialgleichung (x) von der n^{ten} Ordnung hat ein allgemeines Integral von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung:

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}, c) = 0 \qquad (\Phi)$$

und da dieses Integral nicht blos der Gleichung (x), sondern auch allen ihren Ableitungen Genüge leisten muß; so folgt, daß die Werthe von $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, welche aus der Gleichung (Φ) abgeleitet sind, mit denen übereinstimmen,

welche man aus der Gleichung (x) ableitet, und folglich leiſtet die Gleichung (Φ) der gegebenen Gleichung (k) eben ſo wohl Genüge, als die Gleichung (x).

Nehmen wir nun an, daß die Gleichung (x) ein ſinguläres Integral:

$$\psi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}) = 0 \qquad (\psi)$$

habe, ſo ergibt ſich nach der Bemerkung im vorhergehenden § daraus ein Werth für $y^{(n+1)}$, welcher nicht mit dem übereinſtimmt, welchen die Ableitung von (x) gibt, und folglich leiſtet die Gleichung (ψ), welche als ſinguläres Integral der Gleichung (x) genügt, der gegebenen Gleichung (k), wovon (x) ſchon ein ſinguläres Integral iſt, kein Genüge.

Daſſelbe läßt ſich auch durch folgende Betrachtung, welche wir der Deutlichkeit wegen auf die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$f(x, y', y'') = 0 \qquad (l)$$

anwenden wollen, darthun.

Ihr ſinguläres Integral der erſten Ordnung:

$$\varphi(x, y, y') = 0, \qquad (\lambda)$$

ergibt ſich, wie bereits bemerkt worden, aus der Elimination von a_1, a_2 zwiſchen den Gleichungen (L), (f) und $(f'_{1,2})$. Es ſei $\psi(x, y) = 0$ ein ſinguläres Integral von (λ), ſo behaupten wir, daß dieſes Integral nicht von der Gleichung verſchieden iſt, welche man erhielte, wenn man a_1, a_2 zwiſchen der Gleichung (L) und ihren Ableitungen:

$$\frac{dF}{da_1} = 0, \quad \frac{dF}{da_2} = 0 \qquad ((L'))$$

eliminirte. Denn die ſo erhaltene Gleichung genügt dem Syſteme der Gleichungen (L), (L'), $(f'_{1,2})$, und folglich der Gleichung (λ), wovon ſie das ſinguläre Integral iſt, weil ſie keine willkürliche Conſtante enthält.

Nun muß man aber bekanntlich, um die Gleichung (l) zu erhalten, a_1, a_2 zwiſchen der Gleichung (L) und ihren Ableitungen der erſten und zweiten Ordnung, wobei a_1, a_2 als Conſtanten behandelt werden, nämlich:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0 \qquad (L')$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy} y' + \frac{d^2F}{dy^2} y'^2 + \frac{dF}{dy} y'' = 0 \qquad (L'')$$

eliminiren. Wenn a_1, a_2 keine Conſtanten mehr, ſondern durch die Gleichungen (L) ((L')) beſtimmte Functionen von x, y ſind, ſo wird der Gleichung (L') noch genügt, aber der Gleichung (L'') nicht mehr, und folglich der Gleichung (l) auch nicht.

§. 485. Als Beiſpiel wollen wir die Differenzialgleichung:

$$y - xy' - (y' - xy'')^2 + \frac{x^2 y''}{2} - y''^2 = 0, \qquad (12)$$

deren zweites Integral:

$$y - \tfrac{1}{2} a_1 x^2 - a_2 x - (a_1^2 + a_2^2) = 0, \qquad (13)$$

deren Integrale der erſten Ordnung:

$$y + \left(\frac{a_1}{2} - a_1^2\right) x^2 - (1 - 2a_1) xy' - a_1^2 - y'^2 = 0$$

$$y - \frac{(a_2 + y')x}{2} - \frac{(a_2 - y')^2}{x^2} - a_2^2 = 0$$

ſind und deren ſinguläres Integral von derſelben Ordnung endlich:

$$y(1+x^2)+\frac{x^4}{16}-\left(\frac{x^3}{2}+x\right)y'-y'^2=0 \qquad (14)$$

iſt, betrachten. Wenn man dieſe letzte Gleichung in Beziehung auf y' auflöſet, ſo wird ſie auf die Form:

$$\frac{8y'+4x+2x^3}{\sqrt{16y+4x^2+x^4}}=2\sqrt{1+x^2} \qquad (15)$$

gebracht, woraus folgt, wenn man integrirt:

$$\sqrt{16y+4x^2+x^4}=x\sqrt{1+x^2}-\log.(\sqrt{1+x^2}-x)+c. \qquad (16)$$

Die Gleichung (16) leiſtet der gegebenen Gleichung (12) Genüge; aber da ſie nur eine willkürliche Conſtante c enthält, und durch eine ſchickliche Wahl der Conſtanten a_1, a_2 nicht auf das allgemeine Integral (13) zurückgeführt werden kann, ſo bildet ſie noch ein ſinguläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Die Gleichung (14) kann ſelbſt ein ſinguläres Integral haben, welches man vermittelſt der weiter oben angegebenen Methoden finden könnte, aber welches man einfacher beſtimmt, wenn man die Gleichungen $((L'))$, oder

$$\tfrac{1}{2}x^2+2a_1=0, \quad x+2a_2=0$$

bildet. Werden die daraus abgeleiteten Werthe von a_1, a_2 in die Gleichung (13) geſetzt, ſo kommt:

$$16y+4x^2+x^4=0,$$

und dieſe letzte Gleichung leiſtet offenbar den Gleichungen (14) oder (15), aber nicht der gegebenen (12) Genüge.

§. 486. Die Gleichung (x) enthält im Allgemeinen die Ableitungen von y bis zu $y^{(n)}$ incl.; aber es kann auch geſchehen, daß $y^{(n)}$ aus der Function φ verſchwindet, und alsdann iſt dieſelbe Gleichung ein ſinguläres Integral der $(n-1)^{ten}$ Ordnung der gegebenen Gleichung, und ſie würde ein ſinguläres Integral von der $(n-2)^{ten}$ Ordnung ſein, wenn $y^{(n-1)}$ ebenfalls aus der Function φ verſchwände, u. ſ. f.

Es ſei z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$(xy-1)(xy'^2-yy'+2xyy'')^2-xy(y+xy')^2y'^2=0$$

gegeben, wovon eins ihrer vollſtändigen Integrale der erſten Ordnung die Gleichung:

$$yy'^2-2a_1xyy'+a_1^2x=0 \qquad (17)$$

iſt. Das ſinguläre Integral der gegebenen Gleichung wird gebildet, wenn man a_1 vermittelſt der in Beziehung auf a_1 genommenen Ableitung der Gleichung (17) aus dieſer Gleichung fortſchafft. Dieſe Rechnung gibt:

$$yy'^2(xy-1)=0,$$

woraus ſich die drei Auflöſungen:

$$y'=0, \quad y=0, \quad xy-1=0$$

ergeben, welche drei ſinguläre Integrale der gegebenen Differenzialgleichung ſind, nämlich die erſte von der erſten Ordnung, und die beiden andern algebraiſch oder von der Ordnung Null.

§. 487. Die Werthe von $y^{(n)}$ als Functionen von $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$, welche die Gleichung (k) verificiren und die aus derſelben Gleichung (k) abgeleitete Function:

$$\frac{dy^{(n+1)}}{dy^{(n)}} \qquad (n)$$

unendlich machen, ſind ſinguläre Integrale der gegebenen Gleichung von der n^{ten} Ordnung, und alle ſinguläre Integrale der n^{ten} Ordnung müſſen die Ableitung (n) unendlich machen. Es müſſen noch andere Bedingungen erfüllt werden, wenn das ſinguläre Integral zufällig auf eine niedrigere Ordnung herabſinkt; allein wegen dieſer Unterſuchungen, welche außerhalb der Grenzen der Elemente lägen, müſſen wir auf die Functionenrechnung von Lagrange, und insbeſondere auch auf eine Abhandlung von Poiſſon in dem 13 Hefte des Journals der polytechniſchen Schule zu Paris verweiſen.

Fünftes Kapitel.

Geometriſche Anwendungen der Theorie der Integration der Differenzialgleichungen mit zwei veränderlichen Größen.

---

§. 488. In dieſem Kapitel wollen wir einige geometriſche Aufgaben betrachten, welche ſich auf die Integration der Differenzialgleichungen mit zwei Veränderlichen beziehen, und zwar wollen wir zunächſt die Curven beſtimmen, deren Krümmungshalbmeſſer der Normale proportional iſt (§. 172), welche Bedingung durch die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\mp \frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''} = ky\sqrt{1+y'^2},$$

oder:

$$1 + y'^2 = \mp kyy'' \qquad (a)$$

ausgedrückt wird, wo k ein conſtantes Verhältniß bezeichnet und das obere oder untere Zeichen genommen werden muß, je nachdem der Krümmungshalbmeſſer nach dem Sinne der Normale, oder nach entgegengeſetztem Sinne gerichtet iſt.

Die Gleichung (a) iſt eine von denen, worin die unabhängige Veränderliche nicht vorkommt (§. 451), und läßt ſich auf die Form:

$$1 + y'^2 = \mp ky\frac{dy'}{dx} = \mp kyy'\frac{dy'}{dy}$$

bringen, woraus folgt:

$$\frac{dy}{y} = \mp \frac{ky'dy'}{1+y'^2},$$

und wenn man zweimal hinter einander integrirt:

$$y = b(1+y'^2)^{\mp\frac{k}{2}}, \quad y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^{\mp\frac{2}{k}} - 1}$$

$$x - a = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^{\mp\frac{2}{k}} - 1}}. \qquad (b)$$

Die angedeutete Quadratur läßt ſich für die beiden Werthe $k = 1$, $k = 2$ unter endlicher Form verrichten. Es ſei zuerſt $k = 1$, ſo hat man, wenn man das obere Zeichen nimmt:

$$x - a = \int \frac{ydy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = -\sqrt{b^2 - y^2},$$

die Gleichung eines Kreiſes von einem beliebigen Halbmeſſer, deſſen Mittelpunkt auf der Axe der x liegt. Es iſt in der That einleuchtend, daß für einen ſo liegenden Kreis die Normale der Größe und Richtung nach mit dem Krümmungshalbmeſſer zuſammenfällt. Wenn man das untere Zeichen nimmt, ſo hat man:

$$x - a = \int \frac{bdy}{\sqrt{y^2 - b^2}} = b \log. \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - b^2}}{b}\right),$$

folglich:

$$y + \sqrt{y^2 - b^2} = be^{\frac{x-a}{b}},$$

welches die Gleichung der Kettenlinie iſt (§. 384). Wenn man $k = 2$ ſetzt, und das obere Zeichen nimmt, ſo gibt die Gleichung (b):

$$x - a = \int \sqrt{\frac{y}{b-y}} \cdot dy,$$

welches die Gleichung einer Cycloide iſt, deren Baſis die Axe der x iſt, und deren Erzeugungskreis einen Halbmeſſer $= \frac{1}{2} b$ hat, und in der That wiſſen wir bereits aus §. 198, daß der Krümmungshalbmeſſer einer ſo liegenden Cycloide das Doppelte der Normale und nach demſelben Sinne, wie ſie, gerichtet iſt.

Wenn man das untere Zeichen nimmt, ſo erhält man:

$$x - a = \sqrt{b} \int \frac{dy}{\sqrt{y-b}} = 2\sqrt{b(y-b)},$$

die Gleichung einer Parabel, deren Axe auf der Axe der x ſenkrecht iſt, und deren Scheitel in dem Punkte $x = a$, $y = b$ liegt.

§. 489. Wenn der Krümmungshalbmeſſer der geſuchten Curve dem reciproken Werthe der Abſciſſe proportional ſein ſollte, ſo wäre die Gleichung der Aufgabe:

$$\mp \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{k}{x}, \quad \text{oder} \quad xdx = \mp \frac{kdy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und wenn man integrirt:

$$x^2 + c = \mp \frac{2ky'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad dy = \pm \frac{(x^2+c)dx}{\sqrt{4k^2 - (x^2+c)^2}}.$$

Wir können die Constante c mit $-b^2$, die Constante k mit $\frac{\lambda^2}{2}$ bezeichnen, so daß der Ausdruck homogen wird, und endlich die Buchstaben x,y mit einander vertauschen, wodurch die vorhergehende Gleichung mit der ersten der Gleichungen (12) im §. 387 identisch wird. Die Curve, welche die fragliche Eigenschaft hat, ist also die, welche wir in dem angeführten § gerade wegen der jetzt durch eine Gleichung ausgedrückten Eigenschaft die elastische Curve genannt haben.

§. 490. Wir wollen nun eine Curve von solcher Beschaffenheit suchen, daß das Product der aus zwei gegebenen Punkten auf jede Tangente dieser Curve gefällten Perpendikel constant ist. Die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte wollen wir zur Axe der x, und die Mitte ihrer gegenseitigen Entfernungen zum Anfangspunkte der Coordinaten nehmen. Bezeichnen wir alsdann die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte mit 2c, und das Product der beiden Perpendikel mit b^2, so hat man nach den Bedingungen der Aufgabe die Differenzialgleichung:

$$\frac{(y-xy')^2-c^2y'^2}{1+y'^2}=\pm b^2, \qquad (c)$$

und man muß das obere, oder das untere Zeichen nehmen, je nachdem die beiden Punkte, von welchen die Perpendikel ausgehen, auf derselben Seite der Tangente liegen, oder nicht. Die vorhergehende Gleichung kann auf die Form:

$$y=xy'+\psi y' \qquad (\psi)$$

gebracht werden, und man hat:

$$\psi y'=\sqrt{(c^2\pm b^2)y'^2\pm b^2}.$$

Differenzirt man nach der im §. 448 für Gleichungen dieser Form angegebenen Methode, so findet man:

$$dy'\left[x+\frac{(c^2\pm b^2)y'}{\sqrt{(c^2\pm b^2)y'^2\pm b^2}}\right]=0,$$

und folglich ist:

$$dy'=0 \qquad (c'_1)$$

$$x+\frac{(c^2\pm b^2)y'}{\sqrt{(c^2\pm b^2)y'^2\pm b^2}}=0. \qquad (c'_2)$$

Wenn man y' zwischen den Gleichungen (c) und (c'_2) eliminirt, so erhält man das singuläre Integral der ersten dieser Gleichungen. Um die Elimination bequem verrichten zu können, bringt man diese Gleichungen auf die Form:

$$y-y'x=\sqrt{(c^2\pm b^2)y^2\pm b^2},$$

$$\frac{(c^2\pm b^2)y'}{x}=-\sqrt{(c^2\pm b^2)y^2\pm b^2}, \qquad (1)$$

woraus folgt, wenn man die Wurzelgröße eliminirt, und zum Quadrate erhebt:

$$y'^2=\frac{x^2y^2}{[x^2-(c^2\pm b^2)]^2}.$$

Die Gleichung (1) gibt auch, wenn man beide Theile zum Quadrat erhebt:

$$y'^2 = \mp \frac{b^2x^2}{(c^2 \pm b^2)[x^2 - (c^2 \pm b^2)]},$$

und wenn man dieſe beiden Werthe von y'^2 einander gleich ſetzt, ſo erhält man nach der Hinweglaſſung der gemeinſchaftlichen Factoren:

$$y^2(c^2 \pm b^2) \pm b^2x^2 = \pm b^2(c^2 \pm b^2).$$

Je nachdem man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, gehört dieſe Gleichung einer Ellipſe oder einer Hyperbel an, deren beide Brennpunkte die beiden gegebenen Punkte ſind, von welchen die Perpendikel auf die Tangente gefällt werden, und 2b iſt die kleine Axe der Ellipſe, oder die zweite Axe der Hyperbel.

Das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung wird erhalten, wenn man in dieſe Gleichung den durch die Gleichung (c'_1) gegebenen Werth $y' = \text{const.}$ ſubſtituirt. Dieſes allgemeine Integral iſt die Gleichung eines Syſtemes von geraden Linien, welche die geſuchte Ellipſe oder Hyperbel berühren. Offenbar genügen dieſe geraden Linien der Bedingung der Aufgabe in mathematiſcher Allgemeinheit; allein die einzige Auflöſung, welche man durch den Ausdruck derſelben hat erhalten können, wird durch das ſinguläre Integral gegeben, und dieſelbe Bemerkung iſt auf jede geometriſche Aufgabe anwendbar, welche auf die Beſtimmung einer Curve durch eine Differenzialgleichung von der Form (ψ) führt.

§. 491. Eine Differenzialgleichung von der Form:

$$y\sqrt{1 + y'^2} = f(x + yy') \qquad (d)$$

drückt eine Relation zwiſchen der Normale und der Entfernung des Anfangspunktes von dem Punkte, wo die Normale die Axe der Abſciſſen trifft, aus. Durch Differenziation erhält man:

$$(1 + y'^2 + yy'')\left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - f'(x + yy')\right] = 0,$$

woraus ſich die beiden Auflöſungen:

$$1 + y'^2 + yy'' = 0 \qquad (d'_1)$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - f'(x + yy') = 0 \qquad (d'_2)$$

ergeben. Aus der erſten folgt:

$$x + yy' = a, \qquad (2)$$

wo a eine willkürliche Conſtante bezeichnet, und wenn man den ſich daraus ergebenden Werth von y' in die gegebene Gleichung ſubſtituirt; ſo erhält man das allgemeine Integral:

$$\sqrt{(x - a)^2 + y^2} = fa, \qquad (3)$$

welches die Gleichung einer Reihe von Kreiſen iſt, deren Mittelpunkte auf der Axe der x liegen, und deren Halbmeſſer zu den Entfernungen der Mittelpunkte vom Anfangspunkte der Coordinaten in der durch das Zeichen f angedeuteten Relation ſtehen. Offenbar leiſtet die Umſchließungscurve aller dieſer Kreiſe der geometriſchen Aufgabe Genüge, welche darin beſteht: eine Curve vermittelſt der durch die gegebene Differenzialgleichung ausgedrückten Relation zu beſtimmen. Die Gleichung der Umſchließungscurve iſt genau das ſinguläre Integral, welches ſich aus der Elimination von y' zwiſchen den Gleichungen (d), (d'_2) ergibt, oder was wegen der Gleichung

(2) auf daſſelbe hinausläuft, die Gleichung, welche aus der Elimination von a zwiſchen der Gleichung (3) und ihrer Ableitung in Beziehung auf a, nämlich:

$$\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} - f'a = 0$$

hervorgeht.

§. 492. Da die Coordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes einer ebenen Curve durch die Formeln:

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

gegeben werden (§. 190), ſo müſſen, wenn man die Gleichung der Evolute durch:

$$\varphi(\xi, \eta) = 0, \quad \text{oder} \quad \eta = f\xi \qquad (f)$$

ausdrückt, die Coordinaten x, y ihrer Evolventen der Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y + \frac{1+y'^2}{y''} = f\left[x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right] \qquad (a)$$

genügen. Um dieſe Gleichung zu integriren, differenzirt man ſie zuvörderſt in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche x, und man ſieht, daß die abgeleitete Gleichung die Form:

$$\left\{y' + \frac{d\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)}{dx}\right\}\left\{1 + y'f'\left[x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]\right\} = 0$$

annehmen kann, ſo daß ſie in die beiden andern:

$$y' + \frac{d\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)}{dx} = 0 \qquad (a_1)$$

$$1 + y'f'\left[x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right] = 0 \qquad (a_2)$$

zerfällt.

Das Integral der erſten iſt:

$$y + \frac{1+y'^2}{y''} = b, \qquad (b)$$

wo b eine willkürliche Conſtante bezeichnet, und folglich hat man nach der Gleichung (a) auch:

$$x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = a \qquad (c)$$

wofern die neue Conſtante a mit b durch die Relation:

$$b = fa \qquad (d)$$

verbunden iſt.

Die Gleichungen (b) und (c) geben:

$$x - a + (y-b)y' = 0,$$

woraus ſich durch eine neue Integration ergibt:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2. \qquad (e)$$

Dieſe letzte Gleichung, welche zwei willkürliche Conſtanten a, c und eine dritte mit a durch die Gleichung (d) verbundene Conſtante b enthält, iſt folglich das vollſtändige Integral der Gleichung (a). Dieſes vollſtändige Integral drückt offenbar irgend einen der Osculationskreiſe einer beliebigen der Evolventen der gegebenen Curve (f), oder vielmehr das Syſtem aller dieſer Osculationskreiſe aus.

Eliminirt man nun die Größe $\frac{1+y'^2}{y''}$ zwiſchen den Gleichungen (a) und (a_2), was als möglich angenommen wird, wenn die Function f gegeben iſt; ſo erhält man eine Gleichung mit x, y, y', welche ein erſtes ſinguläres Integral der Gleichung (a) iſt. Durch eine neue Integration wird eine willkürliche Conſtante h eingeführt, und man hat die Gleichung der Evolventen der gegebenen Curven zwiſchen x, y, h, welche in der That nur eine einzige willkürliche Conſtante enthalten muß, weil der Verlauf jeder Evolvente beſtimmt iſt, wenn man die Länge ihres Krümmungshalbmeſſers für einen, einem gegebenen Punkte der Evolute entſprechenden Punkt derſelben willkürlich angenommen hat. Jede Evolvente iſt die Berührungslinie einer Reihe in der Ausdehnung des allgemeinen Integrales (e) enthaltener Kreiſe, und ſie geht ſogar mit jedem dieſer Kreiſe eine Berührung der zweiten Ordnung ein.

Die Ableitung der Gleichung der Evolvente läuft vermittelſt der Formeln:

$$d\varrho = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$$
$$(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta = \varrho\,d\varrho$$
$$(\xi - x)\,d\eta - (\eta - y)\,d\xi = 0,$$

worin ϱ den Krümmungshalbmeſſer der Evolvente bezeichnet, und wovon die beiden erſten im §. 191 abgeleitet ſind, während ſich die dritte offenbar daraus ergibt, daß der Krümmungshalbmeſſer der Evolvente Tangente der Evolute iſt, auf eine einfache Quadratur hinaus. Aus dieſen Gleichungen folgt:

$$\varrho = h + \int \sqrt{1 + (f'\xi)^2} \cdot d\xi$$

$$\xi - x = \varrho \frac{d\xi}{d\varrho} = \frac{[h + \int \sqrt{1 + (f'\xi)^2} \cdot d\xi]}{\sqrt{1 + (f'\xi)^2}}$$

$$\eta - y \quad \text{oder} \quad f\xi - y = \varrho \frac{d\eta}{d\varrho} = \frac{[h + \int \sqrt{1 + (f'\xi)^2} \cdot d\xi] f'\xi}{\sqrt{1 + (f'\xi)^2}}.$$

Wenn die Function f particulariſirt und die in dem Ausdrucke von ϱ angedeutete Quadratur verrichtet iſt, ſo braucht man nur ξ zwiſchen dieſen beiden letzten Gleichungen zu eliminiren, um die Gleichung der Evolventen mit x, y, h zu erhalten. Mit andern Worten, die Beſtimmung der Gleichung der Evolventen iſt einzig und allein von der Rectification der Evolute abhängig, wie dieſes nach der charakteriſtiſchen Eigenſchaft der Evoluten der Fall ſein muß.

§. 493. Aus §. 284 folgt, daß das Syſtem der Projectionen der Krümmungslinien einer krummen Fläche auf eine der Coordinatenebenen durch die Integration einer allen dieſen Projectionen gemeinſchaftlichen Differenzialgleichung (i) erhalten wird. Nimmt man z. B. das Ellipſoid mit drei ungleichen Axen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ſo iſt die Differenzialgleichung der Projectionen der Krümmungslinien auf die Ebene der xy:

$$Axyy'^2 + (x^2 - Ay^2 - B)y' - xy = 0, \qquad (\bullet)$$

wo der Kürze wegen:

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)} = A, \quad \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2} = B$$

geſetzt iſt. Differenzirt man die Gleichung $(\bullet)$, ſo erhält man nach verrichteter Reduction:

$$(2Axyy' + x^2 - Ay^2 - B)\,y'' + (Ay'^2 + 1)(xy' - y) = 0,$$

und wenn man für das Polynom $x^2 - Ay^2 - B$ ſeinen aus der Gleichung $(\bullet)$ gezogenen Werth ſetzt, ſo nimmt die vorhergehende Gleichung die Form an:

$$\left(\frac{Ay'^2+1}{y'}\right)[xyy'' + y'(xy' - y)] = 0,$$

woraus ſich die beiden Auflöſungen:

$$xyy'' + y'(xy' - y) = 0 \qquad (\bullet_1)$$

$$\frac{Ay'^2+1}{y'} = 0 \qquad (\bullet_2)$$

ergeben.

Beſchäftigen wir uns zunächſt mit der erſten, welche gibt:

$$\frac{y}{x} \cdot y'' + y' \cdot \frac{xy' - y}{x^2} = 0,$$

und wenn man zweimal hinter einander integrirt:

$$\frac{y}{x} \cdot y' = \alpha \qquad (4)$$

$$y^2 = \alpha x^2 + \beta. \qquad (5)$$

Man hätte ſich der zweiten Integration überheben, und nach der in andern Fällen befolgten Methode y' zwiſchen den Gleichungen $(\bullet)$ und (4) eliminiren können. Durch dieſe Rechnung erhält man:

$$Ax^2\alpha^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\alpha - y^2 = 0, \qquad (6)$$

und wenn man das Reſultat mit der Gleichung (5) vergleicht, ſo ergibt ſich:

$$\beta = -\frac{B\alpha}{A\alpha + 1} = -\frac{a^2b^2(a^2-b^2)\alpha}{a^2(b^2-c^2)\alpha + b^2(a^2-c^2)}, \qquad (7)$$

allein man kann die Conſtante β der Kürze wegen hinweglaſſen.

Es ſei (x_0, y_0, z_0) ein Punkt des Ellipſoides, durch welchen eine beſtimmte Krümmungslinie gehen muß, ſo gibt die Gleichung (6):

$$\alpha = \frac{-(x_0^2 - Ay_0^2 - B) \pm \sqrt{(x_0^2 - Ay_0^2 - B)^2 + 4Ax_0^2y_0^2}}{2Ax_0^2}. \qquad (8)$$

Wir wollen nun annehmen, daß:

$$a > b > c$$

iſt, ſo daß die Conſtanten A, B poſitiv werden, ſo ſind die beiden durch die Gleichung (8) gegebenen Werthe von α reell und von entgegengeſetztem Zeichen; dem poſitiven Werthe von α entſpricht vermöge der Gleichung (7) ein negativer Werth von β, und dem negativen Werthe von α entſpricht ein poſitiver Werth von β, denn es iſt:

$$2x_0^2(A\alpha+1) = x_0^2 + Ay_0^2 + B - \sqrt{(x_0^2 - Ay_0^2 - B)^2 + 4Ax_0^2y_0^2}$$
$$= x_0^2 + Ay_0^2 + B - \sqrt{(x_0^2 + Ay_0^2 + B)^2 - 4Bx_0^2}, \quad (9)$$

so daß der in dem Ausdrucke von β vorkommende Nenner $A\alpha+1$ für die negativen Werthe von α positiv bleibt. Hieraus folgt, daß die Projectionen der beiden Krümmungslinien, welche sich auf dem Ellipsoide im Punkte x_0, y_0, z_0 rechtwinklig durchschneiden, auf der Ebene der xy eine auf denselben Mittelpunkt und auf dieselben Axen bezogene Ellipse und Hyperbel sind, indem die Queraxen der Hyperbel mit der Axe der x zusammenfällt. Wenn man vermöge dieser Bemerkung $\frac{\beta}{\alpha} = -\xi^2$, $\beta = \pm\eta^2$ setzt, so sind die Größen ξ, η immer reell, die doppelte Reihe der Projectionen der Krümmungslinien fällt mit der doppelten Reihe der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{\xi^2} \pm \frac{y^2}{\eta^2} = 1$$

gegebenen Ellipsen und Hyperbeln zusammen, und die Linien ξ, η, oder die Halbaxen dieser Curven sind durch die Gleichung (7) mit einander verbunden, welche sich in:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2(a^2 - b^2)}\xi^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^2(a^2 - b^2)}\eta^2 = 1$$

verwandelt, und welche man vermittelst einer Hyperbel oder Ellipse construiren kann.

§. 494. Betrachten wir zuerst die Hülfshyperbel:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2(a^2 - b^2)}\xi^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^2(a^2 - b^2)}\eta^2 = 1,$$

deren Construction die Reihe der Krümmungslinien, deren elliptische Projectionen in der Gleichung:

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\eta^2} = 1 \quad (f)$$

enthalten sind, bestimmt. Die Größe ξ^2 kann von dem Werthe:

$$\frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2} \quad (\varepsilon)$$

bis ins Unendliche wachsen, und die correspondirenden Werthe von η^2 sind resp. $0, \infty$. Nach der Voraussetzung über die Größenfolge der Linie a, b, c ist immer $\eta^2 < \xi^2$ und die große Axe aller elliptischen Projectionen liegt in der Axe der x (Fig. 97). Die Ellipse verwandelt sich in eine gerade Linie und fällt mit dieser Axe der x genau zusammen, wenn man $\eta^2 = 0$ setzt. Sie fällt mit dem Durchschnitte des Ellipsoides vermittelst der Ebene der xy zusammen, wenn man $\eta^2 = b^2$, folglich $\xi^2 = a^2$ setzt. Für größere Werthe von η^2 sind die durch die Gleichung (f_1) gegebenen Ellipsen zwar immer reell; aber gehören nicht zu den Krümmungslinien des Ellipsoides.

Betrachten wir nur die Hülfsellipse:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2(a^2 - b^2)}\xi^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2(a^2 - b^2)}\eta^2 = 1,$$

deren Construction die Reihe der Krümmungslinien mit hyperbolischen Projectionen:

$$\frac{x^2}{\xi^2} - \frac{y^2}{\eta^2} = 1 \qquad (f_2)$$

bestimmt. Die Größe ξ^2 kann von Null bis zu dem Werthe (ε) wachsen, während η^2 von dem Werthe:

$$\frac{b^2(a^2 - b^2)}{b^2 - c^2}$$

bis zu Null abnimmt. Die Hyperbel (f_2) fällt an der ersten Grenze mit der Axe der y und an der zweiten mit der Axe der x zusammen.

Aus dieser doppelten Construction folgt, daß alle elliptischen und hyperbolischen Projectionslinien ihre Concavität gegen die beiden auf der Axe der x liegenden Punkte zu kehren, deren Abscissen:

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \qquad (h)$$

sind, und welche die Projectionen der vier Stabelpunkte des Ellipsoides (§. 283) auf die Ebene der xy sind.

Wir hätten nun noch die durch die Gleichung $(\bullet_2)$ gegebenen Auflösungen zu untersuchen; aber da der Coefficient A positiv und nach der Voraussetzung der Factor $Ay'^2 + 1 = 0$ ist, so würde keine reelle Auflösung stattfinden können, und die Verbindung der Gleichung $\frac{1}{y'} = 0$ mit $(\bullet)$ würde die schon erhaltene Auflösung $x = 0$ wieder geben.

§. 495. Wenn man $a < b < c$ gesetzt hätte, so wären die Coefficienten A, B immer positiv geblieben, und es wäre an der vorhergehenden Untersuchung weiter nichts geändert, als daß man die nach der Axe der y gerichteten großen Axen der elliptischen Projectionen gefunden hätte.

Es kommt also nur noch darauf an, die Projectionen der Krümmungslinien auf der Ebene zu construiren, welche die größte und kleinste Axe des Ellipsoides enthält, und in der Voraussetzung:

$$a > c > b$$

die Ebene der xy wird. Der Coefficient B bleibt positiv; aber da der Coefficient A negativ wird, so folgt aus der Gleichung (8), daß die beiden Werthe der Constante α immer dasselbe Zeichen haben. Wir behaupten ferner, daß sie beide negativ sind, so daß die Ungleichheit:

$$x_0^2 - Ay_0^2 - B < 0$$

stattfindet, oder, wenn man die Werthe von A, B substituirt:

$$\frac{x_0^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \cdot \frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2} < 1.$$

Da aber der Punkt (x_0, y_0, z_0) der Oberfläche des Ellipsoides angehört, so folgt:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1,$$

(wo das Zeichen $<$ den Fall der Gleichheit nicht ausschließt) und wenn diese Ungleichheit erfüllt wird, so wird es die vorhergehende um so mehr, denn die Verhältnisse:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}, \quad \frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2}$$

sind nach der Voraussetzung in Beziehung auf die Größenfolge der Linien a, b, c kleiner, als die Einheit. Ferner ist vermöge der Gleichung (7) und der Zeichen von A, B, α die Constante β immer positiv. Man kann also $\frac{\beta}{\alpha} = -\xi^2$, $\beta = \eta^2$ setzen, so daß die doppelte Reihe der Krümmungslinien mit der Reihe von Ellipsen zusammenfällt, welche man erhält, wenn man in der Gleichung:

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\eta^2} = 1 \qquad (f_1)$$

die Parameter ξ, η, welche selbst die Coordinaten einer Hülfsellipse:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2(a^2 - b^2)}\xi^2 + \frac{c^2 - b^2}{b^2(a^2 - b^2)}\eta^2 = 1 \qquad (10)$$

sind, variiren läßt.

Der Parameter ξ^2 variirt zwischen den Grenzen:

$$0, \quad \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2},$$

während η^2 zwischen den Grenzen:

$$\frac{b^2(a^2 - b^2)}{c^2 - b^2}, \quad 0$$

variirt. Wenn man $\xi^2 = 0$ setzt, so fällt die Ellipse (f_1) mit der Axe der y zusammen, und ist in dem Sinne der y länglich, so lange $\xi^2 < \frac{a^2 b^2}{c^2}$ ist. Sie wird ein Kreis, wenn ξ^2 diesen Werth erreicht, wird dann für größere Werthe von ξ^2 in dem Sinne der x länglich, fällt mit dem Durchschnitte des Ellipsoides mit der Ebene xy zusammen, wenn $\xi^2 = a^2$ ist, wird immer länglicher und fällt zuletzt mit der Axe der x zusammen, wenn ξ^2 seine obere Grenze erreicht, oder wenn η^2 verschwindet (Fig. 98).

Es bleibt nun noch die durch die Gleichung:

$$Ay'^2 + 1 = 0$$

gegebene singuläre Auflösung, welche wegen des negativen Zeichens von A reell ist, zu betrachten übrig. Wird der daraus abgeleitete Werth von y' in die Gleichung (e) substituirt, so erhält man:

$$b^2(a^2 - c^2)x^2 \pm 2ab\sqrt{(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)} \cdot xy + a^2(c^2 - b^2)y^2 = a^2b^2(a^2 - b^2),$$

und diese letzte Gleichung zerfällt in die beiden folgenden:

$$b\sqrt{a^2 - c^2} \cdot x \pm a\sqrt{c^2 - b^2} \cdot y = ab\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$b\sqrt{a^2 - c^2} \cdot x \pm a\sqrt{c^2 - b^2} \cdot y = -ab\sqrt{a^2 - b^2},$$

welche vier durch die Scheitel der Hülfsellipse (10) gehende gerade Linien ausdrücken. Nach der Theorie der singulären Integrale müssen diese vier geraden Linien alle durch die Gleichung (f_1) gegebene Ellipsen berühren, wie man sich überzeugen kann, wenn man die Gleichung (10) berücksichtigt, welche nur einen der Parameter ξ, η willkürlich läßt.

Da der Durchschnitt des Ellipsoides mit der Ebene der xy eine der Krümmungslinien ist, so berührt er die eben bestimmten vier geraden Linien

in vier Punkten $0, 0', 0'', 0'''$, welche genau die Stabelpunkte der krummen Fläche sind. Denn für die Abcissen dieser Punkte findet man:

$$x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}},$$

und in dieser Formel bezeichnet b die kleinste, und c die mittlere Axe des Ellipsoides, so daß sie mit der Formel (h) übereinstimmte, wenn man durch b die mittlere und durch c die kleinste Axe bezeichnete, welche Bedeutung diese Buchstaben in der Gleichung (h) in der That haben.

Die Auflösung $\frac{1}{y'} = 0$ würde nur die particulären Auflösungen $x = 0$, $y = 0$ wieder geben.

Die elegante Construction der Krümmungslinien des Ellipsoides rührt von Monge her, und Leroy hat eine Verbesserung daran angebracht, indem er den Factor $Ay'^2 + 1$ in Rechnung bringt, um die singuläre Auflösung direct zu erhalten.

§. 496. Im §. 277 sagten wir, daß man es als für sich klar annehmen könne, daß die Kugelfläche die einzige krumme Fläche ist, für deren sämmtliche Punkte die beiden Krümmungshalbmesser einander gleich und nach demselben Sinne gerichtet sind. Um aber über diesen wichtigen Theil der Theorie der krummen Flächen nichts Wesentliches zu wünschen übrig zu lassen, wollen wir den Beweis des eben erwähnten Satzes hier mittheilen.

Die beiden partiellen Differenzialgleichungen, welche für alle Punkte der in Rede stehenden krummen Fläche erfüllt werden müssen, sind (§. 282):

$$(1 + q^2)s - pqt = 0, \quad (1 + p^2)s - pqr = 0,$$

welche auch auf folgende Form gebracht werden können

$$\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dy} = 0, \quad \frac{d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx} = 0.$$

Bei der Integration muß man statt der willkürlichen Constanten eine willkürliche Function der andern unabhängigen Veränderlichen, in Beziehung auf welche nicht integrirt wird, setzen, und auf diese Weise erhält man:

$$p = \varphi x \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad q = \psi y \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

woraus folgt:

$$p = \frac{\varphi x}{\sqrt{1 - (\varphi x)^2 - (\psi y)^2}}, \quad q = \frac{\psi y}{\sqrt{1 - (\varphi x)^2 - (\psi y)^2}},$$

$$dz = \frac{\varphi x \cdot dx + \psi y \cdot dy}{\sqrt{1 - (\varphi x)^2 - (\psi y)^2}}.$$

Aber die Gleichung jeder krummen Fläche muß der Bedingung der Integrabilität:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, \quad \text{folglich:} \quad \varphi' x = \psi' y$$

genügen, und diese letzte Gleichung muß identisch sein, d. h. für alle Werthe von x und y stattfinden. Man muß folglich haben:

$$\varphi' x = \frac{1}{k}, \quad \psi' y = \frac{1}{k},$$

wo $\frac{1}{k}$ eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Hieraus ergibt ſich durch Integration:

$$\varphi x = \frac{x-a}{k}, \quad \psi x = \frac{y-b}{k}$$

$$dz = \frac{(x-a)\,dx + (y-b)\,dy}{\sqrt{k^2-(x-a)^2-(y-b)^2}},$$

und wenn man nochmals integrirt, ſo erhält man:

$$z - c = -\sqrt{k^2-(x-a)^2-(y-b)^2},$$

die Gleichung einer Kugel, deren Halbmeſſer und Mittelpunktscoordinaten willkürlich ſind.

§. 497. Aus §. 126 wiſſen wir, daß die Projectionen der Niveaulinien und der Linien des ſtärkſten Falles oder des ſtärkſten Abhanges einer krummen Fläche auf die Ebene der xy durch die partiellen Differenzialgleichungen:

$$p + qy' = 0, \quad py' - q = 0$$

ausgedrückt werden. Wenn nun eine Familie krummer Oberflächen durch eine partielle Differenzialgleichung von der Form $f\left(x, y, \frac{q}{p}\right) = 0$ charakteriſirt wird, ſo iſt $f(x, y, y') = 0$ die Differenzialgleichung der Linien des ſtärkſten Falles für alle Flächen dieſer Familie.

Da z. B. die Rotationsoberflächen um die Axe der z durch die partielle Differenzialgleichung $py = qx$ charakteriſirt werden (§. 254), ſo iſt $xy' = y$, folglich $y = cx$, wo c eine willkürliche Conſtante bezeichnet, die Gleichung der Linien des ſtärkſten Falles, und in der That fallen dieſe Linien mit den Meridiancurven der Oberfläche zuſammen, welche ſich nach geraden durch den Anfangspunkt gehenden Linien auf die Ebene der xy projiciren.

Ebenſo iſt für die geraden conoidiſchen Flächen (§. 253), deren partielle Differenzialgleichung $px = -qy$ iſt, die Differenzialgleichung der Projectionen der Linien des ſtärkſten Falles $yy' = -x$, folglich $x^2 + y^2 = c^2$, d. h. die Linien des ſtärkſten Falles der Flächen dieſer Familie projiciren ſich auf die Ebene der xy nach Kreiſen, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten iſt, wie ſich daraus ergibt, daß alle Niveaulinien durch die Axe der z gehende gerade Linien ſind.

§. 498. Die Niveaulinien des Ellipſoides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{(i)}$$

projiciren ſich auf die Ebene der xy nach concentriſchen und ähnlichen Ellipſen, welche durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2 \qquad \text{(i')}$$

ausgedrückt werden, indem sich der Parameter zwischen Null und der Einheit ändern kann. Die Differenzialgleichung der Projectionen der Linien des stärksten Falles nimmt die Form:

$$\frac{a^2 dx}{x} = \frac{b^2 dy}{y}$$

an, woraus folgt, wenn γ eine willkürliche Constante bezeichnet:

$$y^{b^2} = \gamma x^{a^2}. \qquad (k)$$

Wenn die Axen a, b commensurabel sind, so werden die Linien des stärksten Falles algebraische Curven, und im entgegengesetzten Falle sind es transcendente Curven.

Es sei (x_0, y_0, z_0) ein Punkt des Ellipsoides, durch welchen man eine Linie des stärksten Falles legen will, so verwandelt sich die Gleichung (k) in:

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^{b^2} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{a^2},$$

und was für rationale oder irrationale Werthe man auch den Exponenten a^2, b^2 beilegen mag, so ist die Curve doch für alle Werthe von x, y stetig, welche resp. dieselben Zeichen haben, als x_0, y_0. Mit andern Worten, wenn wir uns das Ellipsoid durch die auf einander senkrechten Ebenen der xz uno yz in vier symmetrische Regionen getheilt denken, so erfährt die Curve keine Unterbrechung der Stetigkeit, so lange sie nicht aus der Region heraustritt, welcher der Punkt x_0, y_0, z_0 angehört. In dem Scheitel des Ellipsoides berührt sie die Ebene der xz, oder die der yz, je nachdem $a^2 \gtrless b^2$ ist, und sie vereinigt sich daselbst mit allen in einer der drei übrigen Regionen des Ellipsoides, oder selbst in der Region, worin sich der Punkt (x_0, y_0, z_0) bereits befindet, beliebig construirten Linien des stärksten Falles.

In dem besondern Falle, wo die Zahlen a^2, b^2 commensurabel sind, kann man der Einfachheit wegen für diese Zahlen ihnen proportionale ganze Zahlen m, n, welche prim unter sich sind, setzen, was auf die Multiplication der Gleichungen (i), (i') durch einen constanten Factor hinausläuft. Alsdann kann die algebraisch gewordene Niveaulinie sich nicht im Scheitel des Ellipsoides schließen, und sie bildet algebraisch nur eine und dieselbe Curve mit einer andern Linie des stärksten Falles, so daß die Projection der vollständigen Curve auf die Ebene der xy eine der in Fig. 99, 100 und 101 angegebenen Gestalten hat. Wenn man $m > n$ oder $a^2 > b^2$ annimmt, wodurch die Allgemeinheit der Construction nicht beeinträchtigt wird, so entspricht die Fig. 99 dem Falle, wo m ungerade und n gerade ist, die Fig. 100 dem Falle, wo m gerade und n ungerade ist, und die Fig. 101 dem Falle, worin m und n beide ungerade Zahlen sind. Nun ist aber einleuchtend, daß die Commensurabilität der Zahlen a^2, b^2 oder m, n und die arithmetische Eigenschaft, daß sie gerade oder ungerade Zahlen sind, nichts an den geometrischen Bedingungen der Aufgabe verändern, welche darin besteht, auf einem Ellipsoide Linien des stärksten Falles, oder auf einer Ebene Curven zu beschreiben, welche auf einer Reihe concentrischer und ähnlicher Ellipsen senkrecht sind. Es würde für die plötzliche Veränderung der Form der Linien des stärksten Falles, oder ihrer Projectionen kein geometrischer Grund vorhanden sein, wenn sie z. B. im Scheitel des Ellipsoides oder im Anfangspunkte der Coordinaten eine Inflexion statt einer Rückkehr erführen, und zwar vermöge einer beliebig kleinen Veränderung des Verhältnisses $\frac{m}{n}$, welches das Verhältniß der Quadrate zweier

Halbaxen des Ellipsoides ist. Es erhellet also, daß der Zusammenhang zwischen je zwei von dem Scheitel ausgehenden Krümmungslinien in dem Falle der Commensurabilität des Verhältnisses $\frac{m}{n}$ ein rein algebraisches Factum, eine Folgerung aus der Regel der Zeichen ist, wofür sich aus der Natur der Aufgabe kein Grund angeben läßt, und welche keinem geometrischen Factum entspricht.

Diese Bemerkungen waren nothwendig zur Vervollständigung des bisher und namentlich des im Buch 4 Kapitel 4 über die Natur des Conneres zwischen der Geometrie und Algebra Gesagten.

§. 499. Der Fall der krummen Fläche im Punkte (x, y, z) wird nach §. 126 durch die Wurzelgröße: $\sqrt{p^2 + q^2}$ gemessen, welche sich für das Ellipsoid in:

$$\frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$$

verwandelt. Auf derselben Niveanlinie entspricht folglich der größte und kleinste Fall dem größten und kleinsten Werthe der Function:

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4},$$

welche sich vermöge der Gleichung (i′) in:

$$\frac{k^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

verwandelt. Wir wollen, um die Begriffe zu fixiren, $a > b$ annehmen, so entspricht das Maximum der Function $z = 0$ und das Minimum $x = a$ oder $y = 0$. Folglich ist der Durchschnitt des Ellipsoides mit der Ebene, welche die verticale Axe und die kleinste der beiden horizontalen Axen enthält, die Linie des stärksten Falles, worauf der Fall für dieselbe Verticalhöhe am größten ist, oder in der geometrischen Sprache, diese Linie entspricht einem **maximum maximorum**. Dagegen ist der Durchschnitt des Ellipsoides mit der Ebene, welche außer der verticalen Axe noch die größte der horizontalen Axen enthält, unter den Linien des stärksten Falles die des **geringsten Falles**, und sie entspricht einem **minimum maximorum**.

§. 500. Die Linien des stärksten Falles sind diejenigen, welche ein der Wirkung der Schwere folgender Flüssigkeitsfaden auf der Oberfläche, wozu sie gehören, beschreiben würde, und die Gesammtheit der Linien des stärksten Falles, welche man sich auf der Erdoberfläche gezogen, vorstellen kann, bestimmt das orographische und hydrographische System einer Gegend. Der Reisende, welcher in ein Thal hinabsteigt, geht längs der Linie des stärksten Falles fort, welche gewöhnlich von einem Wasserstrome angegeben wird, und welche man mit dem Worte **Thalweg** bezeichnet, zu seiner Rechten und Linken bestimmen die Regenbäche der Hügel andere Linien des stärksten Falles, deren Thalweg in der ideellen Voraussetzung einer vollkommenen Stetigkeit der Formen die Berührungslinie oder Asymptote wäre. Die Hügel- oder Bergrücken schließen sich mit der sogenannten **Wasserscheide**, welche unter denselben Umständen die Berührungslinie oder Asymptote der gewöhnlichen Krümmungslinien sein würde. In Beziehung auf diese sind die Linien der Wasserscheiden

und des Thalweges in dem eben erklärten Sinne ebenfalls Linien des geringsten Falles. Endlich durchschneiden sich die Linien der Wasserscheide und des Thalweges unter rechten Winkeln, indem sie ihre Krümmungen in den Punkten, welche man Engpässe nennt, und in welchen man die Wege und Kanäle die Wasserscheide durchschneiden läßt, und welche den relativen Minimis der verticalen Ordinate der krummen Oberfläche entsprechen, nach entgegengesetztem Sinne kehren.

Dieses ist der geometrische Typus, auf welchen man die Configuration der durch allmälige und stetige Wirkungen entstandene Thäler beziehen kann; aber im Allgemeinen sind die großen Ungleichheiten der Erdoberfläche durch convulsivische Wirkungen und Verrückungen entstanden, deren Spuren nicht verwischt sind, ungeachtet des langen Einflusses atmosphärischer Agentien, welche die Vertiefungen fortwährend auszufüllen, und die Erhabenheiten der Umrisse eben zu machen streben. Aus den Stetigkeitsunterbrechungen der Werthe der Coefficienten p und q folgt, daß die Berührungsebene und die Normale plötzlich von einer Richtung zu einer andern übergeht. Alsdann treten an die Stelle der Linien der Wasserscheide und des Thalweges Kanten, welche die Linien des stärksten Falles gewöhnlich unter endlichen Winkeln durchschneiden.

§. 501. Die Bestimmung der Projectionen der Linien des stärksten Falles ist als besonderer Fall in einer Aufgabe enthalten, welche unter dem Namen des „Problemes der Trajectorien" zu der Zeit, wo die Bernoulli's die Ideen Leibnitz's zur Ausführung brachten, und die ersten Entwickelungen der Integralrechnung zur Folge hatten, berühmt geworden ist.

In rein geometrischem Sinne versteht man nämlich unter Trajectorie die Curve, welche alle durch die Gleichung:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (l)$$

ausgedrückten Curven, wenn man den Parameter a sich stetig ändern läßt, unter einem constanten Winkel durchschneidet. Wenn der Durchschnittswinkel ein rechter ist, so können die beiden Systeme der orthogonalen Curven für die Systeme der Projectionen der Niveaulinien und der Linien des stärksten Falles einer krummen Fläche auf die Ebene der xy genommen werden.

Es sei im Allgemeinen α die Tangente des Einfallswinkels der Trajectorien und ξ, η die zu den Axen der x und der y parallelen veränderlichen Coordinaten einer derselben, so hat man für den Durchschnittspunkt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy}, \quad \alpha = \left(\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{dy}{dx}\right) : \left(1 + \frac{d\eta}{d\xi} \cdot \frac{dy}{dx}\right),$$

folglich:

$$\alpha\left(\frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\eta}{d\xi}\right) = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{dF}{dx}. \qquad (m)$$

Im Durchschnittspunkte ist $x = \xi$, $y = \eta$, so daß die vorhergehende Gleichung nur die Veränderlichen $x, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}$, und den Parameter a enthält. Nachdem man diesen Parameter vermittelst der Gleichung $F(\xi, \eta, a) = 0$ fortgeschafft hat, ist die Gleichung (m) die Differenzialgleichung der Trajectorie.

Wir wollen annehmen, daß die durchschnittenen Curven durch die Gleichung $y^n = ax^m$ ausgedrückt werden, so ist die Differenzialgleichung der Trajectorie:

$$\alpha\left(n\xi + m\eta\frac{d\eta}{d\xi}\right) + m\eta - n\xi\frac{d\eta}{d\xi} = 0, \qquad (m')$$

und da sie homogen ist, so kann sie nach der Methode im §. 439 behandelt werden. Wenn $m = n = 1$ ist, so ist das System der durchschnittenen Linien ein System durch den Anfangspunkt gehender gerader Linien, und die Gleichung (m') verwandelt sich in:

$$\alpha(\xi d\xi + \eta d\eta) + \eta d\xi - \xi d\eta = 0,$$

woraus folgt, wenn man durch $\xi^2 + \eta^2$ dividirt, und dann integrirt:

$$\alpha \log. \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \text{arc. tang.} \frac{\eta}{\xi} = c.$$

Setzt man:

$$\xi = r \cos. \varphi, \quad \eta = r \sin. \varphi, \quad e^{\frac{c}{\alpha}} = b,$$

so nimmt das vorhergehende Integral die Form an:

$$r = b e^{\frac{\varphi}{\alpha}}$$

und ist die Gleichung einer logarithmischen Spirale (§. 181), welche in der That die Eigenschaft hat, daß sie die durch den Pol gezogenen geraden Linien unter einem constanten Winkel durchschneidet.

Um die Orthogonaltrajectorien zu erhalten, muß man $\alpha = \infty$ setzen, wodurch sich die Gleichung (m') auf $n\xi d\xi + m\eta d\eta = 0$ reducirt, deren Integral $n\xi^2 + m\eta^2 = c$ eine Reihe concentrischer und ähnlicher Ellipsen oder Hyperbeln angehört, je nachdem die Exponenten m, n gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, d. h. je nachdem die durchschnittenen Curven Ellipsen oder Hyperbeln sind.

Sechstes Kapitel.

Ueber die Integration der gleichzeitigen Differenzialgleichungen.

§. 502. Betrachten wir, wie im §. 165, ein System von ν Gleichungen zwischen der unabhängigen Veränderlichen t und den von t abhängigen ν Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ nebst deren Ableitungen $x', y', z', \ldots; x'', y'', z'', \ldots, \text{ꝛc.}$, so besteht das Problem der Integration der gleichzeitigen Differenzialgleichungen darin, aus den sich unter dieser Form darbietenden Gleichungen die Werthe von $x, y, z, \ldots$ als Functionen von t abzuleiten, indem man diesen Werthen durch die Einführung der gehörigen Anzahl willkürlicher Constanten alle nur zulässige Allgemeinheit ertheilt. Um an einer Anwendung die Begriffe zu fixiren, wollen wir uns ein in Bewegung befindliches System materieller Punkte denken, welche gegenseitige Anziehungen oder Abstoßungen auf einander ausüben, die sich mit ihren gegenseitigen Entfernungen ändern. Wir wollen die Zeit mit t und die Coordinaten der beweglichen Punkte mit $x, y, z; x_1, y_1, z_1, \text{ꝛc.}$ bezeichnen. Die unendlich kleinen Veränderungen der Geschwindigkeiten sind von den auf die materiellen Punkte wirkenden Kräften, und folglich von den Coordinaten, durch welche sich ihre gegenseitigen Entfernungen ausdrücken lassen, abhängig. Die Geschwindigkeiten selbst werden durch die unendlich kleinen

Veränderungen der Coordinaten ausgedrückt, und ohne hier näher in mechanische Erörterungen einzugehen, sieht man doch leicht ein, daß alle diese gegenseitigen Abhängigkeiten auf Gleichungen führen müssen, worin zugleich die Coordinaten der beweglichen Punkte und ihre in Beziehung auf die Zeit genommenen Differenzialcoefficienten vorkommen müssen. Es kommt nun darauf an, die Werthe der Coordinaten als Functionen der Zeit daraus abzuleiten und dann die Veränderliche t zu eliminiren, so daß man Gleichungen zwischen $x, y, z; x_1, y_1, z_1$; ꝛc. erhält; welches die Gleichungen der von den beweglichen Punkten im Raume beschriebenen Curven sind. Die schönste Untersuchung der Naturphilosophie, nämlich die Theorie der Bewegungen der Planeten, wird auf ein Problem der Integration gleichzeitiger Differenzialgleichungen zurückgeführt.

§. 503. Auf welche Weise man das System der Integralgleichungen, oder das System der Gleichungen mit t, x, y, z, ꝛc., welche den gegebenen Differenzialgleichungen genügen, auch erhalten mag, so muß dieses System, um denselben Grad von Allgemeinheit zu haben, als das gegebene System, doch eine bestimmte Anzahl willkürlicher Constanten enthalten, welche sich in jedem besondern Falle durch ähnliche Betrachtungen, wie die im §. 465, leicht bestimmen läßt.

Wir wollen zwei Differenzialgleichungen:

$$f(t; x, x', \ldots x^{(m)}; y, y', \ldots y^{(n)}) = 0 \qquad (f)$$

$$f_1(t; x, x', \ldots x^{(m_1)}; y, y', \ldots y^{(n_1)}) = 0 \qquad (f_1)$$

betrachten und zuerst den Fall untersuchen, wo $m > m_1$, $n < n_1$ ist. Wenn man für einen Werth von t, welchen wir mit t_0 bezeichnen wollen, die correspondirenden Werthe:

$$x_0, x'_0, \ldots x_0^{(m-1)}; y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n_1-1)}, \qquad (o)$$

willkürlich annimmt, so ergibt sich aus der Gleichung (f) der Werth von $x_0^{(m)}$, aus der Gleichung (f_1) der Werth von $y_0^{(n_1)}$, und aus ihren successiven Ableitungen ergeben sich die Werthe von:

$$x_0^{(m+1)}, x_0^{(m+2)}, \text{ ꝛc.}; y_0^{(n_1+1)}, y_0^{(n_1+2)}, \text{ ꝛc.}$$

Man kann also vermittelst der Taylor'schen Reihe die Werthe von x, y als Functionen von t bestimmen, welche $n + n_1$ willkürliche Constanten (o) enthalten. Unter welcher Form man also die beiden Integralgleichungen, durch welche die Werthe von x, y als Functionen von t bestimmt werden, auch erhalten hat, so muß dieses System von Integralen doch $m + n_1$ willkürliche Constanten von solcher Beschaffenheit enthalten, daß sich das System der Größen (o) aus den Werthen dieser Constanten ableiten läßt, und umgekehrt.

Die Schlüsse würden noch dieselben bleiben, wenn zugleich $m = m_1$, $n = n_1$ wäre, oder wenn blos eine dieser Gleichungen stattfände. Aber wenn zugleich $m > m_1$, $n > n_1$ wäre, so ließe sich die Rechnung nicht mehr auf dieselbe Weise anstellen, und um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß

$$m + n_1 > m_1 + n, \text{ oder } m - m_1 > n - n_1$$

ist, so ergibt sich durch $(n - n_1)$ malige Differenziation der Gleichung (f_1):

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(t; x, x', \ldots x^{(m_1)}, x^{(m_1+1)}; y, y', \ldots y^{(n_1)}, y^{(n_1+1)}) = 0 \\ f''_1(t; x, x', \ldots x^{(m_1+2)}; y, y', \ldots y^{(n_1+2)}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1^{(n-n_1)}(t; x, x', \ldots x^{(m_1+n-n_1)}; y, y', \ldots y^{(n)}) = 0 \end{array}\right\}. \qquad (f'_1)$$

Vermittelſt der $m+n_1$ anfänglichen Werthe (o) beſtimmt man durch die Gleichung (f), (f_1) und (f'_1) die Werthe von:

$$x_0^{(m)};\ y_0^{(n+1)},\ y_0^{(n+1)},\ \ldots\ y_0^{(n)},$$

worauf die ſucceſſiven Ableitungen der Gleichung (f) und der letzten der Gleichungen (f'_1) ſucceſſive die Werthe von:

$$x_0^{(m+1)},\ x_0^{(m+2)},\ \text{ꝛc.};\ y_0^{(n+1)},\ y_0^{(n+2)},\ \text{ꝛc.}$$

beſtimmen, und man kann die allgemeinen Werthe von x, y, wie vorhin, durch die Taylor'ſche Reihe conſtruiren. Es muß alſo das Syſtem der vollſtändigen Integrale der Gleichungen (f), (f_1) in allen Fällen $m+n_1$ willkürliche Conſtanten enthalten, wo $m+n_1$ die größte der Zahlen $m+n_1$, m_1+n iſt.

§. 504. Aus §. 165 wiſſen wir, daß man aus einem Syſteme von ſo vielen Differenzialgleichungen, als man Functionen x, y, z, ꝛc. der unabhängigen Veränderlichen t hat, immer eine Endgleichung ableiten kann, welche nur t, x und die Ableitungen von x in Beziehung auf t enthält. Das Problem der Integration eines Syſtemes gleichzeitiger Differenzialgleichungen kann alſo immer auf die Integration von gewöhnlichen Differenzialgleichungen zwiſchen zwei Veränderlichen zurückgeführt werden. Gewöhnlich genügt es, die Enddifferenzialgleichung zwiſchen t und x zu integriren, indem die übrigen Veränderlichen y, z, ꝛc. durch bloße algebraiſche Eliminationen als Functionen von t erhalten werden, und in dieſem Falle gibt die Anzahl der willkürlichen Conſtanten, welche in den vollſtändigen Integralen des gegebenen Syſtemes von Differenzialgleichungen vorkommen müſſen, die Ordnung der Endgleichung mit t und x an. Aber es kann auch geſchehen, daß bei der Eliminationsrechnung, welche auf die Endgleichung führt, $y', y'', \ldots$ nebſt y verſchwinden, ſo daß folglich die Ordnung dieſer Endgleichung erniedrigt wird. Nach der Integration dieſer Endgleichung hat man zur Beſtimmung des Werthes von y als Function von t eine Gleichung von der Form:

$$\varphi(y, y', y'', \ldots) = \psi t$$

zu integriren, und die durch dieſe neue Integration eingeführten willkürlichen Conſtanten machen die Anzahl der Conſtanten, welche in den allgemeinen Integralen des gegebenen Syſtemes von Differenzialgleichungen vorkommen müſſen, vollſtändig. Eine umſtändlichere Unterſuchung der verſchiedenen möglichen Fälle würde zu weitläufig und hier von keinem reellen Nutzen ſein.

§. 505. Unter gewiſſen Umſtänden kann man, ohne daß man die Endgleichung zu bilden braucht, gleichzeitige Differenzialgleichungen in Verbindung mit einander integriren. Wenn man z. B. zwiſchen drei Veränderlichen x, y, t zwei lineare Differenzialgleichungen der erſten Ordnung hat, ſo kann man ſie immer auf folgende Form bringen:

$$x' + Px + Qy = V,\quad y' + P_1 x + Q_1 y = V_1,$$

wo P, Q, V, P_1, Q_1, V_1 Functionen der unabhängigen Veränderlichen t bezeichnen. Multiplicirt man die zweite Gleichung durch einen Factor λ, welcher eine Function derſelben Veränderlichen t iſt, und addirt das Product zu der erſten Gleichung, ſo erhält man:

$$x' + \lambda y' + (P + \lambda P_1)x + (Q + \lambda Q_1)y = V + \lambda V_1.$$

Setzt man $u = x + \lambda y$, wo u eine andere Hülfsveränderliche bezeichnet, ſo hat man $x' + \lambda y' = u' - y\lambda'$, und wenn man ſubſtituirt:

$$u' + (P + \lambda P_1)u - y[\lambda' + \lambda(P + \lambda P_1) - (Q + \lambda Q_1)] = V + \lambda V_1.$$

Wenn man die Function λ so bestimmt, daß der Gleichung:

$$\lambda' + \lambda(P + \lambda P_1) - (Q + \lambda Q_1) = 0, \qquad (a)$$

welche nur λ und t enthält, Genüge geschieht, so braucht man diesen Werth von λ nur noch in die Gleichung

$$u' + (P + \lambda P_1)u = V + \lambda V_1 \qquad (b)$$

zu substituiren, welche alsdann nur noch die Veränderlichen u und t enthält, und in Beziehung auf u linear ist.

Wenn die Coefficienten P, Q, P_1, Q_1, constant sind, so wird der Gleichung (a) genügt, wenn man für λ eine der Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung des zweiten Grades:

$$\lambda(P + \lambda P_1) - (Q + \lambda Q_1) = 0 \qquad (\alpha)$$

nimmt. Wenn man diese beiden Wurzeln successive für λ in die Gleichung (b) substituirt, mit u_1, u_2 die correspondirenden Werthe von u, und durch C_1, C_2 willkürliche Constanten bezeichnet; so ergibt sich durch Integration (§. 440):

$$u_1 = x + \lambda_1 y = e^{-(P+\lambda_1 P_1)t}\left[C_1 + \int dt\,(V + \lambda_1 V_1)e^{(P+\lambda_1 P_1)t}\right], \quad (b_1)$$

$$u_2 = x + \lambda_2 y = e^{-(P+\lambda_2 P_1)t}\left[C_2 + \int dt\,(V + \lambda_2 V_1)e^{(P+\lambda_2 P_1)t}\right], \quad (b_2)$$

woraus folgt:

$$x = \frac{\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad y = \frac{u_2 - u_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Wenn die Wurzeln der Gleichung (α) imaginär sind, so drückt man die Exponentialgrößen, wie gewöhnlich, durch Sinus und Cosinus aus. Wenn die Wurzeln λ_1, λ_2 einander gleich sind, so werden die Werthe von x, y unendlich, wofern man nicht $C_1 = C_2$ setzt, wodurch diese Werthe die Form $\frac{0}{0}$ bekämen; allein die Unbestimmtheit wird, wie wir es bereits in einem ähnlichen Falle gethan haben (§. 463), beseitigt, wenn man von den Zählern und Nennern die Ableitungen in Beziehung auf den Parameter λ_2 nimmt, und dann in diesen Ableitungen $\lambda_1 = \lambda_2$ setzt.

§. 506. Wir wollen nun annehmen, daß man zwischen x, y, z und der unabhängigen Veränderlichen t drei lineare Differenzialgleichungen der ersten Ordnung habe, so kann man sie immer auf folgende Form zurückführen:

$$\begin{aligned} x' + Px + Qy + Rz &= V \\ y' + P_1 x + Q_1 y + R_1 z &= V_1 \\ z' + P_2 x + Q_2 y + R_2 z &= V_2 \end{aligned}$$

wo P, Q, R, V; P_1, &c. Functionen von t bezeichnen. Wenn man diese Gleichungen zusammenaddirt, nachdem man die zweite durch einen Factor λ und die dritte durch einen Factor μ multiplicirt hat, so erhält man:

$$\begin{aligned} x' + \lambda y' + \mu z' + (P + \lambda P_1 + \mu P_2)x + (Q + \lambda Q_1 + \mu Q_2)y \\ + (R + \lambda R_1 + \mu R_2)z = V + \lambda V_1 + \mu V_2. \end{aligned}$$

Setzt man hierauf:

$$x + \lambda y + \mu z = u, \text{ folglich } x' + \lambda y' + \mu z' = u' - y\lambda' - z\mu',$$

so ergibt sich durch Substitution:

sind nach der Voraussetzung in Beziehung auf die Größenfolge der Linien a, b, c kleiner, als die Einheit. Ferner ist vermöge der Gleichung (7) und der Zeichen von A, B, α die Constante β immer positiv. Man kann also $\frac{\beta}{\alpha} = -\xi^2$, $\beta = \eta^2$ setzen, so daß die doppelte Reihe der Krümmungslinien mit der Reihe von Ellipsen zusammenfällt, welche man erhält, wenn man in der Gleichung:

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\eta^2} = 1 \qquad (f_1)$$

die Parameter ξ, η, welche selbst die Coordinaten einer Hülfsellipse:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2(a^2 - b^2)}\xi^2 + \frac{c^2 - b^2}{b^2(a^2 - b^2)}\eta^2 = 1 \qquad (10)$$

sind, variiren läßt.

Der Parameter ξ^2 variirt zwischen den Grenzen:

$$0, \quad \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2},$$

während η^2 zwischen den Grenzen:

$$\frac{b^2(a^2 - b^2)}{c^2 - b^2}, \quad 0$$

variirt. Wenn man $\xi^2 = 0$ setzt, so fällt die Ellipse (f_1) mit der Axe der y zusammen, und ist in dem Sinne der y länglich, so lange $\xi^2 < \frac{a^2 b^2}{c^2}$ ist. Sie wird ein Kreis, wenn ξ^2 diesen Werth erreicht, wird dann für größere Werthe von ξ^2 in dem Sinne der x länglich, fällt mit dem Durchschnitte des Ellipsoides mit der Ebene xy zusammen, wenn $\xi^2 = a^2$ ist, wird immer länglicher und fällt zuletzt mit der Axe der x zusammen, wenn ξ^2 seine obere Grenze erreicht, oder wenn η^2 verschwindet (Fig. 98).

Es bleibt nun noch die durch die Gleichung:

$$Ay'^2 + 1 = 0$$

gegebene singuläre Auflösung, welche wegen des negativen Zeichens von A reell ist, zu betrachten übrig. Wird der daraus abgeleitete Werth von y' in die Gleichung (e) substituirt, so erhält man:

$$b^2(a^2 - c^2)x^2 \pm 2ab\sqrt{(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)} \cdot xy + a^2(c^2 - b^2)y^2 = a^2b^2(a^2 - b^2),$$

und diese letzte Gleichung zerfällt in die beiden folgenden:

$$b\sqrt{a^2 - c^2} \cdot x \pm a\sqrt{c^2 - b^2} \cdot y = ab\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$b\sqrt{a^2 - c^2} \cdot x \pm a\sqrt{c^2 - b^2} \cdot y = -ab\sqrt{a^2 - b^2},$$

welche vier durch die Scheitel der Hülfsellipse (10) gehende gerade Linien ausdrücken. Nach der Theorie der singulären Integrale müssen diese vier geraden Linien alle durch die Gleichung (f_1) gegebene Ellipsen berühren, wie man sich überzeugen kann, wenn man die Gleichung (10) berücksichtigt, welche nur einen der Parameter ξ, η willkürlich läßt.

Da der Durchschnitt des Ellipsoides mit der Ebene der xy eine der Krümmungslinien ist, so berührt er die eben bestimmten vier geraden Linien

Differenzialgleichungen mit constanten Coefficienten und mit zwei Veränderlichen mehr analog ist.

Es sei zuvörderst:

$$\left.\begin{aligned} x' + Px + Qy + Rz + \ldots\ldots + Uu &= 0 \\ y' + P_1 x + Q_1 y + R_1 z + \ldots\ldots + U_2 u &= 0 \\ z' + P_2 x + Q_2 y + R_2 z + \ldots\ldots + U_2 u &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u' + P_{n-1} x + Q_{n-1} y + R_{n-1} z + \ldots + U_{n-1} u &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon)$$

ein System von n Differenzialgleichungen **ohne letzte Glieder**, und mit numerischen Coefficienten zwischen den n Veränderlichen $x, y, z, \ldots u$ als Function von t und ihren Ableitungen der ersten Ordnung; so sieht man leicht ein, daß es möglich ist, denselben durch ein System von particulären Werthen:

$$x = Ce^{-mt},\ y = \lambda Ce^{-mt},\ z = \mu Ce^{-mt},\ \ldots\ldots u = \nu Ce^{-mt},$$

wo C eine willkürliche Constante, und $\lambda, \mu, \ldots \nu$ Zahlen bezeichnen, welche durch das System der n algebraischen Gleichungen:

$$\begin{aligned} P + \lambda Q + \mu R + \ldots\ldots + \nu U &= m \\ P_1 + \lambda Q_1 + \mu R_1 + \ldots\ldots + \nu U_1 &= \lambda m \\ P_2 + \lambda Q_2 + \mu R_2 + \ldots\ldots + \nu U_2 &= \mu m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ P_{n-1} + \lambda Q_{n-1} + \mu R_{n-1} + \ldots\ldots + \nu U_{n-1} &= \nu m \end{aligned}$$

gegeben werden, Genüge zu leisten. In die erste dieser Gleichungen kann man die durch die übrigen $n-1$ Gleichungen gegebenen Werthe $\lambda, \mu, \ldots \nu$, als Functionen von m substituiren, und nach der **Bezout**'schen Regel werden diese Werthe durch Brüche ausgedrückt, in deren Zähler m auf der $(n-2)^{ten}$, und in deren Nenner m auf der $(n-1)^{ten}$ Potenz vorkommt, und folglich ist die Endgleichung mit m von n^{te} Grade. Da ihre Wurzeln durch $m_1, m_2, \ldots m_n$ bezeichnet sind, und die correspondirenden Werthe von $\lambda, \mu, \ldots \nu$, dieselben Indices tragen, so erhält man für die vollständigen Integrale des Systemes der Differenzialgleichungen (ε) folgende:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 e^{-m_1 t} + C_2 e^{-m_2 t} + \ldots + C_n e^{-m_n t}, \\ y &= \lambda_1 C_1 e^{-m_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{-m_2 t} + \ldots + \lambda_n C_n e^{-m_n t}, \\ z &= \mu_1 C_1 e^{-m_1 t} + \mu_2 C_2 e^{-m_2 t} + \ldots + \mu_n C_n e^{-m_n t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u &= \nu_1 C_1 e^{-m_1 t} + \nu_2 C_2 e^{-m_2 t} + \ldots + \nu_n C_n e^{-m_n t}. \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon_1)$$

Wir wollen nun annehmen, daß in den zweiten Theilen der Gleichungen (ε) Functionen $V, V_1, V_2, \ldots V_{n-1}$ von t vorkommen, so sind die Gleichungen (ε_1) noch die allgemeinen Integrale des Systemes (ε), wofern die Coefficienten $C_1, C_2, \ldots C_n$ nicht mehr constante Zahlen, sondern Functionen von t bezeichnen, welche den Gleichungen:

$$\begin{aligned} C'_1 e^{-m_1 t} + C'_2 e^{-m_2 t} + \ldots\ldots + C'_n e^{-m_n t} &= V \\ \lambda_1 C'_1 e^{-m_1 t} + \lambda_2 C'_2 e^{-m_2 t} + \ldots\ldots + \lambda_n C'_n e^{-m_n t} &= V_1 \\ \mu_1 C'_1 e^{-m_1 t} + \mu_2 C'_2 e^{-m_2 t} + \ldots\ldots + \mu_n C'_n e^{-m_n t} &= V_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \nu_1 C'_1 e^{-m_1 t} + \nu_2 C'_2 e^{-m_2 t} + \ldots\ldots + \nu_n C'_n e^{-m_n t} &= V_{n-1} \end{aligned}$$

Genüge leisten. Aus diesen Gleichungen leitet man durch eine gewöhnliche

Elimination die Werthe der Ableitungen $C'_1, C'_2, \ldots C'_n$ ab, und durch Quadraturen die Werthe der Functionen $C_1, C_2, \ldots C_n$, welche man alsdann in die Gleichungen (g_1) ſubſtituiren muß.

§. 508. Schon früher haben wir geſehen, daß man eine Veränderliche aus einem Syſteme gleichzeitiger Differenzialgleichungen eliminiren kann, wenn man für dieſe Gleichungen eine geringere Anzahl von Differenzialgleichungen, aber von einer höhern Ordnung ſubſtituirt (§. 165). Umgekehrt, kann man die Ordnung einer oder mehrerer gegebener Differenzialgleichungen erniedrigen, wenn man ſich eine größere Anzahl gleichzeitiger Differenzialgleichungen zur Integration vorlegt. So kann z. B. die Integration der beiden linearen Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung:

$$x'' + Px' + Qy' + Rx + Sy = V$$
$$y'' + P_1x' + Q_1y' + R_1x + S_1y = V_1$$

zurückgeführt werden auf die gleichzeitige Integration der vier linearen Differenzialgleichungen der erſten Ordnung zwiſchen den Veränderlichen x, y, ξ, η, t:

$$x' - \xi = 0$$
$$y' - \eta = 0$$
$$\xi' + P\xi + Q\eta + Rx + Sy = V$$
$$\eta' + P_1\xi + Q_1\eta + R_1x + S_1y = V_1.$$

Die vorhergehenden Rechnungen laſſen ſich auf die gleichzeitige Integration der linearen Differenzialgleichungen von beliebigen Ordnungen anwenden.

§. 509. Wir wollen durch:

$$\left.\begin{array}{l} f(t; x, y, z, \ldots; x', y', z', \ldots) = 0 \\ f_1(t; x, y, z, \ldots; x', y', z', \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}(t; x, y, z, \ldots; x', y', z', \ldots) = 0 \end{array}\right\} \quad (f)$$

ein Syſtem von n gleichzeitigen Differenzialgleichungen der erſten Ordnung, und durch:

$$\left.\begin{array}{l} F(t; x, y, z, \ldots; a, a_1, \ldots a_{n-1}) = 0 \\ F_1(t; x, y, z, \ldots; a, a_1, \ldots a_{n-1}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-1}(t; x, y, z, \ldots; a, a_1, \ldots a_{n-1}) = 0 \end{array}\right\} \quad (F)$$

das Syſtem ihrer vollſtändigen Integrale bezeichnen, worin die durch die Integration eingeführten Conſtanten $a, a_1, \ldots a_{n-1}$ auf eine beliebige Weiſe mit einander verbunden ſind. Allgemein, durch eine ſchicklich geleitete Elimination kann man dieſes Syſtem von Gleichungen in ein anderes:

$$\left.\begin{array}{l} f(t; x, y, z, \ldots; a) = 0 \\ f_1(t; x, y, z, \ldots; a_1) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}(t; x, y, z, \ldots; a_{n-1}) = 0 \end{array}\right\} \quad (f)$$

dem vorhergehenden gleichbedeutendes transformiren, welches, wie jenes, die Eigenſchaft hat, dem Syſteme (f) mit aller erforderlichen Allgemeinheit Genüge zu leiſten. Wenn man nun $a, a_1, \ldots a_{n-1}$ als Functionen von $t; x, y, z, \ldots$ durch die Gleichungen:

$$\frac{df}{da} = 0, \quad \frac{df_1}{da_1} = 0, \quad \ldots\ldots \frac{df_{n-1}}{da_{n-1}} = 0 \qquad (f')$$

bestimmt, und die auf diese Weise gefundenen Werthe in die Gleichungen (f) substituirt; so bildet man die andern Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t; x, y, z, \ldots\ldots) &= 0, \\ \varphi_1(t; x, y, z, \ldots\ldots) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \varphi_{n-1}(t; x, y, z, \ldots\ldots) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\varphi)$$

welche zusammengenommen dem Systeme (f) genügen; aber nach Art der singulären Integrale, wofern sich die aus den Gleichungen (f') abgeleiteten Werthe von $a, a_1, \ldots a_{n-1}$ nicht zufällig auf Constanten oder auf Functionen von $t, x, y, z, \ldots$, welche vermöge der Gleichungen (φ) selbst constante Werthe annehmen, reduciren.

Statt zugleich das ganze System (f) oder das ganze System (φ) zu nehmen, könnte man auch statt gewisser der Gleichungen (f) die ihnen in dem Systeme (φ) entsprechenden Gleichungen, d. h. (φ_i) statt (f_i), u. s. f. nehmen, so daß auf diese Weise gemischte Systeme gebildet würden, welche ebenfalls auf ihre Weise dem Systeme der gegebenen Differenzialgleichungen genügten.

Diese Analyse ließe sich leicht, wenn es nöthig wäre, auf die gleichzeitigen Differenzialgleichungen erstrecken.

§. 510. Um ein Beispiel der gleichzeitigen Integration für den Fall zu geben, wo die gegebenen Differenzialgleichungen keine linearen sind, und um zugleich zu zeigen, welche Anwendung man von der Theorie der singulären Integrale auf die Differenzialgleichungen machen kann, worin alle Veränderlichen vorkommen, wollen wir die beiden folgenden Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit drei veränderlichen Größen nehmen:

$$(xy' + yx')^2 - 8tx'y' = 0 \qquad (1)$$

$$xy - t(xy' - x'y) = 0. \qquad (2)$$

Differenzirt man dieselben, so erhält man:

$$(x'y + y'x)(x''y + 2x'y' + xy'') = 4(x'y' + tx''y' + tx'y''),$$

$$2x'y - t(xy'' - x''y) = 0.$$

Wenn man aus der zweiten dieser abgeleiteten Gleichungen den Werth von $x'y$ zieht, und denselben in den zweiten Theil der ersten substituirt, so wird diese auf folgende Form gebracht:

$$(x''y + 2x'y' + xy'')(x'y + y'x - 2t) = 0, \qquad (3)$$

welche in die beiden folgenden Gleichungen:

$$x''y + 2x'y' + xy'' = 0 \qquad (4)$$

$$x'y + y'x - 2t = 0 \qquad (5)$$

zerfällt.

Die Gleichung (4) ist gleichbedeutend mit:

$$\frac{d^2(xy)}{dt^2} = 0, \text{ woraus folgt: } xy = at + b, \qquad (6)$$

indem a, b zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

Diese beiden Constanten sind nicht von einander unabhängig; denn die beiden Gleichungen (1), (2) müssen übereinstimmen, wenn man y, y' vermit-

telſt der Gleichung (6) fortſchafft, und es ergibt ſich, daß man, um dieſe beiden Gleichungen identiſch zu machen $b = -\frac{a^2}{4}$ ſetzen muß, wodurch ſich das Integral (6) in:

$$xy = at - \frac{a^2}{4} \qquad (7)$$

verwandelt. Jede der Gleichungen (1) und (2) gibt alsdann:

$$\frac{adt}{8t^2 - 2at} = \frac{dx}{x},$$

woraus folgt, wenn man integrirt und durch c eine willkürliche Conſtante bezeichnet:

$$x^2 t = c(4t - a). \qquad (8)$$

Das Syſtem der Gleichungen (7) und (8) gibt alſo die vollſtändigen Integrale der beiden gegebenen Differenzialgleichungen (1) und (2).

Für die Gleichung (8) kann man eine andere einfachere ſubſtituiren, denn es folgt daraus:

$$xt = 4c \cdot \frac{tj}{x} - ac \cdot \frac{1}{x},$$

während die Gleichung (7)

$$y = a \cdot \frac{t}{x} - \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{x}$$

gibt. Wenn man alſo durch a_1 eine neue willkürliche Conſtante von ſolcher Beſchaffenheit bezeichnet, daß $aa_1 = 4c$ iſt, ſo kann die Gleichung (8) durch:

$$xt = a_1 y \qquad (9)$$

erſetzt werden. Wenn man nun den zweiten Factor der Gleichung (3) anwendet, und x', y' zwiſchen der Gleichung (5) und den beiden gegebenen Gleichungen eliminirt, ſo erhält man:

$$xy = t^2, \qquad (10)$$

ein ſinguläres Integral, weil es keine willkürliche Conſtante enthält und durch eine gehörige Beſtimmung der Conſtante a nicht auf das Integral (7) zurückgeführt werden kann. Uebrigens gibt die Ableitung des Integrales (7) in Beziehung auf a, $a = 2t$, und wenn man dieſen Werth in die Gleichung (7) ſetzt; ſo kommt man wieder auf das ſinguläre Integral (10), übereinſtimmend mit der im vorhergehenden § auseinander geſetzten Theorie.

Vermöge der aus der Gleichung (10) abgeleiteten Werthe von y, y' verwandelt ſich jede der gegebenen Differenzialgleichungen in $x - 2x't = 0$, woraus folgt, wenn man integrirt, und durch α eine willkürliche Conſtante bezeichnet:

$$x^2 = \alpha t. \qquad (11)$$

Uebrigens iſt leicht einzuſehen, daß das Syſtem der Gleichungen (10) und (11) mit dem der Gleichungen (9) und (10) identiſch wird, wenn man $\alpha = a_1$ ſetzt.

§. 511. Wenn man die linearen Differenzialgleichungen, worin die Functionen der unabhängigen Veränderlichen und ihre Ableitungen durch conſtante Zahlen multiplicirt ſind, ausnimmt, ſo laſſen ſich die gleichzeitigen Differenzialgleichungen ſelten anders, als durch Annäherung integriren. In gewiſſen

Fällen, und namentlich bei den Aufgaben über die Bewegungen der Himmelskörper, hat man der Aproximationsrechnung eine so merkwürdige Form gegeben, daß wir dieselbe hier kurz andeuten müssen.

Um die Begriffe zu fixiren, seien:

$$f(t; x, x', x'', \ldots; y, y', y'', \ldots) = 0$$

$$f_1(t; x, x', x'', \ldots; y, y', y'', \ldots) = 0,$$

zwei Gleichungen zwischen der Zeit t und den Coordinaten x, y, eines in einer Ebene beweglichen Punktes. Ferner wollen wir annehmen, daß

$$\mathfrak{f} = f + \varepsilon\varphi, \quad \mathfrak{f}_1 = f_1 + \varepsilon\varphi_1 \qquad (h)$$

ist, wo $f, \varphi, f_1, \varphi_1$ andere Functionen derselben Veränderlichen und ihrer Ableitungen und ε eine sehr kleine Zahl bezeichnen, so daß sich die Gleichungen der Aufgabe, wenn man diesen Factor $\varepsilon = 0$ setzte, auf:

$$f = 0, \quad f_1 = 0 \qquad (h_0)$$

reducirten. Endlich wollen wir annehmen, daß sich das System dieser beiden Gleichungen integriren lasse, und daß

$$F(t; x, y; a, b, c, \ldots) = 0, \quad F_1(t; x, y; a, b, c, \ldots) = 0 \qquad (i)$$

die allgemeinen Integrale sind, wo a, b, c, ꝛc. die durch die Integration eingeführten willkürlichen Constanten bezeichnen. Wenn man t zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt, so erhält man:

$$F_{0,1}(x, y; a, b, c, \ldots) = 0 \qquad (j)$$

für die Gleichung der Curve, welche der bewegliche Punkt in dem Falle, wo man den Factor $\varepsilon = 0$ setzen kann, in der Ebene xy beschreiben würde.

Nun darf man aber durch die Gleichungen (i) noch die allgemeinen Integrale der Gleichungen (h), worin der Factor ε nicht mehr gleich Null angenommen wird, wofern man in den Functionen F, F_1 die Parameter a, b, c, ꝛc. nicht mehr als Constanten, sondern als Functionen der unabhängigen Veränderlichen t betrachtet, welche man so bestimmen muß, daß den Gleichungen (h) Genüge geschieht, ausdrücken. Diese letzten Gleichungen unterscheiden sich nach der Voraussetzung von den Gleichungen (h_0) nur durch Glieder, welche sehr klein bleiben, und folglich kann man die Ableitungen:

$$\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}, \text{ ꝛc.}, \qquad (k)$$

welche in aller Strenge mit ε verschwinden, als sehr kleine Größen behandeln. Gewöhnlich kann man diese Bemerkung zur Vereinfachung der zu betrachtenden Gleichungen benutzen, welche alsdann für das System der gegebenen Gleichungen substituirt werden.

Wenn man sagt, die Ableitungen (k) seien sehr kleine Größen, so heißt dieses nichts anderes, als die Parameter, a, b, c, ꝛc. ändern sich sehr langsam, oder behalten während eines langen Zeitraumes fast constante Werthe. Wenn man also die Bewegung des Punktes (x,y) zu einer gewissen Zeit beobachtete, so fände man, daß er fast die durch die Gleichung (j), worin man den Größen $a, b, c, \ldots$ gewisse constante Werthe beilegen müßte, ausgedrückte Curve beschreibt, und wenn man nach Verlauf eines beträchtlichen Zeitraumes dieselben Beobachtungen wiederholte, so würde man finden, daß der bewegliche Punkt noch eine Curve derselben Art beschreibt, für welche die Parameter $a, b, c, \ldots$ andere Werthe haben, als nach den ersten Beobachtungen, u. s. f.

Man muß also in der von Lagrange herrührende Integrationsmethode durch die Variation der willkürlichen Constanten nicht blos einen

geiſtreichen analytiſchen Kunſtgriff erblicken, wovon wir eine elegante Anwendung auf die genaue Integration der linearen Differenzialgleichungen, worin die Functionen und ihre Ableitungen nur durch conſtante Zahlen multiplicirt ſind, im Vorhergehenden kennen gelernt haben; denn ſie würde auch durch die Beobachtung der Naturerſcheinungen, zu deren Darſtellung unter den eben angegebenen Umſtänden ſie ſich ſo natürlich eignet, haben an die Hand gegeben werden können.

Siebentes Kapitel.

Ueber die Conſtruction der Differenzialgleichungen mit einer einzigen unabhängigen veränderlichen Größe.

§. 512. Wir haben die Hauptfälle unterſucht, in welchen man die Function anzugeben weiß, welche einer gegebenen Differenzialgleichung auf die allgemeinſte Weiſe genügt, oder wo man die allgemeine Gleichung der Curven finden kann, welche in allen ihren Punkten die durch die Differenzialgleichung ausgedrückte Eigenſchaft beſitzen. Auch haben wir angegeben, wie man, wenn die Integration nicht unter endlicher Form möglich iſt, ſie oft entweder auf die Quadraturen, oder auf die Entwickelung in convergirende Reihen zurückführen oder zuweilen auch dieſe Reihen durch beſtimmte, zwiſchen ſpeciellen Grenzen genommene Integrale, deren Zahlenwerthe für jeden Werth der unabhängigen Veränderlichen mit einer beliebigen Annäherung beſtimmt werden können, erſetzen kann. Aber eine Differenzialgleichung, auf welches keins dieſer Integrationsverfahren anwendbar iſt, beſtimmt nichts deſto weniger die Reihe der Zahlenwerthe, welche die Function durchlaufen muß, nachdem man für einen gewiſſen Werth der unabhängigen Veränderlichen die correſpondirenden Werthe der Function und ihrer Ableitungen bis zu der, deren Ordnung um eine Einheit niedriger iſt, als die der gegebenen Differenzialgleichung, angegeben hat. Es kann ſogar geſchehen, daß man durch die directe Unterſuchung der Differenzialgleichung den Verlauf und alle charakteriſtiſchen Eigenſchaften der Function, welche ſie implicite beſtimmt, beſſer kennen lernt, als aus der Betrachtung des allgemeinen Integrales unter endlicher Form, oder in Reihenentwickelungen, oder endlich durch beſtimmte oder unbeſtimmte Integrale ausgedrückt. Dieſes hat Sturm in einer ſchönen Abhandlung über die Unterſuchung der durch die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0, \qquad (V)$$

worin G, K Functionen der unabhängigen Veränderlichen x bezeichnen, implicite beſtimmten Functionen V gezeigt. *)

Dieſe Differenzialgleichung enthält die Riccatiſche oder die, mit deren Integration durch Reihen, oder durch beſtimmte Integrale wir uns im dritten

*) Vergl. das Journal de mathématiques de M. Liouville, tom I, pag. 106.

Kapitel des gegenwärtigen Buches beſchäftigt haben, als ſpeciellen Fall in ſich. Wenn die Functionen G, K ſich auf reelle und poſitive Conſtanten reduciren, ſo drückt die Function V einen Sinus oder Coſinus aus. In dem allgemeinen Falle bietet der Verlauf der Function V mit dem der Functionen sin. und cos. ſehr merkwürdige Analogien dar, welche ſich aus der directen Unterſuchung der Gleichung (V) ergeben, und welche man in der angeführten Abhandlung ſelbſt nachſehen muß. In dieſem Kapitel können wir uns nur mit weit elementareren Betrachtungen beſchäftigen, welche zur Vervollſtändigung der Theorie der Integration der Differenzialgleichungen unumgänglich nothwendig ſind (§. 437).

§. 513. Es ſei:

$$F(x, y, y'_1) = 0 \qquad (F)$$

eine Differenzialgleichung der erſten Ordnung mit zwei Veränderlichen, welche ſich in:

$$y' = f(x, y) \qquad (f)$$

verwandelt, wenn man ſie in Beziehung auf y' auflöſ't. Für jedes Werthsſyſtem von x und von y beſtimmt dieſe Gleichung das Verhältniß der unendlich kleinen Veränderung von y zu der unendlich kleinen Veränderung von x. Sie beſtimmt alſo implicite die endliche Differenz der Werthe von y, welche zwei Werthen von x entſprechen, die durch ein endliches Intervall von einander getrennt ſind, wenn dy innerhalb dieſes Intervalles eine unendlich kleine Größe bleibt, oder wenn die Function y keine Stetigkeitsunterbrechung der erſten Ordnung erfährt, was der Fall iſt, wenn y' endlich bleibt, und ſogar in gewiſſen Fällen, wenn die Function y' durchs Unendliche geht.

Durch x_0, X wollen wir zwei durch ein endliches Intervall von einander getrennte Werthe von x bezeichnen und $n\Delta x = X - x_0$ ſetzen, wo n eine ſo große Zahl bezeichnet, daß die Größe Δx als eine ſehr kleine Größe der erſten Ordnung betrachtet werden kann. Wir wollen:

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_0 + 2\Delta x, \quad x_3 = x_0 + 3\Delta x, \quad \text{ꝛc.}$$

ſetzen, und durch y_0, y_1, y_2, ꝛc.; y'_0, y'_1, y'_2, ꝛc. die Werthe von y, y' bezeichnen, welche reſp. den durch x_0, x_1, x_2, ꝛc. bezeichneten Werthen von x entſprechen. Wenn man den Werth y_0 willkürlich annimmt, ſo kann man die Reihe der zwiſchen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$ liegenden Werthe von y vermittelſt der Gleichung (f) näherungsweiſe berechnen; denn dieſe Gleichung gibt:

$$y'_0 = f(x_0, y_0),$$

und wenn man eine ſehr kleine Größe der zweiten Ordnung vernachläſſigt, ſo hat man:

$$y_1 = y_0 + y'_0\Delta x = y_0 + f(x_0, y_0)\cdot\Delta x.$$

Durch die Subſtitution dieſes Werthes von y_1 in die Gleichung:

$$y'_1 = f(x_1, y_1)$$

erhält man den Werth von y'_0 mit einem Fehler, welcher im Allgemeinen ebenfalls nur eine Größe von der zweiten Ordnung ſein kann; denn die Veränderung der Function f iſt im Allgemeinen eine Größe von derſelben Ordnung, als die Veränderungen der Größen x, y, wovon ſie abhängt. Man hat alſo bis auf Größen der zweiten Ordnung genau:

$$y_2 = y_1 + y'_1\Delta x = y_0 + f(x_0, y_0)\cdot\Delta x + f(x_1, y_1)\cdot\Delta x,$$

u. ſ. f. Da n nach der Vorausſetzung eine ſehr große Zahl, oder $\frac{1}{n}$ eine Größe

von derſelben Ordnung als Δx iſt, ſo kann der X entſprechende Werth von Y wegen der n maligen Wiederholung des bei jedem Werthe von y begangenen Fehlers mit einem Fehler behaftet ſein, welcher einer ſehr kleinen Größe der erſten Ordnung, oder von derſelben Ordnung wie Δx gleich iſt, und welcher vernachläſſigt werden kann, wenn man für Δx eine hinreichend kleine Größe genommen hat.

Dieſe Schlüſſe werden jedoch unzuläſſig, wenn die Ableitungen:

$$\frac{df(x,y)}{dx}, \quad \frac{df(x,y)}{dy}$$

für Werthe von x und von y, welche reſp. zwiſchen den Grenzen x_0, X und y_0, Y liegen, unendlich werden; denn alsdann kann eine den Veränderlichen x oder y ertheilte ſehr kleine Veränderung der zweiten Ordnung eine Veränderung der erſten Ordnung der Function f zur Folge haben; aber ſelbſt in dieſem Falle, wenn die Function f nur nicht unendlich wird, ſieht man leicht ein, daß die Function y vermöge der Gleichung (f), welche ihre unendlich kleinen Veränderungen beſtimmt, durch eine Reihe beſtimmter Werthe geht, obgleich die Annäherungsmethode nicht mehr eine Reihe, durch endliche Intervalle von einander getrennter Werthe mit einer hinreichenden Genauigkeit zu geben vermag. *)

Man bemerkt leicht, daß die eben angedeutete arithmetiſche Rechnung mit der Conſtruction einer Curve, deren Ordinate y iſt, indem man für dieſe Curve ein Polygon ſubſtituirt, welches ſich derſelben deſto mehr nähert, je kleiner die Linie Δx genommen iſt, und indem man außerdem einen Punkt annimmt, durch welchen die Curve gehen muß, und welcher eine Winkelſpitze des zu conſtruirenden Polygones iſt, auf eins hinausläuft.

§. 514. Wenn der durch die Gleichung (f) gegebene Werth von y' durch das Unendliche geht, ſo kann man dieſe Gleichung umkehren und

$$x' = \frac{1}{f(x,y)}$$

ſetzen, indem man y zur unabhängigen Veränderlichen nimmt. Wenn die Function y mit y' zu gleicher Zeit unendlich werden muß, ſo kann die auf dieſe letzte Form gebrachte Differenzialgleichung dazu dienen, den Curvenzweig $m_0 n$ (Fig. 102), worauf der Anfangspunkt m_0 genommen iſt, und welcher beiderſeits der zu der Axe der x, y parallelen Aſymptote PN liegt, ſo weit, als man nur will, zu verlängern. Auf der andern Seite von PN kann man die Conſtruction der Curve nur dann fortſetzen, wenn man einen andern Anfangspunkt m'_0 annimmt, durch welchen der Curvenzweig $m'_0 n'$ gehen muß. Man kann für m'_0 wie für m_0 einen beliebigen Punkt annehmen, nur dürfen ſeine Coordinaten die durch die Gleichung (f) gegebenen Werthe von y nicht imaginär machen.

Wenn man das Integral der Gleichung (f) analytiſch ausdrücken kann, ſo wird der Curvenzweig $m'_0 n'$, welcher mit dem Curvenzweige $m_0 n$ verbunden werden muß, gewöhnlich durch die Bedingung beſtimmt, daß die will-

*) Es wird kaum ein Fall vorkommen, wo man Gelegenheit hat, die in dieſem § angedeutete Näherungsrechnung wirklich auszuführen, ſo daß man einen ſtrengen Ausdruck für die Grenzen des begangenen Fehlers wünſchen könnte. Cauchy hat dieſen Ausdruck entwickelt, worüber man die Werke dieſes ausgezeichneten Analyſten ſowie eine Abhandlung von Binet in dem Journal der Math. von Liouville Bd. II. Seite 229 vergleichen muß.

kürliche Conſtante bei dem Uebergange von dem einen Curvenzweige zu dem andern ihren Werth nicht ändert; allein dieſe beſtimmende Bedingung fällt weg, wenn ſich das Integral der Differenzialgleichung nicht durch die bekannten analytiſchen Hülfsmittel ausdrücken läßt.

Die Differenz zweier Werthe von y, zwiſchen welchen die Function y durch das Unendliche geht, kann nicht mehr die Summe der unendlich kleinen Incremente, welche die Function in dieſem Intervalle erhalten hat, ausdrücken und der Name Integral iſt auf die Gleichung mit x, y, welche der gegebenen Differenzialgleichung genügt, wenn man dieſe Werthe mit einander vergleichen will, nur uneigentlich anwendbar. Es ſeien aber dennoch x_0, X die Werthe von x, zwiſchen welchen der Werth von x liegt, welcher y unendlich macht, und y_0, Y ſeien die correſpondirenden Werthe von y. Wenn man die Veränderliche x durch eine Reihe imaginärer Werthe, welche für y keine unendlichen Werthe geben, von dem Werthe x_0 zu dem Werthe X übergehen läßt; ſo drückt die Differenz $Y - y_0$ wieder die Summe der reellen oder imaginären unendlich kleinen Incremente aus, welche die Function y bei dem Uebergange von einem Werthe zum andern annimmt (§. 321). Die Summe der imaginären Theile dieſer Incremente muß Null ſein, weil nach der Vorausſetzung die Werthe y_0, Y, und folglich ihr Unterſchied $Y - y_0$ reelle Größen ſind.

§. 515. In dem Falle, wo die Differenzialgleichung die Form:

$$y' = \varphi y \cdot \psi(x, y) \qquad (1)$$

hätte, müßte man ſie einer beſondern Unterſuchung unterwerfen. Denn es ſei y_n ein Werth von y, welcher φy verſchwinden macht. Wenn der Werth der Function y von dem anfänglichen Werthe y_0 bis zu dem Werthe y_n ſtetig zu- oder abnimmt, ſo verſchwindet der Werth von y' in dem Augenblicke, wo y dieſen Werth y_n erreicht, und der folgende Werth:

$$y_{n+1} = y_n + y'_n \Delta x$$

reducirt ſich auf y_n, ſo daß y'_{n+1} ebenfalls gleich Null iſt, u. ſ. f. Der Werth der Function würde alſo, nachdem er von y_0 bis y_n eine veränderliche Größe geweſen iſt, mit einem Male eine conſtante Größe.

Es iſt wohl zu erwägen, daß ſich die hier gemachte Bemerkung nicht blos auf die arithmetiſche oder graphiſche Conſtruction erſtreckt, vermittelſt welcher die auf einander folgenden Werthe einer Function vermöge der Differenzialgleichung, welche das Geſetz ihrer unendlich kleinen Veränderungen ausdrückt, ſelbſt wenn ſich dieſes Integral nicht analytiſch ausdrücken läßt, mit einer beliebigen Annäherung beſtimmt werden können; ſondern dieſe Bemerkung erſtreckt ſich vor allen Dingen jedesmal auf die Erzeugung der Function ſelbſt, wenn ſie wirklich und in dem eigentlichen Sinne des Wortes eine Reihe von Werthen durchläuft, was vorausſetzt, daß die unabhängige Veränderliche x die Zeit oder eine mit der Zeit wachſende Größe ausdrückt.

§. 516. Es kommt nun darauf an, zu beſtimmen, unter welchen Umſtänden die Function y den Werth erreichen kann, welcher φy verſchwinden macht, indem dieſe Function von einem andern anfänglichen Werthe ausgeht. Zu dem Zwecke wollen wir zuvörderſt den Fall betrachten, wo ſich die Function $\psi(x, y)$ auf eine Conſtante c reducirt, und wo die Function φy die Form $my + n$ hat, indem m und n conſtante Zahlen bezeichnen. Das Integral der Gleichung:

$$y' = c(my + n)$$

iſt:

$$my + n = (my_0 + n)\, e^{mc(x-x_0)},$$

wo x_0, y_0 die anfänglichen Werthe der beiden Veränderlichen bezeichnen. Die Größe $my_0 + n$ ist nach der Voraussetzung von Null verschieden, und folglich kann die Größe $my + n$ wegen der Form des Integrales für keinen endlichen Werth von x verschwinden, sondern sie convergirt nur dann gegen Null, wenn die als negativ vorausgesetzte Größe $mc(x - x_0)$ immer größere und größere Zahlenwerthe annimmt.

Wir wollen nun zum allgemeinen Falle übergehen, und blos annehmen, daß die Function $\varphi' y$ nicht für den Werth von y unendlich wird, welcher $\varphi y = 0$ macht. Es sei η dieser Werth, so kann man, wenn die Function y, indem sie von einem kleinern oder größern Werthe ausgeht, so lange zu- oder abnehmen kann, bis sie den Werth η erreicht, für y_0 einen unendlich wenig von η verschiedenen Werth annehmen, und alsdann ist φy unendlich wenig von $(y - \eta)\, \varphi' \eta$ verschieden. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß $y_0 > \eta$, $\varphi' \eta > 0$ ist, so kann dy nicht für positive Werthe von dx negativ werden, und folglich kann y nicht von dem Werthe y_0 zu dem Werthe η übergehen, wenn die Function $\psi(x, y)$ in dem Intervalle keine negativen Werthe annimmt. Außerdem wird der Fall ausgeschlossen, wo diese Function durch das Unendliche gehen, oder unbestimmt werden könnte. Es sei $-c$ der numerisch größte der negativen Werthe, welche die Function $\psi(x, y)$ in dem Intervalle annimmt, so haben wir eben gesehen, daß die Differenz $y - \eta$ nach der Form des Integrales der Differenzialgleichung:

$$dy = -c\,(y - \eta) \cdot \varphi\eta\, dx \qquad (2)$$

für keinen endlichen Werth von x verschwinden kann, und folglich ist es um so mehr unmöglich, daß die Differenz $y - \eta$ für irgend einen endlichen Werth von x verschwinden kann, wenn die Function y der Differenzialgleichung:

$$dy = \psi(x, y) \cdot (y - \eta) \cdot \varphi'\eta\, dx \qquad (3)$$

genügen muß, weil die Function $\psi(x, y)$ selbst, wenn sie beständig als negativ angenommen wird, nach der Voraussetzung niemals einen Zahlenwerth $= c$ erreicht, und also y vermöge der Gleichung (3) nicht so schnell wächst, als vermöge der Gleichung (2).

Wenn man $y_0 < \eta$, oder $\varphi'\eta < 0$ annimmt, so wird auf eine ganz ähnliche Weise dargethan, daß y für keinen endlichen Werth von x gleich η werden kann.

Es bleibt also nur noch der Fall übrig, wo der Coefficient $\varphi'\eta$ unendlich wird, was z. B. stattfindet, wenn man

$$\varphi y = (y - \eta)^k$$

setzt, wo k eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet, oder auch:

$$\varphi y = \frac{1}{\log.(y - \eta)},$$

und alsdann ist die Gleichung $y = \eta$ ein singuläres Integral der Gleichung (1).

§. 517. Wir haben bisher angenommen, daß die in Beziehung auf y' aufgelöst'te Gleichung (F) für y' nur einen einzigen reellen Werth $f(x, y)$ gibt, und offenbar findet in diesem Falle zwischen den unendlich vielen Linien, welche man vermöge der Gleichung (F) construiren kann, wenn man einen Punkt jeder dieser Linien willkürlich annimmt, kein Durchschnitt statt, weil, wenn sie sich durchschnitten, die Ableitung y', gegen die Voraussetzung, mehrere Werthe haben würde, welche den Coordinaten x, y der Durchschnittspunkte entsprächen. Hiervon findet nur eine Ausnahme statt, wenn der Werth von

y' für gewiſſe Werthe von x, y unbeſtimmt wird. So gehört z. B. die Differenzialgleichung $y' = \frac{y}{x}$ unendlich vielen geraden Linien an, welche ſich alle im Anfangspunkte der Coordinaten ſchneiden, für welchen Punkt der Werth von y' unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$ erſcheint (§. 182).

Wenn die Gleichung (F) für y' mehrere verſchiedene Werthe $y' = f_1(x,y)$, $y' = f_2(x,y)$, ꝛc. gibt, ſo läßt ſich jede dieſer Gleichungen, einzeln betrachtet, wie die Gleichung (f) conſtruiren und führt auf ein Syſtem von unendlich vielen Curven oder Curvenzweigen, welche durch die Wahl des Anfangspunktes particulariſirt ſind.

So iſt die Gleichung:

$$y'^2x^2 - 2y'x(y-p) + y^2 + x^2 = 0 \qquad (a)$$

gleichbedeutend mit den beiden folgenden:

$$y' = \frac{y-p+\sqrt{p(p-2y)-x^2}}{x}, \qquad (a_1)$$

$$y' = \frac{y-p+\sqrt{p(p-2y)-x^2}}{x}, \qquad (a_2)$$

wovon jede für ſich conſtruirt werden kann.

In dieſem Beiſpiele nimmt y' jedesmal einen imaginären Werth an, wenn die Veränderlichen x, y der Ungleichheit:

$$p(p-2y) - x^2 < 0$$

genügen. Die Curve:

$$p(p-2y) - x^2 = 0 \qquad (b)$$

begrenzt folglich auf der Ebene der xy die Region, in welcher ſich die durch die Gleichung (a) charakteriſirten Curven ausdehnen können. Die beiden Werthe von y' werden für die auf der Curve (b) liegenden Punkte einander gleich, d. h. ſie iſt der geometriſche Ort der Punkte, worin ſich je zwei der reſp. durch die Gleichungen (a_1), (a_2) charakteriſirten Curvenzweige vereinigen, welche Vereinigung auf zwei verſchiedene Arten ſtattfinden kann.

Im Allgemeinen iſt die gemeinſchaftliche Tangente der beiden Curvenzweige (a_1), (a_2) für die auf der Curve (b) liegenden Punkte von der Tangente der Curve (b) in denſelben Punkten verſchieden, was namentlich bei dem von uns gewählten Beiſpiele der Fall iſt. Der aus den Gleichungen (a_1), (a_2) abgeleitete Werth von y' reducirt ſich für die auf der Curve (b) liegenden Punkte auf:

$$y' = \frac{y-p}{x},$$

während die Differenziation der Gleichung (b)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{p}$$

gibt, und wenn dieſer Werth von $\frac{dy}{dx}$ dem vorhin für y' gefundenen gleich ſein ſollte, ſo müßte man die Relation:

$$\frac{y-p}{x} = -\frac{x}{p}, \quad \text{oder} \quad p(p-y) - x^2 = 0$$

haben, welche nicht mit der Gleichung (b) bestehen kann, ausgenommen für $y = 0$.

In solchen Fällen vereinigen sich die Curvenzweige (a_1), (a_2) auf der Curve (b), indem sie eine Rückkehrkante bilden, und diese Grenzcurve ist der geometrische Ort aller Rückkehrpunkte der Curven, zu welchen die Differenzialgleichung (a) gehört.

§. 518. Aber wenn man die Gleichung:

$$y'^2x^2 - 2y'x(2y - p) + 2y(2y - p) + x^2 = 0 \qquad (\alpha)$$

hat, welche sich in die beiden folgenden:

$$y' = \frac{2y - p + \sqrt{p(p-2y) - x^2}}{x} \qquad (\alpha_1)$$

$$y' = \frac{2y - p - \sqrt{p(p-2y) - x^2}}{x} \qquad (\alpha_2)$$

zerlegen läßt; so fällt die gemeinschaftliche Tangente der Curvenzweige (α_1), (α_2) in den auf der Curve (b) liegenden Vereinigungspunkten dieser Zweige mit der Tangente dieser letztern Curve zusammen, welche also die Umhüllungs- oder Umschließungscurve aller durch das System der Gleichungen (α_1), (α_2) charakterisirten Curven wird; denn die Gleichung, welche dieses Zusammenfallen der Tangenten ausdrückt, nämlich:

$$\frac{2y - p}{x} = -\frac{x}{p}$$

ist mit der Gleichung (b) identisch.

Dieses stimmt mit dem im §. 184 Gesagten überein, und die Gleichung (α) wird erhalten, wenn man die Constante a zwischen der Gleichung:

$$y = ax + \frac{1 + a^2}{p^2}x^2 \qquad (c)$$

und ihre Ableitung eliminirt. Die Umhüllungscurve aller durch die Gleichung (α) oder durch die Gleichung (c), welche das allgemeine Integral derselben ist, ausgedrückten Parabeln ist genau die Parabel (b), so daß der Berührungspunkt jeder eingeschlossenen Curve mit der Umschließungscurve die erstere in zwei paraboliſche Bogen theilt, wo der Werth von y' für den einen durch die Gleichung (α_1), und für den andern durch die Gleichung (α_2) gegeben wird.

§. 519. Hieraus entspringt eine andere Schwierigkeit, denn wenn x die Zeit, oder eine mit der Zeit wachsende Größe bezeichnet, so ist kein Grund einzusehen, weßwegen die Function y, deren Veränderungsgesetz durch die Gleichung (α) ausgedrückt wird, für größere Werthe von x, als die Abscisse Op (Fig. 48) des Berührungspunktes der eingeschlossenen Curve mit der umschließenden eher durch die Ordinate des Bogens mn der eingeschlossenen Curve, als durch die Ordinate des Bogens mu der Umschließungscurve ausgedrückt werden soll, und dennoch ist es unmöglich, daß diese von demselben gegebenen Anfangswerthe ausgehende Function für denselben Werth von x zwei verschiedene Werthe zugleich habe.

Diese Schwierigkeit wird durch folgende Betrachtungen gehoben:

Es bezeichne $u = 0$ die Gleichung der Umschließungscurve, wo u eine Function von x, y ist, vermittelst welcher wir y und dy aus der gegebenen Differenzialgleichung fortschaffen können. Diese Gleichung muß die Form:

$$du = \varphi u \cdot \psi(u, x)\, dx$$

annehmen, wo φu eine Function von u bezeichnet, welche mit u verſchwindet, und deren Ableitung $\varphi' u$ für $u = 0$ unendlich wird, wenigſtens, wenn die Function $\psi(u, x)$ nicht ſelbſt unendlich oder unbeſtimmt wird. Denn wenn die Function u, nachdem ſie anfangs einen von Null verſchiedenen Werth gehabt hat, verſchwindet, was in dem Berührungspunkte der umſchloſſenen Linie und der Umſchließungslinie ſtattfindet; ſo wird die Tangente der erſtern durch die Gleichung $du = 0$ beſtimmt, und fällt mit der zweiten zuſammen, wie es der Fall ſein muß.

Hieraus folgt, daß die Function u, wenn ſie einmal den Werth Null erreicht hat, dieſen Werth für zunehmende Werthe der Zeit oder der Veränderlichen x fortwährend beibehalt, ſo daß die Function y, welche im erſten Theile ihres Laufes durch die Ordinate der umſchloſſenen Linie ausgedrückt wird, darauf durch die Ordinate der Umſchließungslinie dargeſtellt wird.

Wenn man, um dieſes auf unſer Beiſpiel anzuwenden:

$$u = p(p - 2y) - x^2$$

ſetzt, ſo verwandeln ſich die Gleichungen (α_1), (α_2) in:

$$du = \sqrt{u} \cdot \frac{2\sqrt{u} + 1}{x}, \quad du = \sqrt{u} \cdot \frac{2\sqrt{u} - 1}{x}.$$

§. 520. Wir kommen alſo auf dieſe Weiſe wieder auf die im vierten Kapitel des gegenwärtigen Buches auseinander geſetzte Theorie der ſingulären Integrale, und hieraus geht hervor, weßwegen wir den Namen Integrale, welcher von einigen Autoren mit Unrecht verworfen iſt, beibehalten haben. In der That wird, wenn die Zeit explicite oder implicite die Rolle der unabhängigen veränderlichen Größe ſpielt, das eigentliche Problem der Integration, welches in der Beſtimmung der Summe der unendlich kleinen Incremente der Function während eines gegebenen Zeitraumes beſteht, ſucceſſive vermittelſt eines particulären Integrales, und vermittelſt eines ſingulären Integrales gelöſt, ſo daß die Auflöſung nur dann vollſtändig iſt, wenn man das ſinguläre Integral mit dem Syſteme der particulären Integrale oder mit dem allgemeinen Integrale verbindet.

Dieſe Eigenſchaft kommt dem ſingulären Integrale deswegen zu, weil es die Umhüllungslinie aller durch die particulären Integrale gegebenen Linien ausdrückt. Selbſt in dem Falle, wo ſich die Gleichung der Umhüllungslinie durch eine ſchickliche Beſtimmung der willkürlichen Conſtanten aus dem allgemeinen Integrale ableiten ließe (daſſelbe alſo in dem rein abſtracten Sinne kein ſinguläres Integral mehr wäre), würde es folglich doch noch die Eigenthümlichkeit eines ſingulären Integrales in ſo fern haben, als man es mit jedem der übrigen ſingulären Integrale verbinden müßte, um die Auflöſung der Integrationsaufgabe vollſtändig zu machen, wenn die Zeit oder eine mit der Zeit wachſende Größe die unabhängige Veränderliche iſt.

So iſt z. B. von der Differenzialgleichung:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \qquad (d)$$

das allgemeine Integral:

$$y^2 + x^2 - 2ay = 0,$$

welches unendlich viele Kreiſe ausdrückt, deren Mittelpunkte auf der Axe der y liegen, und welche ſämmtlich die Axe der x im Anfangspunkte der Coordinaten berühren. Die Gleichung $y = 0$, welche der gegebenen Gleichung ge-

nügt, iſt nur in ſo fern ein particuläres Integral, als ſie ſich aus dem allgemeinen Integrale ergibt, wenn man darin $a = \infty$ ſetzt; aber wenn die Veränderliche x die Zeit ausdrückt, und man gibt y für einen negativen Werth von x einen poſitiven Werth, welcher blos der Bedingung unterliegt, daß er numeriſch kleiner ſein muß als x, ſo verſchwindet y zu gleicher Zeit mit x und bleibt dann für alle poſitiven Werthe von x beſtändig $= 0$. Man muß alſo die Gleichung $y = 0$ mit jedem der übrigen particulären Integrale verbinden, um ein Syſtem zu bilden, welches in jedem beſondern Falle das Problem der Integration läßt, und in dieſer Beziehung iſt die Gleichung $y = 0$ ein wirkliches ſinguläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Um die Gleichung (d) mit der Gleichung (1) zu vergleichen, ſetze man:

$$\varphi y = y, \quad \psi(x, y) = \frac{2x}{x^2 - y^2},$$

ſo leiſtet die Function φy nicht mehr der im §. 516 aufgeſtellten Bedingung, daß die von einem von Null verſchiedenen Werthe ausgehende Function y Null werden kann, Genüge; aber dieſes rührt daher, daß der Factor $\psi(x, y)$ für $x = 0$, $y = 0$ unendlich wird, und dieſer Fall wurde bei dem Beweiſe in dem angeführten §. ausgeſchloſſen.

§. 521. Wir wollen nun zu den Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung übergehen, und das drüber Geſagte wird ſich alsdann leicht auf Differenzialgleichungen einer beliebigen Ordnung anwenden laſſen.

Es ſei:

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (e)$$

eine in Beziehung auf y'' aufgelöſ'te Differenzialgleichung der zweiten Ordnung, und wir wollen annehmen, daß man für einen Werth x_0 der unabhängigen Veränderlichen x willkürlich die correſpondirenden Werthe y_0, y'_0 angenommen habe, ſo iſt:

$$y''_0 = f(x_0, y_0, y'_0),$$

und wenn man $x_1 = x_0 + \Delta x$ ſetzt, wo Δx eine ſehr kleine Größe der erſten Ordnung bezeichnet, ſo hat man bis auf Größen der zweiten Ordnung genau:

$$y_1 = y_0 + y'_0 \Delta x, \quad y'_1 = y'_0 + y''_0 \Delta x,$$

dann:

$$y''_1 = f(x_1, y_1, y'_1), \; y_2 = y_1 + y'_1 \Delta x, \quad y'_2 = y'_1 + y''_1 \Delta x$$

u. ſ. f., ſo daß die Reihe von Werthen, welche jede der Functionen y', y durchläuft, mit einer beliebigen Annäherung arithmetiſch berechnet werden kann.

Wenn die Gleichung (e) die Form:

$$y'' = \varphi y' \cdot \psi(x, y, y')$$

hat, und y' erreicht einen Werth η', welcher $\varphi y'$ verſchwinden macht, ſo verſchwindet y'', und folglich behält y' von dieſer Zeit an einen conſtanten Werth. Das erſte ſinguläre Integral der gegebenen Differenzialgleichung iſt $y' = \eta'$, und das Integral von dieſer Gleichung, nämlich $y = \eta' x + c$ leiſtet der gegebenen Gleichung Genüge; aber ohne das allgemeine Integral derſelben zu ſein, weil es nur die willkürliche Conſtante c enthält.

Wenn die gegebene Differenzialgleichung die Form:

$$y'' = \varphi y \cdot \psi(x, y, y') = 0$$

hat, und y erreicht einen Werth η, welcher φy verſchwinden macht, ſo verſchwindet auch y''; aber da zu gleicher Zeit y' im Allgemeinen einen von Null

verſchiedenen Werth hat, ſo nehmen auch y und y'' in dem folgenden Augenblicke von Null verſchiedene Werthe an. Folglich drückt die Gleichung $y = \eta$, welche ein ſinguläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung ohne willkürliche Conſtante iſt, zu keiner Zeit die Reihe der Werthe aus, welche die Function y durchlaufen muß, wenn die unabhängige Veränderliche x die Zeit, oder eine mit der Zeit zunehmende Größe bezeichnet, wofern nicht y' mit φy zu gleicher Zeit verſchwindet.

Wir könnten dieſen Bemerkungen eine größere Allgemeinheit geben, wie wir es bei den Differenzialgleichungen der erſten Ordnung gethan haben; allein die bloße Andeutung dieſes Gegenſtandes iſt ſchon hinreichend.

§. 522. Betrachten wir noch das Syſtem der gleichzeitigen Differenzialgleichungen (§. 510):

$$(x'y + y'x)^2 - 8tx'y' = 0,\quad xy - t(xy' - x'y) = 0,$$

und ſetzen $xy - t^2 = u$, wodurch ſie ſich in:

$$u'^2 + 4u = 0,\quad 2t(u + t^2)x' = (t^2 + u't - u)x$$

verwandeln. Wenn t, x, y Werthe erreicht haben, welche u verſchwinden machen, ſo verſchwindet auch u', und folglich bleibt die Function u beſtändig $= 0$. Zur Beſtimmung von x hat man die Gleichung $2tx' = x$, folglich $x^2 = a_1 t$, und die allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen ſind:

$$xy = at - \frac{a^2}{4},\quad xt = a_1 y.$$

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir endlich $a > 0$ ſetzen, ſo drückt dieſes Syſtem von Gleichungen die Werthe von x, y für Werthe von $t < \frac{a}{2}$ aus; aber für $t > \frac{a}{2}$ werden die Werthe von x, y durch das Syſtem der Gleichungen:

$$xy - t^2 = 0,\quad x^2 = a_1 t,$$

welches das ſinguläre Integral der gegebenen Gleichungen darſtellt, ausgedrückt.

Siebentes Buch.

Integration der Differenzialgleichungen mit mehreren unabhängigen veränderlichen Größen.

Erſtes Kapitel.

Ueber die Integration der Gleichungen mit totalen Differenzialen. — Geometriſche Anwendungen.

---

§. 523. Wenn man zwiſchen den unabhängigen Veränderlichen x, y und der davon abhängigen Function z eine Gleichung von der Form:

$$dz = \varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$$

hat, ſo läßt ſich die Integration dieſer Gleichung auf die Quadraturen zurückführen (§. 393), wenn die Functionen φ, ψ der Bedingung der Integrabilität:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx}$$

genügen.

Wenn die Functionen φ, ψ die Veränderliche z enthielten, oder wenn man zwiſchen den Veränderlichen x, y, z, und ihren Differenzialen die Gleichung:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \qquad (1)$$

hätte, wo X, Y, Z Functionen von x, y, z bezeichnen, ſo ließe ſich die Integration dieſer Gleichung noch auf die Quadraturen zurückführen (§. 396), wenn die Functionen X, Y, Z die Bedingungen der Integrabilität:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}$$

erfüllen, und das Integral würde die Form $F(x, y, z) = \text{const.}$ haben, wo F die Function bezeichnet, deren genaues Differenzial der erſte Theil der Gleichung (1) iſt.

In allen Fällen muß, wenn man annimmt, daß es eine Function z von zwei unabhängig veränderlichen Größen x, y gibt, welche der Gleichung (1) genügt, und woraus man einen Werth von dz von der Form:

$$dz = pdx + qdy$$

ableiten kann, die Gleichung ſtattfinden:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}; \qquad (2)$$

aber vermöge der Gleichung (1) hat man:

$$p = -\frac{X}{Z}, \quad q = -\frac{Y}{Z},$$

woraus folgt:

$$\frac{dp}{dy} = -\left\{\frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}\right\} = -\frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dz} \cdot \frac{Y}{Z}$$

$$\frac{dq}{dx} = -\left\{\frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right\} = -\frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dz} \cdot \frac{X}{Z},$$

so daß die Gleichung (1) nach verrichteten Reductionen

$$X\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) + Y\left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) + Z\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) = 0 \qquad (3)$$

gibt.

Wenn dieſe letzte Gleichung, welche die Bedingung der Integrabilität ausdrückt, erfüllt wird, ſo läßt ſich die Integration der Gleichung (1) auf die von Gleichungen mit zwei Veränderlichen zurückführen; denn wenn man das Integral der Gleichung (1) hätte, und differenzirte daſſelbe, indem man z als eine Conſtante betrachtete; ſo müßte das erhaltene Reſultat mit der Gleichung (1), nachdem man darin $dz = 0$ geſetzt hat, d. h. mit der Gleichung:

$$Xdx + Ydy = 0 \qquad (4)$$

übereinſtimmen.

Umgekehrt, wenn man durch μ den Factor bezeichnet, welcher $Xdx + Ydy$ zu einem genauen Differenziale macht, wenn man z als eine Conſtante betrachtet, und

$$\int \mu(Xdx + Ydy) = F(x, y)$$

ſetzt, ſo iſt das Integral der Gleichung (1):

$$F(x, y) = Z_1, \qquad (5)$$

wo Z_1 eine Function der einzigen Veränderlichen z bezeichnet. Um ſie zu beſtimmen, wollen wir bemerken, daß

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = \frac{dZ_1}{dz}dz,$$

ferner:

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = \mu(Xdx + Ydy) = -\mu Z dz,$$

und folglich:

$$\frac{dZ_1}{dz} = \frac{dF}{dz} - \mu Z \qquad (6)$$

iſt.

Wenn alſo die Gleichung (3) erfüllt wird, ſo müſſen die beiden Veränderlichen x, y zu gleicher Zeit aus dem zweiten Theile der Gleichung (6) verſchwinden, wenn man eine derſelben vermittelſt der Gleichung (5) fort-

ſchafft, oder mit andern Worten, die in Beziehung auf x genommene Ableitung dieſes zweiten Theiles muß $= 0$ ſein, wenn man y als eine durch die Gleichung (5) gegebene Function von x und von Z betrachtet. Die zu verificirende Bedingung wird alſo ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{d\cdot\left(\frac{dF}{dz}-\mu Z\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{dF}{dz}-\mu Z\right)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

oder durch:

$$\frac{d^2F}{dxdz}-\mu\frac{dZ}{dx}-Z\frac{d\mu}{dx}-\left(\frac{d^2F}{dydz}-\mu\frac{dZ}{dy}-Z\frac{d\mu}{dy}\right)\frac{X}{Y}=0, \qquad (7)$$

wenn man für $\frac{dy}{dx}$ ſeinen aus der Gleichung (4) abgeleiteten Werth ſetzt.

Außerdem hat man:

$$\frac{d^2F}{dxdz}=\frac{d\cdot\mu X}{dz}=\mu\frac{dX}{dz}+X\frac{d\mu}{dz}$$

$$\frac{d^2F}{dydx}=\frac{d\cdot\mu Y}{dz}=\mu\frac{dY}{dz}+Y\frac{d\mu}{dz},$$

und der Factor μ leiſtet der Bedingungsgleichung:

$$X\frac{d\mu}{dy}-Y\frac{d\mu}{dx}+\mu\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)=0$$

Genüge (§. 444).

Subſtituirt man nun die aus den drei letzten Gleichungen abgeleiteten Werthe von:

$$\frac{d^2F}{dxdz},\ \frac{d^2F}{dydz},\ \frac{d\mu}{dx}$$

in die Gleichung (7), ſo verſchwinden die Größen:

$$\mu,\ \frac{d\mu}{dy},\ \frac{d\mu}{dz}$$

zu gleicher Zeit, und man kommt wieder auf die Gleichung (3), welche die Bedingung der Integrabilität ausdrückt.

§. 524. Wenn dieſe Gleichung nicht erfüllt wird, ſo gibt es keine Function z der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y, welche die Gleichung (1) verificiren kann, d. h. dieſe Gleichung drückt nicht mehr eine Eigenſchaft der Coordinaten x, y, z einer gewiſſen Oberfläche aus. Aber deswegen iſt die Gleichung (1) doch nicht ohne alle Bedeutung und ſie kann z. B. ſehr wohl eine gemeinſchaftliche Eigenſchaft einer Reihe von Curven ausdrücken, deren veränderliche Coordinaten durch x, y, z bezeichnet werden (§. 263 und 267); nun gibt es keine Fläche mehr, welche der geometriſche Ort aller dieſer Linien iſt. Wenn man zwiſchen y und x eine willkürliche Relation aufſtellt, d. h. die Projection einer dieſer Linien auf der Ebene der x,y willkürlich zeichnet, ſo wird z eine Function der einzigen unabhängigen Veränderlichen x, und die auf dieſelbe Weiſe wie eine gewöhnliche Differenzialgleichung conſtruirte Gleichung (1) beſtimmt alsdann die Projection derſelben Linie auf der Ebene der xz, wofern nur ein Punkt gegeben iſt, durch welchen dieſe Projection gehen muß. Die Integration der Gleichung (1) beſteht in dieſem Falle darin, zwi-

ſchen den Coordinaten x, y, z ein Syſtem von Gleichungen mit einer willkürlichen Function zu finden, woraus man durch eine ſchickliche Beſtimmung dieſer willkürlichen Function alle Linien ableiten kann, deren Coordinaten die Eigenſchaft beſitzen, der gegebenen Differenzialgleichung Genüge zu leiſten.

Nun ergibt ſich aber die Auflöſung dieſer Aufgabe unmittelbar aus der Analyſe, welche uns auf die Integration der gegebenen Differenzialgleichung geführt hat, wenn dieſe die Bedingung der Integrabilität erfüllt; denn wenn man in dem entgegengeſetzten Falle, ſtatt die in der Gleichung (5) vorkommende Function Z zu beſtimmen

$$F(x, y) = \varphi z \tag{8}$$

ſetzt, wo φ eine willkürliche Function bezeichnet, und dann:

$$\frac{dF}{dz} - \mu Z = \varphi' z, \tag{9}$$

ſo verificiren die Werthe von x, y als Functionen von z, welche die Gleichungen (8) und (9) erfüllen, auch die gegebene Differenzialgleichung, deren Integral folglich durch das Syſtem (8) und (9) mit der willkürlichen Function φ und ihrer Ableitung ausgedrückt wird.

Geſetzt, man ſollte ausdrücken, daß die Linie, deren veränderliche Coordinaten x, y, z ſind, durch die Berührung einer Kegelfläche, deren Mittelpunkt im Punkte (x, y, z) liegt und einer Rotationsfläche um die Axe der z beſtimmt wird; ſo müßten die auf dieſer Linie liegenden Punkte zu gleicher Zeit den Gleichungen:

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \tag{10}$$

$$py - qx = 0, \tag{11}$$

$$dz = pdx + qdy$$

Genüge leiſten (§. 249 und 254), woraus ſich durch Elimination von p und q ergibt:

$$\frac{dz}{z - z_0} = \frac{xdx + ydy}{x(x - x_0) + y(y - y_0)}. \tag{12}$$

Dieſe Gleichung erfüllt die Bedingung der Integrabilität nicht, ſo lange x_0, y_0 nicht verſchwinden, und in dieſem Falle hat man die Gleichungen:

$$\mu = x(x - x_0) + y(y - y_0)$$

$$F(x, y) = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad Z = -\frac{1}{z - z_0},$$

vermöge welcher ſich die Gleichungen (8) und (9) reſp. in:

$$x^2 + y^2 = 2\varphi z, \quad \frac{x(x - x_0) + y(y - y_0)}{z - z_0} = \varphi' z \tag{13}$$

verwandeln. Die Gleichung (12) oder das damit gleichbedeutende Syſtem der Gleichungen (13) gehören folglich allen Linien an, welche die angegebene geometriſche Eigenſchaft haben.

Man hätte dieſelbe Aufgabe auch dadurch anders ausdrücken können, daß man gefragt hätte, welches iſt die Gleichung der Fläche, die zugleich in die Familie der durch die Gleichung (10) charakteriſirten Kegelflächen und in die Familie der durch die Gleichung (11) charakteriſirten Rotationsflächen gehört? Die Gleichung (12), auf welche man durch den Ausdruck dieſer doppelten Bedingung geführt wird, erfüllt die Bedingung der Integrabilität nicht, ſo lange x_0, y_0 nicht verſchwinden, woraus alſo im Allgemeinen folgt, daß eine

solche Fläche nicht existirt. Wenn x_0, y_0 verschwinden, so läßt sich die Gleichung (12) integriren, und gibt:

$$z - z_0 = c\sqrt{x^2 + y^2},$$

wo c die willkürliche Constante bezeichnet. Diese Gleichung gehört zu allen geraden Kegelflächen, deren Mittelpunkt in dem Punkte der Axe der z liegt, dessen Ordinate z_0 ist, und es ist einleuchtend, daß diese geraden Kegelflächen der so ausgedrückten Aufgabe in der That genügen.

Wenn man die Gleichung (12) auf die Form:

$$dz\,[x(x - x_0) + y(y - y_0)] = (z - z_0)(x\,dx + y\,dy)$$

bringt, so sieht man, daß sie durch die Gleichung $z - z_0 = 0$ erfüllt wird, ohne daß man anzunehmen braucht, daß die Coordinaten x_0, y_0 verschwinden. Also ist die durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) senkrecht auf die Axe der z gelegte Ebene eine Fläche, welche der Bedingung der Aufgabe genügt; aber diese Auflösung ist keine singuläre, wie aus der obigen Form der Gleichung deutlich hervorgeht, und sie enthält die zur Vollständigkeit des Integrales erforderliche willkürliche Constante nicht.

§. 525. Wenn die gegebene Differenzialgleichung in Beziehung auf die Differenziale dx, dy, dz nicht linear ist, so kann sie der Gleichung (3) nicht genügen, und folglich eine Gleichung zwischen x, y, z und einem willkürlichen Parameter nicht zum vollständigen Integrale haben, so lange sie sich nicht in lineare Factoren zerlegen läßt. Gleichwohl gibt es unter den nicht linearen Differenzialgleichungen, welche dieser vorläufigen Bedingung der Integrabilität nicht genügen, noch solche, die eine geometrische Bedeutung haben und sich durch Einführung willkürlicher Functionen in aller erforderlichen Allgemeinheit integriren lassen.

So besteht z. B. das Problem der Rectification ebener Curven in der Integration der Differenzialgleichung mit drei Veränderlichen:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad (14)$$

welche sich weder in lineare Factoren zerlegen läßt, noch eine einzige Gleichung zwischen x, y, s und einer willkürlichen Constanten zum Integrale hat; aber deren allgemeines Integral sich nichts desto weniger unter einer zusammengesetzten Form ausdrücken läßt. Denn man kann die Gleichung (14) auf folgende Form bringen:

$$ds^2 = (dx \cos.\,\alpha - dy \sin.\,\alpha)^2 + (dx \sin.\,\alpha + dy \cos.\,\alpha)^2,$$

wo α einen willkürlichen Winkel bezeichnet, und folglich kann man diese Gleichung durch das System der beiden andern Gleichungen:

$$ds = dx \cos.\,\alpha - dy \sin.\,\alpha, \quad dx \sin.\,\alpha + dy \cos.\,\alpha = 0$$

ersetzen, deren Integrale:

$$s = x \cos.\,\alpha - y \sin.\,\alpha + \beta, \quad x \sin.\,\alpha + y \cos.\,\alpha = \gamma, \qquad (15)$$

sind, wo β, γ andere willkürliche Constanten bezeichnen. Da uns nun das System der Gleichungen (15) eine particuläre Auflösung der Gleichung (14) liefert, so kommt es darauf an, diese Auflösung zu verallgemeinern, und zu dem Zwecke wollen wir nach der bereits in Buch 4, Kap. 8 angewandten Methode zunächst $\beta = \varphi\alpha$, $\gamma = \psi\alpha$ setzen und dann die in Beziehung auf die jetzt als veränderlich betrachtete Größe α genommenen Ableitungen der Gleichungen (15) gleich Null setzen. Durch diese Rechnung ergibt sich:

$$0 = -x \sin.\,\alpha - y \cos.\,\alpha + \varphi'\alpha, \quad x \cos.\,\alpha - y \sin.\,\alpha = \psi'\alpha,$$

woraus $\psi\alpha = \varphi'\alpha$, $\psi'\alpha = \varphi''\alpha$ folgt. Folglich wird der Gleichung (14) durch das Syſtem der drei Gleichungen:

$$s = x\cos.\alpha - y\sin.\alpha + \varphi\alpha$$
$$x\sin.\alpha + y\cos.\alpha = \varphi'\alpha$$
$$x\cos.\alpha - y\sin.\alpha = \varphi''\alpha$$

genügt, worin die Function φ willkürlich bleibt oder durch das Syſtem:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi'\alpha \cdot \sin.\alpha + \varphi''\alpha \cdot \cos.\alpha \\ y &= \varphi'\alpha \cdot \cos.\alpha - \varphi''\alpha \cdot \sin.\alpha \\ s &= \varphi\alpha + \varphi''\alpha \end{aligned}\right\}, \qquad (16)$$

welches ſich daraus ergibt und woraus in der That die Werthe:

$$dx = (\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha)\cos.\alpha\, d\alpha$$
$$dy = -(\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha)\sin.\alpha\, d\alpha$$
$$ds = (\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha)\, d\alpha$$

folgen, welche der Gleichung (14) offenbar Genüge leiſten. Wenn man die Form der Function φ angibt, ſo erhält man die Gleichung der ebenen Curve, für welche die Größen s, x, y reſp. die Länge des Bogens, die Abſciſſe und die Ordinate bezeichnen, wenn man, wo möglich, zwiſchen den beiden erſten Gleichungen (16) α eliminirt und den Werth des Bogens s als Function von x oder y erhält man, wenn man α zwiſchen der dritten und erſten oder zweiten dieſer Gleichungen eliminirt. Wenn dagegen die Gleichung der Curve:

$$f(x, y) = 0 \qquad (f)$$

gegeben iſt, und man ſubſtituirt die vorhergehenden Werthe von x, y hinein, ſo erhält man eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zwiſchen α und $\varphi\alpha$, durch deren vollſtändige Integration zwei willkürliche Conſtanten eingeführt werden. In dieſem Falle gäbe aber auch die dritte der Gleichungen (16) den Werth von s mit zwei willkürlichen Conſtanten, während dieſer Werth wegen der willkürlichen Wahl des Anfangspunktes der Bogen nothwendig nur eine einzige willkürliche Conſtante geſtattet. Nach einer ähnlichen Bemerkung von Lagrange hat Poiſſon dieſe Schwierigkeit auf folgende Weiſe beſeitigt.

Wenn man die Gleichung (f) differenzirt und darin für dx, dy ihre Werthe als Functionen von α ſubſtituirt, ſo erhält man die Gleichung:

$$\left(\frac{df}{dx}\cos.\alpha - \frac{df}{dy}\sin.\alpha\right)(\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha)\, d\alpha = 0,$$

welche in die beiden andern:

$$\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha = 0, \quad \frac{df}{dx}\cos.\alpha - \frac{df}{dy}\sin.\alpha = 0$$

zerfällt, wovon ſich die erſte unmittelbar integriren läßt, und

$$\varphi\alpha + \varphi''\alpha = \text{const.}$$

gibt; aber dieſe Auflöſung genügt der Aufgabe nicht, weil daraus $s = \text{const.}$ folgt. Die zweite Gleichung enthält $\varphi'''\alpha$ nicht und iſt, wie die Gleichung (f), in Beziehung auf φ von der zweiten Ordnung. Wenn man alſo $\varphi''\alpha$ zwiſchen dieſen beiden Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung eliminirt, ſo erhält man eine Differenzialgleichung der erſten Ordnung, welche ein ſinguläres Integral von (f) iſt, und wenn man nochmals integrirt, ſo erhält man den Werth von $\varphi\alpha$ und folglich den von s mit einer willkürlichen Conſtanten.

§. 526. Das System der Gleichungen (16) ist nicht das einzige, welches man als der Gleichung (14) gleichbedeutend betrachten kann, und es ist einleuchtend, daß dieser Gleichung durch das System der particulären Werthe:

$$x = as + \alpha, \quad y = s\sqrt{1-a^2} + \beta,$$

worin a, α, β Constanten bezeichnen, genügt wird. Man genügt also auch der Gleichung (14) durch das System der Ausdrücke:

$$x = s\varphi\alpha + \alpha, \quad y = s\sqrt{1-(\varphi\alpha)^2} + \psi\alpha, \tag{17}$$

worin φ, ψ willkürliche Functionen der Veränderlichen α bezeichnen, welche den abgeleiteten Gleichungen:

$$0 = s\varphi'\alpha + 1, \quad 0 = -\frac{s\varphi\alpha \cdot \varphi'\alpha}{\sqrt{1-(\varphi\alpha)^2}} + \psi'\alpha \tag{18}$$

genügen müssen. Die Gleichungen (17) und (18) lassen sich auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\varphi\alpha - \frac{x-\alpha}{s} = 0, \quad \varphi'\alpha + \frac{1}{s} = 0,$$

$$\frac{y-\psi\alpha}{s} - \sqrt{1-\left(\frac{x-\alpha}{s}\right)^2} = 0, \quad \psi'\alpha + \frac{\frac{x-\alpha}{s}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\alpha}{s}\right)^2}} = 0,$$

woraus man sieht, daß die erste mit der vierten identisch wird, wenn man die Function φ so bestimmt, daß sie der Relation:

$$\varphi\alpha = -\psi'\alpha \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x-\alpha}{s}\right)^2}$$

genügt.

Zu gleicher Zeit wird die zweite Gleichung, welche die in Beziehung auf α genommene Ableitung der ersten ist, mit der Ableitung der vierten, oder mit der zweiten Ableitung der dritten Gleichung identisch, die Function φ ist eliminirt, und man hat zur Erfüllung der Gleichung (14) das System der drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} s^2 &= (x-\alpha)^2 + (y-\varphi\alpha)^2 \\ x - \alpha + (y-\psi\alpha)\psi'\alpha &= 0 \\ -1 - (\psi'\alpha)^2 + (y-\psi\alpha)\psi''\alpha &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

woraus erhellet, daß α, $\psi\alpha$ und s resp. die zu den Axen der x und der y parallelen Coordinaten und den Krümmungshalbmesser der Linie bezeichnen, welche die Linie, deren veränderliche Coordinaten x, y sind, zur Evolute hat (§. 190 und folg., §. 334 und §. 492).

Wenn die Gleichung (14) durch die allgemeinere:

$$F\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) = 0$$

ersetzt würde, so erhielte man durch dieselbe Analyse statt der Gleichungen (19) die folgenden:

$$F\left(\frac{x-\alpha}{s}, \frac{y-\psi\alpha}{s}\right) = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2F}{d\alpha^2} = 0.$$

Zweites Kapitel.

Ueber die Integration der partiellen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung unter endlicher Form.

§. 527. Im §. 166 und folg. haben wir gesehen, wie zwischen einer Gleichung mit mehreren unabhängigen Veränderlichen und ihren Ableitungen willkürliche Functionen eliminirt werden, und wie man durch diese Elimination auf eine partielle Differenzialgleichung kommt, welche eben die Allgemeinheit hat, als die ursprüngliche Gleichung, welche das Integral derselben ist. Derselbe Gegenstand ist bei den Anwendungen auf die Theorie der krummen Flächen im Buche 4, Kap. 7 und 8 wieder ausführlicher zur Sprache gebracht, und es kommt jetzt darauf an, die allgemeinsten Verfahrungsarten auseinander zu setzen, welche man anwendet, um von einer partiellen Differenzialgleichung zu ihrem Integrale überzugehen, wenn sich dieses Integral unter endlicher Form, oder in convergirenden unendlichen Reihen vermittelst der bekannten analytischen Hülfsmittel ausdrücken läßt. Uebrigens haben die partiellen Differenzialgleichungen, an und für sich und unabhängig von den Zufälligkeiten ihrer Form, welche bewirken können, daß sie analytische Integrale haben oder nicht, betrachtet, eine Bedeutung und einen eigenthümlichen Werth, welche wir am Ende dieses Buches näher untersuchen müssen.

I. Von der Integration der linearen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 528. Die Integration der partiellen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung, welche in Beziehung auf die darin vorkommenden partiellen Ableitungen linear sind, ist von Lagrange auf die Integration eines Systemes gleichzeitiger Differenzialgleichungen zurückgeführt. Es sei:

$$X\frac{du}{dx}+Y\frac{du}{dy}+Z\frac{du}{dz}+T\frac{du}{dt}+\text{ꝛc.}=U \qquad (a)$$

die zu integrirende Differenzialgleichung und:

$$F(u, x, y, z, t, \text{ꝛc.})=0$$

das gesuchte Integral, wo u eine Function der n unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, t,$ ꝛc. und $U, X, Y, Z, T,$ ꝛc. beliebige Functionen der $n+1$ Veränderlichen $u, x, y, z, t,$ ꝛc. bezeichnen; so hat man:

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{dF}{dy}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dy}=0,\quad \frac{dF}{dz}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dz}=0,\ \text{ꝛc.};$$

folglich kann die Gleichung (a) die Form:

$$U\frac{dF}{du}+X\frac{dF}{dx}+Y\frac{dF}{dy}+Z\frac{dF}{dz}+T\frac{dF}{dt}+\text{ꝛc.}=0 \qquad (b)$$

annehmen, und die Aufgabe ist darauf zurückgeführt, die Function F, welche der Gleichung (b) genügt, auf die allgemeinste Weise zu bestimmen.

Gesetzt, man hätte das in der continuirlichen Gleichung:

$$\frac{du}{U}=\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=\frac{dt}{T}=\text{ꝛc.} \qquad (c)$$

enthaltene System von n gleichzeitigen Differenzialgleichungen mit aller erforderlichen Allgemeinheit integrirt, so kann man den Integralen folgende Form geben:

$$f_1(x, y, z, t, \ldots u) = a_1, \quad f_2(x, y, z, t, \ldots u) = a_2, \ldots$$
$$\ldots f_n(x, y, z, t, \ldots u) = a_n, \qquad (d)$$

wo $a_1, a_2, \ldots a_n$ die durch die Integration eingeführten n willkürlichen Constanten bezeichnen, und man hat folglich:

$$\frac{df_1}{du}du + \frac{df_1}{dx}dx + \frac{df_1}{dy}dy + \frac{df_1}{dz}dz + \frac{df_1}{dt}dt + \text{ꝛc.} = 0$$
$$\frac{df_2}{du}du + \frac{df_2}{dx}dx + \frac{df_2}{dy}dy + \frac{df_2}{dz}dz + \frac{df_2}{dt}dt + \text{ꝛc.} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{df_n}{du}du + \frac{df_n}{dx}dx + \frac{df_n}{dy}dy + \frac{df_n}{dz}dz + \frac{df_n}{dt}dt + \text{ꝛc.} = 0$$

oder wegen der Gleichungen (c):

$$\left.\begin{aligned} U\frac{df_1}{du} + X\frac{df_1}{dx} + Y\frac{df_1}{dy} + Z\frac{df_1}{dz} + T\frac{df_1}{dt} + \text{ꝛc.} = 0 \\ U\frac{df_2}{du} + X\frac{df_2}{dx} + Y\frac{df_2}{dy} + Z\frac{df_2}{dz} + T\frac{df_2}{dt} + \text{ꝛc.} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U\frac{df_n}{du} + X\frac{df_n}{dx} + Y\frac{df_n}{dy} + Z\frac{df_n}{dz} + T\frac{df_n}{dt} + \text{ꝛc.} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (d')$$

Die n Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ leisten also der Gleichung (b) Genüge, und liefern eben so viele particuläre Integrale der gegebenen Gleichung (a).

Es ist leicht einzusehen, daß eine willkürliche Function Φ der Größen $f_1, f_2, \ldots f_n$ ebenfalls der Gleichung (a) genügt; denn wenn man die ersten Theile der Gleichungen (d'), nachdem sie resp. durch:

$$\frac{d\Phi}{df_1}, \frac{d\Phi}{df_2}, \ldots \frac{d\Phi}{df_n}$$

multiplicirt sind, zusammenaddirt; so erhält man:

$$U\frac{d\Phi}{du} + X\frac{d\Phi}{dx} + Y\frac{d\Phi}{dy} + Z\frac{d\Phi}{dz} + T\frac{d\Phi}{dt} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Das Integral der gegebenen Differenzialgleichung ist also:

$$\Phi(f_1, f_2, f_3 \ldots f_n) = 0, \quad \text{oder} \quad f_1 = \varphi(f_2, f_3 \ldots f_n),$$

wo Φ, φ willkürliche Functionen bezeichnen, und außerdem sieht man leicht ein, daß dieses Integral alle erforderliche Allgemeinheit hat, weil man durch die Verbindung einer Gleichung mit ihren partiellen Ableitungen der ersten Ordnung nur eine willkürliche Function eliminiren kann.

§. 529. Wir wollen diese Analyse auf die Differenzialgleichung mit drei Veränderlichen:

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z, \quad \text{oder} \quad Xp + Yq = Z \qquad (1)$$

anwenden, und zuerſt annehmen, daß ſich die Functionen X, Y, Z auf conſtante Zahlen P, Q, R reduciren, ſo verwandeln ſich die Gleichungen (c) in:

$$Rdx - Pdz = 0, \quad Rdy - Qdz = 0$$

und führen auf die Integrale:

$$Rx - Pz = a_1, \quad Ry - Qz = a_2, \tag{2}$$

ſo daß die gegebene Differenzialgleichung (1) das allgemeine Integral:

$$Rx - Pz = \varphi(Ry - Qz)$$

hat. Dieſe Gleichung charakteriſirt die Familie der cylindriſchen Flächen, und die Gleichungen (2) ſind die der geraden Erzeugungslinien (§. 247).

Wir wollen den Größen X, Y ihre conſtanten Werthe P, Q laſſen und $Z = z$ ſetzen, ſo ſind die zu integrirenden Differenzialgleichungen:

$$Pdy - Qdx = 0, \quad zdx - Pdz = 0,$$

folglich:

$$Py - Qx = a_1, \quad z = a_2 e^{\frac{x}{P}},$$

und folglich bekommt das Integral der gegebenen Differenzialgleichung die Form:

$$z = e^{\frac{x}{P}} \cdot \varphi(Py - Qx). \tag{3}$$

Als letztes Beiſpiel wollen wir endlich die Differenzialgleichung:

$$px + qy = n\sqrt{x^2 + y^2} \tag{4}$$

nehmen, ſo haben wir die Differenzialgleichungen mit zwei veränderlichen Größen:

$$xdz = ndx\sqrt{x^2 + y^2}, \quad xdy - ydx = 0$$

zu integriren. Die zweite gibt $y = a_1 x$, und die erſte verwandelt ſich durch Subſtitution dieſes Werthes von y in:

$$dz = ndx\sqrt{1 + a_1^2}, \text{ folglich: } z = n\sqrt{1 + a_1^2} \cdot x + a_2$$

und wenn man für a_1 ſeinen Werth ſetzt:

$$z - n\sqrt{x^2 + y^2} = a_2.$$

Das geſuchte Integral iſt folglich:

$$z = n\sqrt{x^2 + y^2} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

§. 530. Das Eigenthümliche der vollſtändigen Integrale (d) beſteht darin, daß ſie den Gleichungen (c) unmittelbar genügen, ſo daß die aus den Ableitungen der Gleichungen (d) gezogenen Werthe von du, dx, dy, dz, ꝛc. die Gleichungen (c) identiſch machen, ohne daß man auf die zwiſchen den Veränderlichen, u, x, y, z, ꝛc. durch dieſelben Gleichungen aufgeſtellten Relationen zurückzukommen braucht, und daß die Gleichungen (d) oder ihre Ableitungen den Gleichungen (c) genügen müſſen, was für Werthe man den willkürlichen Conſtanten auch beilegen mag. Umgekehrt, wenn die Gleichungen (c) ſingulare Integrale:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z, t, \ldots u) &= 0 \\ \varphi_2(x, y, z, t, \ldots u) = 0, \ldots \varphi_n(x, y, z, t, \ldots u) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{δ}$$

haben, ſo genügen die Ableitungen derſelben den Gleichungen (c) nur in ſo fern, als man die durch die Gleichungen (δ) ausgedrückten Relationen in

Betracht zieht, oder mit andern Worten, man muß die Gleichungen (δ) mit ihren Ableitungen verbinden, um dem Syſteme der Gleichungen (c) zu genügen.

Hiernach genügt jede der Gleichungen (δ) der Gleichung (b), oder der Gleichung (a), wovon dieſe eine Transformation iſt; aber der Gleichung (b) wird nicht genügt, wenn man für F eine willkürliche Function der Größen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, oder eine willkürliche Function nimmt, worin die Größen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ alle, oder zum Theil mit den Größen $f_1, f_2, \ldots f_n$ alle oder zum Theil verbunden vorkommen. Die Gleichung (a) kann alſo kein anderes vollſtändiges Integral haben, als das, worin die Größen $f_1, f_2, \ldots f_n$ ausſchließlich unter dem Zeichen der willkürlichen Function vorkommen; aber ſie wird durch jede der Gleichungen (δ) erfüllt, und dieſe Gleichungen ſind die ſingulären Integrale der Gleichung (a), weil ſie nicht in dem vollſtändigen Integrale enthalten ſind.

Wir wollen z. B. die lineare Differenzialgleichung der erſten Ordnung mit drei veränderlichen Größen:

$$p - q(\tfrac{1}{2} + x - \sqrt{x^2 + y + z}) = \tfrac{1}{2} - x + \sqrt{x^2 + y + z} \qquad (5)$$

betrachten, deren Integration der der gleichzeitigen Differenzialgleichungen:

$$y' = -\tfrac{1}{2} - x + \sqrt{x^2 + y + z}$$

$$z' = \tfrac{1}{2} - x + \sqrt{x^2 + y + z}$$

ſubordinirt iſt, wofür man:

$$z' = 1 + y', \quad z + y = x(z' + y') + \left(\frac{z' + y'}{2}\right)^2$$

ſetzen kann, deren vollſtändige Integrale:

$$z = x + y + a_1, \quad z + y = 2a_2 x + a_2^2$$

ſind. Das zweite dieſer Integrale führt auf das ſinguläre Integral:

$$x^2 + y + z = 0. \qquad (9)$$

Jede der Gleichungen:

$$z - x - y = a_1, \quad -x + \sqrt{x^2 + y + z} = a_2$$

gibt für p und q Werthe, welche, wenn ſie in die Gleichung (5) ſubſtituirt werden, dieſe Gleichung identiſch machen, und folglich iſt das vollſtändige Integral der Gleichung (5):

$$-x + \sqrt{x^2 + y + z} = \psi(z - x - y),$$

wo ψ eine willkürliche Function bezeichnet. Dagegen gibt die Gleichung (6) für p und q Werthe, welche, wenn ſie in die Gleichung (5) ſubſtituirt werden, dieſer Gleichung nur in ſo fern genügen, wenn man die Gleichung (6) in Betracht zieht, um die in der Gleichung (5) vorkommende Wurzelgröße fortzuſchaffen, ſo daß die Gleichung (6) der gegebenen Gleichung (5) nur nach Art der ſingulären Integrale genügt.

Wenn man die Gleichung (4) auf die gleichbedeutende Form:

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + n\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{dF}{dz} = 0$$

bringt, ſo ergibt ſich ebenſo, daß die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 0,$$

oder das Syſtem der Gleichungen $x = 0$, $y = 0$ ein ſinguläres Integral derſelben iſt.

§. 531. Es ſeien $x, y, z,$ ꝛc. n unabhängige Veränderliche, und $u, v, w,$ ꝛc., $m+1$ Functionen dieſer Veränderlichen, welche dem Syſteme der $m+1$ linearen partiellen Differenzialgleichungen der erſten Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} U &= X\frac{du}{dx}+Y\frac{du}{dy}+Z\frac{du}{dz}+\text{ꝛc.}\\ V &= X\frac{dv}{dx}+Y\frac{dv}{dy}+Z\frac{dv}{dz}+\text{ꝛc.}\\ W &= X\frac{dw}{dx}+Y\frac{dw}{dy}+Z\frac{dw}{dz}+\text{ꝛc.}\\ &\text{ꝛc.}\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

genügen müſſen, worin $U, V, W,$ ꝛc.; $X, Y, Z,$ ꝛc. beliebige Functionen aller abhängigen und unabhängigen Veränderlichen bezeichnen. Ferner ſeien:

$$f_1, f_2, f_3, \ldots f_{m+n}$$

Functionen derſelben Veränderlichen, welche, für F an die Stelle geſetzt, die Gleichung:

$$U\frac{dF}{du}+V\frac{dF}{dv}+W\frac{dF}{dw}+\text{ꝛc.}$$

$$+X\frac{dF}{dx}+Y\frac{dF}{dy}+Z\frac{dF}{dz}+\text{ꝛc.}=0 \qquad (B)$$

identiſch machen, oder vielmehr Functionen von ſolcher Beſchaffenheit, daß das Syſtem der gleichzeitigen Differenzialgleichungen:

$$\frac{du}{U}=\frac{dv}{V}\quad\frac{dw}{W}=\text{ꝛc.}=\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=\text{ꝛc.}$$

die vollſtändigen Integrale:

$$f_1=a_1,\ f_2=a_2,\ f_3=a_3,\ldots f_{m+n}=a_{m+n}$$

habe; ſo hat das Syſtem der Gleichungen (A) die vollſtändigen Integrale:

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_1(f_1,f_2,f_3,\ldots f_{m+n})=0,\ \Phi_2(f_1,f_2,f_3,\ldots f_{m+n})=0,\ldots\\ &\ldots\Phi_{m+n}(f_1,f_2,f_3,\ldots f_{m+n})=0\end{aligned}\right\}, \qquad (\Phi)$$

wo $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{m+1}$ willkürliche Functionen bezeichnen. Von dieſem merkwürdigen Lehrſatze hat Jacobi folgenden Beweis gegeben:

Es bezeichnen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m+1}$ Hülfsgrößen von ſolcher Beſchaffenheit, daß das Verhältniß einer derſelben zu allen übrigen durch das Syſtem der m linearen Differenzialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1\frac{d\Phi_1}{dv}+\lambda_2\frac{d\Phi_2}{dv}+\ldots+\lambda_{m+1}\frac{d\Phi_{m+1}}{dv}=0\\ &\lambda_1\frac{d\Phi_1}{dw}+\lambda_2\frac{d\Phi_2}{dw}+\ldots+\lambda_{m+1}\frac{d\Phi_{m+1}}{dw}=0\\ &\text{ꝛc.}\end{aligned}\right\} \qquad (\lambda)$$

beſtimmt wird, und wir wollen der Kürze wegen:

$$\lambda_1\frac{d\Phi_1}{du}+\lambda_2\frac{d\Phi_2}{du}+\ldots+\lambda_{m+1}\frac{d\Phi_{m+1}}{du}=A \qquad (A)$$

ſetzen; ſo erhalten wir, wenn wir jede der Gleichungen Φ in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche x differenziren:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Phi_1}{dx}+\frac{d\Phi_1}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{d\Phi_1}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{d\Phi_1}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}+\text{ꝛc.}=0\\
&\frac{d\Phi_2}{dx}+\frac{d\Phi_2}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{d\Phi_2}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{d\Phi_2}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}+\text{ꝛc.}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d\Phi_{m+1}}{dx}+\frac{d\Phi_{m+1}}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{d\Phi_{m+1}}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{d\Phi_{m+1}}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}+\text{ꝛc.}=0
\end{aligned}\right\}.\quad(\Phi')$$

Wenn wir die Gleichungen λ resp. mit $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$, ꝛc. und die Gleichung (A) mit $\frac{du}{dx}$ multipliciren, und die Producte zuſammenaddiren, ſo erhalten wir unter Berückſichtigung der Gleichungen (Φ'):

$$\left.\begin{aligned}
&A\frac{du}{dx}=-\left(\lambda_1\frac{d\Phi_1}{dx}+\lambda_2\frac{d\Phi_2}{dx}+\ldots+\lambda_{m+1}\frac{d\Phi_{m+1}}{dx}\right)\\
&\text{und ebenſo würden wir finden:}\\
&A\frac{du}{dy}=-\left(\lambda_1\frac{d\Phi_1}{dy}+\lambda_2\frac{d\Phi_2}{dy}+\ldots+\lambda_{m+1}\frac{d\Phi_{m+1}}{dy}\right)\\
&A\frac{du}{dz}=-\left(\lambda_1\frac{d\Phi_1}{dz}+\lambda_2\frac{d\Phi_2}{dz}+\ldots+\lambda_{m+1}\frac{d\Phi_{m+1}}{dz}\right)\\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}\right\}.\quad(\Phi'_1)$$

Aber da die für F geſetzten Functionen *f* und folglich die Functionen Φ der Gleichung (B) genügen, ſo hat man identiſch:

$$U\frac{d\Phi_1}{du}+V\frac{d\Phi_1}{dv}+\text{ꝛc.}+X\frac{d\Phi_1}{dx}+Y\frac{d\Phi_1}{dy}+\text{ꝛc.}=0$$

$$U\frac{d\Phi_2}{du}+V\frac{d\Phi_2}{dv}+\text{ꝛc.}+X\frac{d\Phi_2}{dx}+Y\frac{d\Phi_2}{dy}+\text{ꝛc.}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U\frac{d\Phi_{m+1}}{du}+V\frac{d\Phi_{m+1}}{dv}+\text{ꝛc.}+X\frac{d\Phi_{m+1}}{dx}+Y\frac{d\Phi_{m+1}}{dy}+\text{ꝛc.}=0.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichungen resp. mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m+1}$ und addirt die Producte zuſammen; ſo erhält man bei Berückſichtigung der Gleichungen (Φ'_1):

$$U=X\frac{du}{dx}+Y\frac{du}{dy}+Z\frac{du}{dz}+\text{ꝛc.},$$

d. h. man kommt auf die erſte des Syſtemes der gegebenen Gleichungen wieder zurück, und ebenſo bewieſe man, daß alle übrigen dieſer Gleichungen verificirt werden.

II. Ueber die Integration der nicht linearen Differenzialgleichungen der erſten Ordnung mit drei veränderlichen Größen.

§. 532. Die für die Integration der linearen Differenzialgleichungen der erſten Ordnung aus einander geſetzte Methode iſt von Lagrange auf beliebige Differenzialgleichungen der erſten Ordnung, aber blos von drei veränderlichen Größen erſtreckt. Es ſei:

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (f)$$

eine Differenzialgleichung dieſer Form, welche wir ſucceſſive in Beziehung auf jede der unabhängigen Veränderlichen x, y differenziren wollen; ſo erhalten wir unter Berückſichtigung der Bedingungsgleichung $\frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dy}$:

$$\left.\begin{aligned} -p\frac{df}{dz} - \frac{df}{dx} &= \frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} + \frac{df}{dq}\cdot\frac{dp}{dy} \\ -q\frac{df}{dz} - \frac{df}{dy} &= \frac{df}{dp}\cdot\frac{dq}{dx} + \frac{df}{dq}\cdot\frac{dq}{dy} \end{aligned}\right\}, \qquad (f_1)$$

und wenn wir hiermit die identiſche Gleichung:

$$p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq} = \frac{df}{dp}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{df}{dq}\cdot\frac{dz}{dy} \qquad (f_2)$$

verbinden, ſo haben wir ein Syſtem von drei Gleichungen, zwiſchen den beiden unabhängigen Veränderlichen x, y und den drei als Functionen derſelben betrachteten Veränderlichen z, p, q, welches dieſelbe Form hat, als das Syſtem (A) im vorhergehenden §. Die Integration der drei partiellen Differenzialgleichungen (f_1) und (f_2) iſt alſo von der der vier gewöhnlichen Differenzialgleichungen:

$$\left(p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}\right)\cdot\frac{dx}{dz} = \frac{df}{dp}, \quad \left(p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}\right)\cdot\frac{dy}{dz} = \frac{df}{dq}, \qquad (g)$$

$$\left(p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}\right)\cdot\frac{dp}{dz} = -p\frac{df}{dz} - \frac{df}{dx} \qquad (g_1)$$

$$\left(p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}\right)\cdot\frac{dq}{dz} = -q\frac{df}{dz} - \frac{df}{dy} \qquad (g_2)$$

abhängig, und aus dieſen vier Gleichungen folgt:

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \frac{df}{dp}dp + \frac{df}{dq}dq = 0,$$

was auch der Fall ſein muß, weil die Veränderlichen x, y, z, p, q durch die Gleichung (f) mit einander verbunden ſind. Alsdann braucht man nur die drei Gleichungen (g) und (g_1) zu betrachten, welche nur die Veränderlichen x, y, z, p enthalten, nachdem man für q ſeinen aus der Gleichung (f) abgeleiteten Werth als Function von x, y, z, p ſubſtituirt hat. Wenn wir ihre vollſtändigen Integrale durch:

$$f_1(x, y, z, p) = a_1, \quad f_2(x, y, z, p) = a_2, \quad f_3(x, y, z, p) = a_3 \qquad (h)$$

bezeichnen, ſo iſt die gegebene Gleichung (f), verbunden mit den folgenden:

$$\Phi_1(f_1, f_2, f_3) = 0, \quad \Phi_2(f_1, f_2, f_3) = 0, \qquad (H)$$

worin Φ_1, Φ_2 willkürliche Functionen bezeichnen, das Syſtem der allgemeinen Integrale der Gleichungen (g), (g_1). Aber die Allgemeinheit dieſer Auflöſung muß beſchränkt werden, weil die Functionen p, q den partiellen Differenzialgleichungen:

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}$$

oder der totalen Differenzialgleichung:

$$dz = pdx + qdy \qquad (i)$$

genügen müſſen.

§. 533. Aus den Gleichungen (f) und (h) kann man die Ausdrücke von x, y, p, q als Functionen von z, a_1, a_2, a_3 oder von z, f_1, f_2, f_3 ableiten, und wenn man die Größen x, y, p, q aus der Gleichung (i) fortſchafft, ſo erhält man die Relation zwiſchen f_1, f_2, f_3, welcher die Gleichungen (H) genügen müſſen, um als Integrale der gegebenen Gleichung betrachtet werden zu können.

Betrachtet man nun x, y, p, q als Functionen von z, f_1, f_2, f_3, ſo verwandelt ſich die Gleichung (i) in:

$$dz = \left(p\frac{dx}{dz} + q\frac{dy}{dz}\right)dz + \left(p\frac{dx}{df_1} + q\frac{dy}{df_1}\right)df_1 + \left(p\frac{dx}{df_2} + q\frac{dy}{df_2}\right)df_2 + \left(p\frac{dx}{df_3} + q\frac{dy}{df_3}\right)df_3.$$

Aber vermöge der Gleichungen (g) hat man:

$$p\frac{dx}{dz} + q\frac{dy}{dz} = 1, \qquad (k)$$

ſo daß ſich die vorhergehende Gleichung auf:

$$P_1 df_1 + P_2 df_2 + P_3 df_3 = 0 \qquad (l)$$

reducirt, wenn man der Kürze wegen

$$\left.\begin{aligned} p\frac{dx}{df_1} + q\frac{dy}{df_1} = P_1, \quad p\frac{dx}{df_2} + q\frac{dy}{df_2} = P_2 \\ p\frac{dx}{df_3} + q\frac{dy}{df_3} = P_3 \end{aligned}\right\} \qquad (m)$$

ſetzt.

Ferner hat man:

$$\frac{dP_1}{dz} = \frac{d\left(p\frac{dx}{dz} + q\frac{dy}{dz}\right)}{df_1} + \frac{dp}{dz}\cdot\frac{dx}{df_1} + \frac{dq}{dz}\cdot\frac{dy}{df_1} - \left(\frac{dp}{df_1}\cdot\frac{dx}{dz} + \frac{dq}{df_1}\cdot\frac{dy}{dz}\right),$$

oder wegen der Gleichung (k) einfacher:

$$\frac{dP_1}{dz} = \frac{dp}{dz}\cdot\frac{dx}{df_1} + \frac{dq}{dz}\cdot\frac{dy}{df_1} - \left(\frac{dp}{df_1}\cdot\frac{dx}{dz} + \frac{dq}{df_1}\cdot\frac{dy}{dz}\right),$$

und wenn man in dem zweiten Theile dieſer Gleichung für:

$$\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, \frac{dp}{dz}, \frac{dq}{dz}$$

ihre aus den Gleichungen (g), (g_1) und (g_2) gezogenen Werthe ſubſtituirt, und außerdem der Kürze wegen

$$p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq} = P$$

ſetzt, ſo erhält man:

$$\frac{dP_1}{dz} = -\frac{df}{dz}\cdot\frac{P_1}{P} - \left(\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{df_1} + \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{df_1} + \frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{df_1} + \frac{df}{dq}\cdot\frac{dq}{df_1}\right)$$
$$= -\frac{df}{dz}\cdot\frac{P_1}{P} - \frac{df}{df_1}.$$

Aber nachdem man in die Function f für x, y, p, q ihre Werthe als Functionen von z, f_1, f_2, f_3, welche der gegebenen Gleichung genügen, substituirt hat, hat man identisch $f = 0$; folglich reducirt sich die vorhergehende Gleichung auf:

$$\frac{1}{P_1} \cdot \frac{dP_1}{dz} = -\frac{1}{P} \cdot \frac{df}{dz},$$

und aus demselben Grunde hat man:

$$\frac{1}{P_2} \cdot \frac{dP_2}{dz} = -\frac{1}{P} \cdot \frac{df}{dz}, \quad \frac{1}{P_3} \cdot \frac{dP_3}{dz} = -\frac{1}{P} \cdot \frac{df}{dz},$$

woraus folgt, wenn man integrirt, und durch F_1, F_2, F_3 Functionen von f_1, f_2, f_3 bezeichnet, welche die Veränderliche z nicht mehr enthalten:

$$P_1 = F_1 e^{-\int \frac{1}{P} \cdot \frac{df}{dz} dz}, \quad P_2 = F_2 e^{-\int \frac{1}{P} \cdot \frac{df}{dz} dz}, \quad P_3 = F_3 e^{-\int \frac{1}{P} \cdot \frac{df}{dz} dz}.$$

Die mit der Gleichung (i) gleichbedeutende Gleichung (l) reducirt sich folglich nach der Hinweglassung des gemeinschaftlichen Factors auf:

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + F_3 df_3 = 0. \qquad (n)$$

Wenn die Functionen f_1, f_2, f_3 durch die Gleichungen (h) bestimmt sind, so sind die Functionen P_1, P_2, P_3 vermöge der Gleichungen (m) bekannt und durch die Hinweglassung des gemeinschaftlichen Factors mit z, dessen Existenz eben bewiesen ist, ergibt sich ebenso die Zusammensetzung der Functionen F_1, F_2, F_3 aus f_1, f_2, f_3. Alsdann läßt sich die totale Differenzialgleichung (n) immer durch das System zweier Gleichungen mit einer willkürlichen Function einer der Größen f_1, f_2, f_3 und mit der Ableitung dieser willkürlichen Function integriren, und auf diese Weise erhält man das System aller particulären Integrale, oder das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

§. 534. Aber man kann dazu auch kürzer gelangen; denn die Gleichung $f_1 = a_1$ ist offenbar eine particuläre Auflösung der Gleichung (n). Die Auflösung dieser Gleichung, worin a_1 eine Constante und f_1 eine bekannte Function von x, y, z, p bezeichnet, gibt:

$$p = \varphi(x, y, z, a_1),$$

und alsdann hat man vermöge der Gleichung (f):

$$q = \psi(x, y, z, a_1).$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (i) substituirt, so machen sie den zweiten Theil derselben zu einem genauen Differenziale, weil sie eine Auflösung der gegebenen Differenzialgleichung geben müssen. Wenn man also die Differenzialgleichung:

$$dz = \varphi(x, y, z, a_1) \cdot dx + \psi(x, y, z, a_1) \cdot dy$$

nach der bekannten Methode (§. 393) integrirt, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, z, a_1, a_2) = 0, \qquad (o)$$

wo a_2 eine durch die neue Integration eingeführte andere Constante ist, und diese Gleichung mit zwei willkürlichen Constanten leistet der gegebenen Gleichung, wovon sie ein particuläres Integral ist, Genüge.

Folglich ist die Gleichung:

$$F(x, y, z, a_1, \omega a_1) = 0, \qquad (\omega)$$

wo ω eine willkürliche Function bezeichnet, auch ein Integral der gegebenen Differenzialgleichung, welche ebenfalls erfüllt wird, wenn man a_1 durch die Gleichung:

$$\frac{dF}{da_1} + \frac{dF}{d\omega} \cdot \omega' a_1 = 0 \qquad (\omega')$$

als Function von x, y, z bestimmt. Das System der Gleichungen (ω) und (ω') drückt also wegen der darin vorkommenden willkürlichen Function (ω) das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung aus, und jedes particuläre Integral wird daraus durch Elimination von a_1 zwischen diesen beiden Gleichungen, nachdem man die willkürliche Function ω particularisirt hat, abgeleitet.

Nach der Theorie der Umhüllung krummer Flächen (Buch 4. Kap. 8) ist klar, daß die Gleichung (ω) die Gleichung der umschlossenen Flächen ist, welche die Eigenschaft haben, der gegebenen Differenzialgleichung Genüge zu leisten, während die Umhüllungsflächen, welche derselben wegen der Unbestimmtheit der zwischen den beiden veränderlichen Parametern der umschlossenen Fläche auf eine allgemeinere Weise Genüge leisten, durch das System der Gleichungen (ω), (ω') ausgedrückt werden.

Die Familien der durch partielle Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit drei Veränderlichen charakterisirten Flächen zerfallen also in zwei Gruppen. Die erste Gruppe enthält die Flächen, deren charakteristische Differenzialgleichung in Beziehung auf die Coefficienten p, q linear ist, so daß das allgemeine Integral durch eine einzige Gleichung mit einer willkürlichen Function gegeben wird und die Fläche durch die Bewegung einer Erzeugungslinie entsteht, welche während ihres Fortrückens zugleich ihre Form verändern kann. Die andere Gruppe enthält die Flächen, deren partielle Differenzialgleichung keine lineare ist, woraus einerseits folgt, daß das allgemeine Integral durch das System zweier Gleichungen gegeben wird, worin zugleich die willkürliche Function und ihre Ableitung vorkommt, und andererseits, daß die Flächen, welche sie ausdrückt, als ebenso viele Umhüllungsflächen betrachtet werden können. Je nachdem die gleichzeitigen Differenzialgleichungen, auf deren Integration die der gegebenen partiellen Differenzialgleichung zurückgeführt wird, algebraische Integrale haben oder nicht, sind auch die erzeugenden oder characteristischen Linien algebraische Curven oder nicht; allein durch diesen Nebenumstand wird an der in Rede stehenden Eintheilung nichts geändert.

§. 535. Wir wollen die vorhergehende Analyse auf die partielle Differenzialgleichung:

$$z^2(1 + p^2 + q^2) - R^2 = 0$$

anwenden, welche die Gleichung der Kanalflächen mit constantem kreisförmigen Durchschnitte ist (§. 261), so verwandelt sich die Gleichung (ε_1) für diesen Fall in:

$$z^2(p^2 + q^2)\frac{dp}{dz} = -pz(1 + p^2 + q^2),$$

und durch ihre Verbindung mit der gegebenen Gleichung ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{dp}{p} + \frac{R^2 dz}{z(R^2 - z^2)} = 0,$$

deren Integral:

$$p^2 = \frac{\alpha^2(R^2 - z^2)}{z^2}$$

iſt, wo α^2 eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Die gegebene Gleichung gibt alsdann:

$$q^2 = \frac{(1-\alpha^2)(R^2 - z^2)}{z^2},$$

und die Gleichung (i) verwandelt ſich in:

$$\frac{z\,dz}{\sqrt{R^2 - z^2}} = \alpha\,dx + \sqrt{1-\alpha^2}\cdot dy,$$

woraus folgt, wenn man integrirt und durch β eine neue willkürliche Conſtante bezeichnet:

$$-\sqrt{R^2 - z^2} = \alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}\cdot y + \beta.$$

Wenn wir, wie es erlaubt iſt, die Conſtanten verändern und

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = a, \quad -\frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}} = b$$

ſetzen, ſo nimmt die vorhergehende Gleichung die Form an:

$$R^2 - z^2 = \frac{(y - ax - b)^2}{1 + a^2}$$

und gehört zu einem geraden Cylinder, welcher die für die Kanalflächen mit conſtantem kreisförmigen Durchſchnitte abwickelbare eingehüllte Fläche bildet.

§. 536. Es wird nicht unnütz ſein, einige beſondere Fälle anzuführen, worin man das Integral ſchneller, als nach der allgemeinen Methode erhalten kann. Es ſei z. B.:

$$p = \Pi q$$

die gegebene Gleichung, welche einer durch die Form der gegebenen Function Π charakteriſirten Familie abwickelbarer Flächen angehört (§. 245 und §. 266), ſo hat man:

$$dz = \Pi q \cdot dx + q\,dy,$$

und wenn man theilweiſe integrirt:

$$z = x\Pi q + qy - \int (x\Pi' q + y)\,dq.$$

Damit die angezeigte Integration möglich wird, muß man:

$$x\Pi' q + y = \varphi' q$$

ſetzen, und alsdann hat man:

$$z = x\Pi q + qy - \varphi q.$$

Das Syſtem der Gleichungen:

$$z = x\Pi\alpha + \alpha y - \varphi\alpha, \quad x\Pi'\alpha + y = \varphi'\alpha$$

mit der unbeſtimmten Conſtante α, der willkürlichen Function φ und ihrer Ableitung φ' drückt alſo das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung aus.

Es ſei ferner die Gleichung gegeben:

$$f(p, x) = f(q, y),$$

ſo kann man ſetzen:

$$f(p, x) = \alpha = f(q, y),$$

woraus folgt:

$$p = f_1(x, \alpha), \quad q = f_1(y, \alpha)$$
$$dz = f_1(x, \alpha)dx + f_1(y, \alpha)dy.$$

Die theilweiſe Integration gibt:

$$z = X + Y - \int \left(\frac{dX}{d\alpha} + \frac{dY}{d\alpha}\right) d\alpha,$$

wenn man der Kürze wegen:

$$X = \int f_1(x, \alpha)dx, \quad Y = \int f_1(y, \alpha)dy$$

ſetzt. Das allgemeine Integral beſteht folglich in dem Syſteme der beiden Gleichungen:

$$z = X + Y - \varphi\alpha, \quad \frac{dX}{d\alpha} + \frac{dY}{d\alpha} = \varphi'\alpha,$$

wo φ eine willkürliche Function bezeichnet.

Wenn man endlich die Differenzialgleichung:

$$z^2 - pq = 0$$

hätte, ſo ginge ſchon aus der Form derſelben hervor, daß ſie das particuläre Integral:

$$z = \beta e^{\alpha x + \frac{y}{\alpha}}$$

hätte, wo α, β willkürliche Conſtanten bezeichnen, und folglich wird das allgemeine Integral durch das Syſtem der Gleichungen:

$$z = \varphi\alpha \cdot e^{\alpha x + \frac{y}{\alpha}}, \quad 0 = \varphi'\alpha + \left(x - \frac{y}{\alpha^2}\right)\varphi\alpha$$

gegeben.

§. 537. Wir haben bisher die Lagrange'ſche Methode zur Integration der partiellen Differenzialgleichungen der erſten Ordnung mit den Vervollkommnungen derſelben von Jacobi aus einander geſetzt. Wenn die Differenzialgleichung in Beziehung auf die partiellen Differenziale keine lineare, und die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen größer als zwei iſt, ſo läßt ſich die allgemeine Integration der partiellen Differenzialgleichungen noch, aber durch complicirtere Methoden, auf die Integration eines oder mehrerer Syſteme gewöhnlicher Differenzialgleichungen zurückführen. Ueber dieſen Gegenſtand kann man die Abhandlung von Pfaff in dem Bande der Abhandlungen der Berliner Akademie für das Jahr 1814, Crelle's Journal der Math. Bd. 2 und Bd. 13, und Liouville's Journal Bd. 3, wo man die neueren und ſchönern Unterſuchungen von Jacobi, welche außerhalb der Grenzen der Elemente liegen, findet, zu Rathe ziehen.

Drittes Kapitel.

Ueber die Integration der partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnungen mit drei Veränderlichen unter endlicher Form. — Bemerkungen über die singulären und particulären Integrale der partiellen Differenzialgleichungen.

I. Von der Integration der partiellen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung mit drei Veränderlichen.

§. 538. Betrachten wir zunächst die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$Rr + Ss + Tt = V,$$

welche in Beziehung auf die Ableitungen der zweiten Ordnung r, s, t linear ist und wo R, S, T, V beliebige Functionen der Veränderlichen x, y, z und der Ableitungen p, q bezeichnen, so gibt die Elimination von r, t vermittelst der Gleichungen:

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy \tag{a}$$

die Gleichung:

$$Rdpdy + Tdqdx - Vdxdy = s(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2).$$

Wir wollen einzeln:

$$Rdpdy + Tdqdx - Vdydx = 0, \tag{b}$$

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0 \tag{c}$$

setzen, mit diesen Gleichungen die Gleichung:

$$dz = pdx + qdy \tag{d}$$

verbinden und annehmen, daß man diesen drei Gleichungen zwischen den fünf Veränderlichen x, y, z, p, q durch Gleichungen von der Form:

$$f_1(x, y, z, p, q) = a_1, \quad f_2(x, y, z, p, q) = a_2 \tag{e}$$

genügen kann; so genügt die Gleichung:

$$f_2 = \varphi f_1 \tag{f}$$

der gegebenen Differenzialgleichung, wovon sie ein Integral der ersten Ordnung ist, und wegen der Unbestimmtheit des Zeichens φ hat dieses Integral alle erforderliche Allgemeinheit.

Zur Nachweisung dieses Satzes wollen wir die Gleichung (c) auf die Form:

$$Ry'^2 - Sy' + T = 0 \tag{c$_1$}$$

bringen und eine ihrer Wurzeln mit y'_1 bezeichnen; so verwandelt sich die Gleichung (b) in:

$$Ry'_1 dp + Tdq - Vy'_1 dx = 0. \tag{b$_1$}$$

Die Ableitungen der Gleichungen (e) sind:

$$\frac{df_1}{dx}dx+\frac{df_1}{dy}dy+\frac{df_1}{dz}dz+\frac{df_1}{dp}dp+\frac{df_1}{dq}dq=0,$$

$$\frac{df_2}{dx}dx+\frac{df_2}{dy}dy+\frac{df_2}{dz}dz+\frac{df_2}{dp}dp+\frac{df_2}{dq}dq=0,$$

oder, wenn man $y'_1 dx$ für dy setzt und dz, dq vermittelst der Gleichungen (d) und (b_1) fortschafft:

$$\left[\frac{df_1}{dx}+y'_1\frac{df_1}{dy}+(p+qy'_1)\frac{df_1}{dz}+\frac{Vy'_1}{T}\cdot\frac{df_1}{dq}\right]dx$$
$$+\left(\frac{df_1}{dp}-\frac{Ry'_1}{T}\cdot\frac{df_1}{dq}\right)dp=0,$$

$$\left[\frac{df_2}{dx}+y'_1\frac{df_2}{dy}+(p+qy'_1)\frac{df_2}{dz}+\frac{Vy'_1}{T}\cdot\frac{df_2}{dq}\right]dx$$
$$+\left(\frac{df_2}{dp}-\frac{Ry'_1}{T}\cdot\frac{df_2}{dq}\right)dp=0.$$

Diese letzten Gleichungen müssen identisch sein, weil nach der Voraussetzung die Gleichungen (e) das System der Gleichungen (b), (c), (d) verificiren, und es ist folglich einzeln:

$$\left.\begin{aligned}\frac{df_1}{dx}+y'_1\frac{df_1}{dy}+(p+qy'_1)\frac{df_1}{dz}+\frac{Vy'_1}{T}\cdot\frac{df_1}{dq}&=0\\ \frac{df_1}{dp}-\frac{Ry'_1}{T}\cdot\frac{df_1}{dq}&=0\\ \frac{df_2}{dx}+y'_1\frac{df_2}{dy}+(p+qy'_1)\frac{df_2}{dz}+\frac{Vy'_1}{T}\cdot\frac{df_2}{dq}&=0\\ \frac{df_2}{dp}-\frac{Ry'_1}{T}\cdot\frac{df_2}{dq}&=0\end{aligned}\right\}. \qquad (e')$$

Andererseits gibt die Gleichung (f):

$$\frac{df_2}{dx}dx+\frac{df_2}{dy}dy+\frac{df_2}{dz}dz+\frac{df_2}{dp}dp+\frac{df_2}{dq}dq$$
$$=\left(\frac{df_1}{dx}dx+\frac{df_1}{dy}dy+\frac{df_1}{dz}dz+\frac{df_1}{dp}dp+\frac{df_1}{dq}dq\right)\cdot\varphi' f_1,$$

und diese verwandelt sich, wenn man für:

$$dz,\ \frac{df_1}{dx},\ \frac{df_1}{dp},\ \frac{df_2}{dx},\ \frac{df_2}{dp}$$

ihre aus den Gleichungen (d) und (e') gezogenen Werthe setzt, in:

$$Ry'_1dp+Tdq-Vy'_1dx=(dy-y'_1dx)\Phi, \qquad (g)$$

wenn man der Kürze wegen:

$$\Phi=-\left[\frac{df_2}{dy}+q\frac{df_2}{dz}-\left(\frac{df_1}{dy}+q\frac{df_1}{dz}\right)\cdot\varphi' f_1\right]:\frac{1}{T}\left(\frac{df_2}{dq}-\frac{df_1}{dq}\cdot\varphi' f_1\right)$$

setzt. Wenn wir für dp, dq ihre aus den Gleichungen (a) abgeleiteten Werthe in die Gleichung (g) wieder setzen; so erhalten wir:

$$(Ry'_1r+Ts-Vy'_1+\Phi y'_1)dx+(Ry'_1s+Tt-\Phi)dy=0,$$

und da die Veränderlichen x, y unabhängig sind, so muß einzeln:

$$Ry'_1 r + Ts - Vy'_1 + \Phi y'_1 = 0, \quad Ry'_1 s + Tt - \Phi = 0$$

sein. Aber hieraus folgt, daß die Gleichung (g) der gegebenen Gleichung Genüge leistet, welche Form die nur in Φ vorkommende Function φ auch haben mag. Denn wenn man aus den vorhergehenden Gleichungen die Werthe von r, t als Functionen von s ableitet, um sie in die gegebene Gleichung zu substituiren, so verschwindet Φ und es bleibt die Gleichung:

$$s(Ry'^2_1 - Sy'_1 + T) = 0,$$

welche identisch ist, weil y'_1 eine Wurzel der Gleichung (c_1) bezeichnet.

§. 539. Um diese Rechnung durch einige Beispiele zu erläutern, wollen wir zuvörderst annehmen, daß sich die Coefficienten R, S, T auf Constanten reduciren, und daß V = 0 ist; so sind auch die Wurzeln der Gleichung (c_1) constante Zahlen m_1, m_2, und wenn man die erste dieser Wurzeln anwendet, so erhält man für die Integrale der Gleichungen (b) und (c):

$$y - m_1 x = a_1, \quad Rm_1 p + Tq = a_1,$$

woraus folgt, daß das erste Integral der gegebenen Differenzialgleichung ist:

$$Rm_1 p + Tq = \varphi_1 (y - m_1 x).$$

Ebenso gäbe die Anwendung der Wurzel m_2:

$$Rm_2 p + Tq = \varphi_2 (y - m_2 x).$$

Wegen der Relation $m_1 m_2 = \frac{T}{R}$ lassen sich diese beiden ersten Integrale auf die Form:

$$\left.\begin{aligned} p + m_2 q &= \frac{1}{Rm_1} \cdot \varphi_1 (y - m_1 x) \\ p + m_1 q &= \frac{1}{Rm_2} \cdot \varphi_2 (y - m_2 x) \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

bringen, woraus:

$$p = m_2 \psi (y - m_2 x) - m_1 \varphi (y - m_1 x)$$
$$q = \varphi (y - m_1 x) - \psi (y - m_2 x),$$

wo der Kürze wegen:

$$\frac{\varphi_1 (y - m_1 x)}{Rm_1 (m_2 - m_1)} = \varphi (y - m_1 x), \quad \frac{\varphi_2 (y - m_2 x)}{Rm_2 (m_2 - m_1)} = \psi (y - m_2 x)$$

gesetzt ist. Substituirt man diese Werthe von p, q in die Gleichung (d), so kommt:

$$dz = (dy - m_1 dx) \cdot \varphi (y - m_1 x) - (dy - m_2 dx) \cdot \psi (y - m_2 x),$$

woraus folgt, wenn man integrirt und durch Φ, Ψ Functionen bezeichnet, deren Ableitungen die willkürlichen Größen φ, $-\psi$ sind:

$$z = \Phi (y - m_1 x) + \Psi (y - m_2 x). \quad (i)$$

Die in diesem Integrale der gegebenen Differenzialgleichung vorkommenden willkürlichen Functionen geben demselben alle erforderliche Allgemeinheit.

Es sei:

$$S = 0, \quad \frac{T}{R} = -a^2,$$

so verwandelt sich die gegebene Differenzialgleichung in:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2 \frac{d^2z}{dy^2}, \qquad (1)$$

und ihr vollständiges Integral ist:

$$z = \Phi(y - ax) + \Psi(y + ax). \qquad (2)$$

Die Gleichung (1), welche das Gesetz der Transversalschwingungen einer elastischen Saite und das der Fortpflanzung des Schalles in einer cylindrischen Röhre ausdrückt, ist die erste partielle Differenzialgleichung, deren allgemeines Integral man gefunden hat. Die Untersuchungen der Geometer über die Integration dieser Gleichung, worauf wir in dem folgenden Kapitel zurückkommen werden, haben die mathematische Physik begründet und einen neuen Zweig der Analysis hervorgerufen.

Wenn das Glied V nicht Null wäre und blos die unabhängige Veränderliche x enthielte, so müßte man zu den ersten Theilen der Gleichungen (h) das Glied $-\frac{1}{R}\int V dx$ addiren, und statt der Gleichung (i) hätte man alsdann:

$$z = \frac{1}{R}\int dx \int V dx + \Phi(y - m_1 x) + \Psi(y - m_2 x).$$

§. 540. Diese Analyse muß in dem Falle modificirt werden, wo das Glied V die beiden Veränderlichen x, y zugleich enthält, so wie in dem Falle, wo die Wurzeln m_1, m_2 einander gleich sind, so daß die beiden willkürlichen Functionen Φ, Ψ in eine einzige zusammenfallen, und der Werth von z nicht mehr die erforderliche Allgemeinheit hat. Betrachten wir zunächst den ersten Fall, so ist das eine der ersten Integrale:

$$p + m_2 q - \frac{1}{R}\int V dx = \frac{1}{Rm_1} \cdot \varphi_1(y - m_1 x) = \varphi(y - m_1 x).$$

Das Integral $\int V dx$ ist in der Voraussetzung genommen, daß:

$$dy - m_1 dx = 0, \quad \text{folglich} \quad y - m_1 x = \alpha_1$$

ist, so daß man zuerst diesen Werth von y in V substituiren, hierauf in Beziehung auf x integriren und dann für α_1 seinen Werth $y - m_1 x$ setzen muß, wodurch man erhält:

$$\frac{1}{R}\int V dx = f(x, y - m_1 x),$$

wo f eine bekannte Function ist, welche sich durch eine einfache Quadratur aus V ergibt.

Substituirt man den Werth von p, so erhält man folglich die Gleichung:

$$dz = q(dy - m_2 dx) + f(x, y - m_1 x) \cdot dx + \varphi(y - m_1 x) \cdot dx,$$

welche sich integriren läßt, wenn man die beiden gewöhnlichen Differenzialgleichungen:

$$dy - m_2 dx = 0$$

$$dz = [f(x, y - m_1 x) + \varphi(y - m_1 x)]\, dx,$$

zugleich integriren kann.

Die erste gibt den Ausdruck:

$$y - m_2 x = \alpha_2, \qquad (k)$$

in Folge dessen sich die zweite in:

$$dz = \{f[x, \alpha_2 + (m_2 - m_1)x] + \varphi[\alpha_2 + (m_2 - m_1)x]\}dx \qquad (l)$$

verwandelt, und das Integral derſelben iſt:

$$z - F(x, \alpha_2) - \Phi[\alpha_2 + (m_2 - m_1)x] = \beta_2, \qquad (m)$$

wo β_2 eine willkürliche Conſtante, Φ eine willkürliche Function und F eine bekannte Function bezeichnet, welche ſich durch eine Quadratur aus f ableiten läßt. Das Integral der gegebenen Differenzialgleichung iſt $\beta_2 = \Psi\alpha_2$, wo man für α_2, β_2 ihre durch die Gleichungen (k), (m) gegeben Werthe ſubſtituiren muß, und wodurch man erhält:

$$z = F(x, y - m_2x) + \Phi(y - m_1x) + \Psi(y - m_2x).$$

§. 541. Betrachten wir nun den Fall, wo die Wurzeln m_1, m_2 einander gleich ſind, und nehmen der Einfachheit wegen $V = 0$ an, ſo haben wir, indem wir die jetzt überflüſſigen Indices hinweglaſſen:

$$y - mx = \alpha, \quad dy = mdx, \quad p + mq = \varphi(y - mx) = \varphi\alpha,$$

und die Gleichung (d) verwandelt ſich in:

$$dz = \varphi\alpha \cdot dx, \quad \text{und folglich} \quad z - x\varphi\alpha = \beta,$$

ſo daß die Relation $\beta = \psi\alpha$ zum Integrale:

$$z = x\varphi(y - mx) + \psi(y - mx) \qquad (n)$$

gibt, und da die willkürlichen Functionen φ, ψ nicht mehr in eine einzige zuſammenfallen, ſo hat dieſes Integral die erforderliche Allgemeinheit.

Dieſes iſt auf die Gleichung:

$$B^2r - 2ABs + A^2t = 0$$

anwendbar, welche die Regelflächen ausdrückt, deren Erzeugungslinie ſtets zu einer Ebene $Ax + By = 0$ parallel bleibt (§. 251) und das vollſtändige Integral iſt:

$$z = x\varphi(Ax + By) + \psi(Ax + By).$$

Die partielle Differenzialgleichung derſelben Flächen iſt, wenn die Richtebene die der xy iſt:

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0.$$

Die Gleichungen (c) und (b) werden alsdann:

$$pdx + qdy = dz = 0, \quad qdp - pdq = 0,$$

und wenn man ſie integrirt, ſo erhält man $z = \alpha$, $p = \beta q$, ſo daß das erſte Integral der gegebenen Differenzialgleichung $p = q\varphi z$ iſt. Um das zweite Integral zu erhalten, ſubſtituirt man dieſen Werth von p in die Gleichung (d), wodurch man die Gleichung:

$$dz = q(\varphi z \cdot dx + dy)$$

erhält, deren Integration ſich auf die der gewöhnlichen Differenzialgleichungen:

$$dz = 0, \quad \varphi z \cdot dx + dy = 0$$

zurückführen läßt; aber die Integrale dieſer Gleichungen ſind $z = \alpha_1$, $x\varphi\alpha_1 + y = \beta_1$, ſo daß das zweite Integral der gegebenen Differenzialgleichung iſt:

$$x\varphi z + y = \psi z. \qquad (o)$$

§. 542. Endlich haben wir im §. 250 für die partielle Differenzialgleichung der Regelflächen mit geraden Richtlinien gefunden:

$$x^2r + 2xys + y^2t = 0.$$

Die Gleichungen (c) und (b) werden in dieſem Falle:

$$xdy - ydx = 0, \quad xdp + ydq = 0$$

und ihre Integrale ſind $y = \alpha x$, $p + \alpha q = \beta$, woraus ſich:

$$p + q \cdot \frac{y}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

als das erſte Integral der gegebenen Differenzialgleichung ergibt. Subſtituirt man, wie gewöhnlich, den Werth von p in die Gleichung (d), ſo hat man:

$$dz = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \cdot dx + q\left(dy - \frac{y}{x}dx\right),$$

was auf die Integration der Differenzialgleichungen:

$$xdy - ydx = 0, \quad dz - \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \cdot dx = 0$$

führt. Dieſe Integration gibt $y = \alpha_1 x$, $z - x\varphi\alpha_1 = \beta_1$, und man erhält folglich für das zweite Integral der gegebenen Differenzialgleichung:

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (p)$$

Zu bemerken iſt die Aehnlichkeit der Form der Gleichungen (n), (o), (p), welche ſich alle auf den Fall der Gleichheit der Wurzeln der Gleichung (c_1) beziehen.

§. 543. Die im Vorhergehenden nach Monge aus einander geſetzte Integrationsmethode, wovon wir eben verſchiedene Anwendungen mitgetheilt haben, wird unbrauchbar, wenn das Syſtem der Gleichungen (b), (c), (d), worin im Allgemeinen die fünf veränderlichen Größen x, y, z, p, q vorkommen, und welches man durch Elimination auf eine Differenzialgleichung zwiſchen drei veränderlichen Größen zurückführt, den Bedingungen der Integrabilität nicht genügt. Es ſei z. B. die Differenzialgleichung:

$$r - t - \frac{2p}{x} = 0 \qquad (q)$$

gegeben, ſo verwandeln ſich die Gleichungen (c) und (b) für $m_1 = \pm 1$ in:

$$dy \mp dx = 0, \quad dp \mp dq - \frac{2pdx}{x} = 0;$$

aber die Gleichung mit dp, dq, dx erfüllt die Bedingung der Integrabilität nicht (§. 523), was für ein Zeichen man auch nehmen mag. Jedoch iſt das Integral der Gleichung (q) unter endlicher Form:

$$z = \varphi(y + x) + \psi(y - x) - x[\varphi'(y + x) - \psi'(y - x)],$$

wie man ſich leicht a posteriori überzeugen kann, und die Theorie der Conſtruction der partiellen Differenzialgleichungen zeigt, daß dieſes Integral wegen der beiden Zeichen der willkürlichen Functionen φ, ψ die erforderliche Allgemeinheit hat.

II. Von der Integration der linearen partiellen Differenzialgleichungen mit drei veränderlichen Größen und von einer beliebigen Ordnung.

§. 544. Von den partiellen Differenzialgleichungen einer höhern als der zweiten Ordnung wollen wir hier blos die linearen Gleichungen mit drei veränderlichen Größen:

$$A\frac{d^n z}{dx^n} + B\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} + C\frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2} + \ldots .$$

$$\ldots . + G\frac{d^n z}{dxdy^{n-1}} + H\frac{d^n z}{dy^n} = 0$$

betrachten, wo A, B, C, ... G, H conſtante Coefficienten bezeichnen. Wir wollen $z = \varphi(y + mx)$ ſetzen, ſo kommt:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = m^n \varphi^{(n)}(y + mx), \frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} = m^{n-1}\varphi^{(n)}(y + mx), \text{ ꝛc.}$$

und der gegebenen Gleichung geſchieht Genüge, wenn die Conſtante m eine der n Wurzeln $m_1, m_2, \ldots m_n$ der algebraiſchen Gleichung:

$$Am^n + Bm^{n-1} + Cm^{n-2} + \ldots\ldots + Gm + H = 0 \qquad (r)$$

iſt. Wegen der linearen Form der gegebenen Differenzialgleichung kann man ſetzen:

$$z = \varphi_1(y + m_1 x) + \varphi_2(y + m_2 x) + \ldots\ldots + \varphi_n(y + m_n x),$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ verſchiedene willkürliche Functionen bezeichnen, und man überzeugt ſich leicht, daß dieſer Werth von z alle Allgemeinheit hat, welche das Integral der gegebenen Differenzialgleichung geſtattet.

§. 545. Daſſelbe würde nicht mehr der Fall ſein, wenn die Gleichung (r) gleiche Wurzeln hätte, und z. B. $m_1 = m_2$ wäre; denn alsdann würden die beiden Functionen φ_1, φ_2 in eine einzige zuſammenfallen. Aber wenn man in dieſem Falle:

$$z = \varphi_1(y + m_1 x) + x\varphi_2(y + m_1 x)$$

ſetzt, ſo hat man:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = m_1{}^n[\varphi_1{}^{(n)} + x\varphi_2{}^{(n)}] + nm_1{}^{n-1}\varphi_2{}^{(n-1)},$$

$$\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} = m_1{}^{n-1}[\varphi_1{}^{(n)} + x\varphi_2{}^{(n)}] + (n-1)\, m_1{}^{n-2}\varphi_2{}^{(n-1)}, \text{ ꝛc.},$$

ſo daß man durch Subſtitution in die gegebene Gleichung erhält:

$$[Am_1{}^n + Bm_1{}^{n-1} + \ldots . + Gm_1 + H][\varphi_1{}^{(n)} + x\varphi_2{}^{(n)}]$$
$$+ [Anm_1{}^{n-1} + B(n-1)\, m_1{}^{n-2} + \ldots . + H]\, \varphi_2{}^{(n-1)} = 0,$$

woraus erhellet, daß dieſer Werth von z der gegebenen Gleichung Genüge leiſtet, weil m_1 nach der Vorausſetzung eine doppelte Wurzel der Gleichung (r) iſt. Man kann alſo in dieſem Falle

$$z = \varphi_1(y + m_1 x) + x\varphi_2(y + m_1 x)$$
$$+ \varphi_3(y - m_3 x) + \ldots . + \varphi_n(y - m_n x)$$

ſetzen, wo die Anzahl der verſchiedenen willkürlichen Functionen = n bleibt.

III. Bemerkungen über die ſingulären und particulären Integrale der partiellen Differenzialgleichungen.

§. 546. Betrachten wir eine partielle Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \qquad (f)$$

welche von Wurzelgrößen und Brüchen befreit iſt, und es ſei:

$$z = f(x, y) \qquad (f)$$

eine Auflösung dieser Gleichung, worin keine willkürliche Function vorkommt, und welche ein particuläres oder singuläres Integral sein kann. Wenn sie ein particuläres Integral ist, so kann man das allgemeine Integral durch:

$$z = f(x, y) + \varepsilon\varphi \qquad (\varphi)$$

ausdrücken, wo φ eine Function von x, y, ε bezeichnet, welche für $\varepsilon = 0$ weder verschwindet, noch unendlich wird (§. 477). Substituirt man in die gegebene Differenzialgleichung, so erhält man zur Bestimmung des von der Constanten ε unabhängigen Theiles von φ die Gleichung:

$$\varphi\frac{df}{dz} + \frac{df}{dp}\cdot\frac{d\varphi}{dx} + \frac{df}{dq}\cdot\frac{d\varphi}{dy} = 0, \qquad (\varphi_1)$$

worin sich die partiellen Differenzialcoefficienten:

$$\frac{df}{dz}, \frac{df}{dp}, \frac{df}{dq}$$

auf den Werth $z = f(x, y)$ beziehen. Uebrigens kann man sich leicht überzeugen, daß der von ε unabhängige Theil von φ dieselbe Anzahl willkürlicher Functionen enthalten muß, als der vollständige Werth von φ, so daß die Betrachtung dieses Theiles von φ hinreichend ist, um die Natur der Auflösung (f) kennen zu lernen.

Wenn nun der Werth $z = f(x, y)$ gibt:

$$\frac{df}{dp} = 0, \quad \frac{df}{dq} = 0, \qquad (p, q)$$

ohne daß daraus

$$\frac{df}{dz} = 0 \qquad (z)$$

folgt, so kann man der Gleichung (φ_1) nur Genüge leisten, wenn man $\varphi = 0$ nimmt, so daß die Auflösung (f), da sie nicht auf die durch die Gleichung (φ) angedeutete Weise vervollständigt werden kann, ein singuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung bildet.

Die Bestimmung der singulären Integrale besteht also in der Bestimmung der Werthe von z als Functionen von x, y, welche den Gleichungen (f) und (p, q) zu gleicher Zeit genügen, wenn man p, q zwischen diesen Gleichungen eliminirt, und außerdem muß man sich überzeugen, daß diese Werthe von z die Gleichung (z) nicht verificiren.

Wendet man dieses auf die Gleichung der Kanalflächen:

$$z^2(1 + p^2 + q^2) - R^2 = 0$$

an, so erhält man $z^2p = 0$, $z^2q = 0$ für die Gleichungen (p, q), woraus man nicht $z = 0$ ableiten kann; denn die gegebene Gleichung würde nicht erfüllt werden, wogegen die Gleichung (z) verificirt würde; aber die Auflösungen $p = 0$, $q = 0$ führen auf das singuläre Integral $z^2 - R^2 = 0$.

§. 547. Wenn eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

gegeben wäre, so führte dieselbe Rechnung auf die Bedingungsgleichungen (p, q), und außerdem auf:

$$\frac{df}{dr} = 0, \quad \frac{df}{ds} = 0, \quad \frac{df}{dt} = 0, \qquad (r, s, t)$$

ſo daß die Elimination von p, q, r, s, t zwiſchen den Gleichungen (p, q), (r, s, t) und der gegebenen Gleichung einen Werth von z als Function von x, y gäbe, welcher eine ſinguläre Auflöſung wäre, wenn derſelbe Werth von z nicht die Gleichung (z) verificirte. Wenn der Werth (f) blos die Gleichungen (r, s, t) verificirte, ſo hätte man zur Beſtimmung des von s unabhängigen Theiles von φ die partielle Differenzialgleichung der erſten Ordnung (φ_1), deren Integral nur eine willkürliche Function enthalten könnte, ſo daß die Auflöſung (f) nur ein von der Integration einer ſingulären Auflöſung der erſten Ordnung herrührender particulärer Werth wäre, weil ſie nicht durch Hinzufügung zweier willkürlicher Conſtanten vervollſtändigt werden könnte, wie es die Ordnung der gegebenen Differenzialgleichung fordert.

Hieraus folgt, daß eine Differenzialgleichung der erſten Ordnung, welche zugleich der gegebenen Gleichung und den Gleichungen (r, s, t) genügt, ein ſinguläres Integral der erſten Ordnung iſt.

Es ſei z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$r^2 - (2rq - y)\left(p - \frac{q}{1+x}\right) = 0 \qquad (3)$$

gegeben, welche weder s, noch t enthält, ſo reducirt ſich das Syſtem der Gleichungen (r, s, t) auf:

$$r - q\left(p - \frac{z}{1+x}\right) = 0.$$

Dieſer Gleichung, ſowie der gegebenen, wird genügt, wenn man

$$p - \frac{z}{1+x} = 0$$

ſetzt, welches eine Differenzialgleichung der erſten Ordnung iſt, deren Integral:

$$z = (1+x)\,\varphi y$$

iſt, wo φ eine willkürliche Function bezeichnet, und folglich iſt dieſe letzte Gleichung ein ſinguläres Integral der gegebenen.

§. 548. In gewiſſen Fällen kann man auch die particulären Integrale der partiellen Differenzialgleichungen angeben, deren allgemeine Integrale nicht bekannt ſind, oder überhaupt nicht unter endlicher Form erhalten werden können, und die ſo erhaltenen particulären Integrale können, obgleich ſie nicht die zu einer analytiſchen Auflöſung erforderliche Allgemeinheit haben, doch die Aufgabe, welche auf die partielle Differenzialgleichung geführt hat, in einer hinreichenden Allgemeinheit löſen. Geſetzt, dieſe Gleichung wäre von der zweiten Ordnung und von der Form $f(p, q, r, s, t) = 0$, ſo daß ſie die Veränderlichen x, y, z nicht enthielte, und wir wollen außerdem annehmen, daß ſie in Beziehung auf r, s, t homogen iſt; ſo läßt ſie ſich, ungeachtet dieſer Einſchränkungen, im Allgemeinen doch nur für gewiſſe Formen der Function (f) integriren. Aber wenn man von allen Flächen, welche dieſer Gleichung genügen können, nur die abwickelbaren, für welche $p = \Pi q$ iſt, in Betracht zieht, ſo kann man ſetzen:

$$s = t\Pi' q, \quad r = s\Pi' q = t(\Pi' q)^2,$$

ſo daß nach der Subſtitution dieſer Werthe von s und r in die gegebene Gleichung, welche in Beziehung auf r, s, t homogen iſt, die Ableitung t daraus verſchwindet. Es bleibt alſo eine gewöhnliche Differenzialgleichung mit q, Πq, $\Pi' q$ oder mit q, p, $\frac{dp}{dq}$, durch welche man die Function Π mit einer willkür-

lichen Conſtanten beſtimmt. Wird alsdann die Gleichung $p = Hq$ integrirt, ſo erhält man eine urſprüngliche Gleichung mit einer willkürlichen Function, welche Gleichung eine Familie der abwickelbaren Flächen ausdrückt, welchen die durch die gegebene Differenzialgleichung ausgedrückte Eigenſchaft zukommt.

So enthält z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$(1 + q^2)\,r - 2pqs + (1 + p^2)\,t = 0$$

der krummen Flächen, für welche die beiden Hauptkrümmungen einander gleich und von entgegengeſetztem Sinne ſind (§. 281), und deren Flächeninhalt zwiſchen gegebenen Grenzen ein Minimum iſt (§. 391), nur die Ableitungen der erſten und zweiten Ordnung, und iſt in Beziehung auf r, s, t homogen. Wenn man alſo unter dieſen krummen Flächen diejenigen ſucht, welche ſich in eine Ebene ausbreiten laſſen, ſo kommt man auf die Gleichung:

$$(1 + q^2)\,dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1 + p^2)\,dq^2 = 0. \qquad (4)$$

Um ſie zu integriren, ſetze man $p = mq + n$, wo m, n Conſtanten bezeichnen, ſo erhält man $1 + m^2 + n^2 = 0$, welches gibt:

$$p = mq + (1 + m^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}. \qquad (5)$$

Ueberdies leiſten auch die Gleichungen $p = \alpha$, $q = b$ der Gleichung (4) Genüge und führen auf die allgemeine Gleichung der Ebene:

$$z = ax + by + c. \qquad (6)$$

Wenn man das Verfahren im §. 536 auf die Gleichung (5) anwendet, ſo erhält man ein Integral, welches durch das Syſtem der beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} z &= (y + mx)\,\alpha + x(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} - \varphi\alpha \\ y + mx &= \varphi'\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ausgedrückt wird; aber es iſt nicht möglich, ein reelles Reſultat daraus abzuleiten, wofern man nicht $1 + m^2 = 0$, $\varphi\alpha = c_1\alpha - c$ ſetzt, und alsdann hat man blos die Auflöſung $z = c$, welche nicht ſo allgemein iſt, als die durch die Gleichung (6) gegebene, obgleich das Syſtem der Gleichungen (7) wegen der darin vorkommenden willkürlichen Function φ eine größere Allgemeinheit zu haben ſcheint. Da übrigens eine der Hauptkrümmungen der abwickelbaren Flächen Null iſt, iſt einleuchtend, daß auch die andere verſchwinden muß, um der einen durch die gegebene Gleichung ausgedrückten geometriſchen Eigenſchaften zu genügen, und daß folglich nur die Ebene unter den abwickelbaren Flächen eine reelle Auflöſung dieſer Gleichung liefern kann.

Viertes Kapitel.

Von der Integration der partiellen Differenzialgleichungen durch Reihen, und insbeſondere der linearen Differenzialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen und mit conſtanten Coefficienten.

§. 549. In dem vorhergehenden Kapitel haben wir geſehen, wie unvollkommen die Verfahrungsarten ſind, durch welche man die Integrale der

partiellen Differenzialgleichungen von einer höheren als von der ersten Ordnung in den wenigen Fällen unter endlicher Form bestimmt, wo diese Bestimmung möglich ist. Ueberdies ist das Problem der Integration nur dann wirklich gelöst, wenn man die in den Integralen vorkommenden willkürlichen Functionen nach den jeder Aufgabe eigenthümlichen Bedingungen ohne alle Beschränkung bestimmt hat, was oft unmöglich ist, selbst wenn sich das Zeichen der willkürlichen Function nur auf reelle Größen erstreckt, aber um so mehr unmöglich ist, wenn durch die Integrationsmethoden Größen mit imaginären Factoren unter dieses Zeichen getreten sind. Auch haben die Fortschritte der mathematischen Physik es nothwendig gemacht, die Rechnung mit partiellen Differenzialen aus einem andern Gesichtspunkte und zu einem andern Zwecke, als zur Charakterisirung und Classificirung der Familien der krummen Flächen zu behandeln, weswegen die Geometer die Integrationsprobleme, welche sich ihnen darboten, auf eine andere Weise haben zu lösen suchen müssen, und es war natürlich, daß sie sich zu diesem Zwecke des gewöhnlichsten analytischen Verfahrens, nämlich des Verfahrens der Reihenentwickelungen zuerst bedienten.

Es sei allgemein eine partielle Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung zwischen der Function u und den unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, t,$ &c. gegeben, und wir wollen eine Hülfsveränderliche θ annehmen, welche auf irgend eine Weise aus $x, y, z, t,$ &c. zusammengesetzt ist; so können wir die Function u als in eine Reihe von der Form:

$$u = \Theta\theta^{\alpha} + \Theta_1\theta^{\alpha_1} + \Theta_2\theta^{\alpha_2} + \text{&c.} \qquad (\theta)$$

entwickelt, annehmen, wo die Exponenten α_i eine zu- oder abnehmende Reihe constanter Zahlen bilden, während die Coefficienten Θ_i unbekannte Functionen unabhängiger Veränderlicher sind, deren Anzahl wenigstens um eine Einheit kleiner ist, als die der Veränderlichen, wovon u abhängt. Wenn man diesen Werth von u in die gegebene Differenzialgleichung substituirt, den ersten Theil nach den Potenzen von θ ordnet und die Coefficienten der einzelnen Glieder der Entwickelung gleich Null setzt; so erhält man eine unendliche Anzahl von gewöhnlichen oder partiellen Differenzialgleichungen, wovon jede eine unabhängige Veränderliche weniger enthält, als die gegebene Differenzialgleichung, und wenn man dahin gelangt, daß man die allgemeinsten Werthe von Θ_i, α_i erhält, welche dieser Reihe von Gleichungen genügen; so leistet auch die Reihe θ der gegebenen Differenzialgleichung auf die allgemeinste Weise Genüge. Wenn man für θ successive jede der Veränderlichen $x, y, z, t,$ &c. oder verschiedene Functionen derselben nimmt, so kann man für u mehrere verschiedene Reihenentwickelungen angeben, welche aber jedesmal illusorisch sind, wenn sie nicht auf convergirende Reihen führen.

In diesen verschiedenen Reihenentwickelungen können die auf die allgemeinste Weise bestimmten Coefficienten Θ_i nichts desto weniger verschiedene Anzahlen willkürlicher Functionen enthalten, je nachdem man für θ diese oder jene der unabhängigen Veränderlichen oder diese oder jene Function derselben genommen hat. Die Anzahl der willkürlichen Functionen, welche in diesem Coefficienten vorkommen, kann nicht größer, aber wohl kleiner als n sein. Wir werden diesen Satz auf eine sehr einfache Weise darthun, wenn wir von der arithmetischen Construction der partiellen Differenzialgleichungen handeln, und er wird sich bei der in diesem Kapitel zu betrachtenden Beispielen als wahr erweisen.

§. 550. Das eben über die Entwickelung in Reihen durch die Methode der unbestimmten Coefficienten Gesagte hat zum Zwecke, der Theorie alle nur zu wünschende Allgemeinheit zu geben; aber gewöhnlich braucht man zu den

Reihenentwickelungen nur den Taylor'ſchen oder Maclaurin'ſchen Lehrſatz anzuwenden, wo alsdann die Exponenten α_i nach der Reihe der natürlichen Zahlen fortlaufen. Es ſei z. B. die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = a\frac{du}{dx}$$

gegeben, ſo gibt die Maclaurin'ſche Formel:

$$u = \varphi x + \frac{t}{1}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0 + \frac{t^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)_0 + \text{ꝛc.}, \quad (1)$$

wo φx den Werth von u für $t = 0$ und $\left(\frac{d^iu}{dt^i}\right)_0$ den Werth der Ableitung $\frac{d^iu}{dt^i}$ für denſelben particulären Werth $t = 0$ bezeichnet. Vermöge der gegebenen Gleichung hat man:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = a\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = a\varphi' x,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0 = a\left(\frac{d^2u}{dxdt}\right)_0 = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = a^2\varphi'' x, \text{ ꝛc.},$$

und vermittelſt dieſer Werthe verwandelt ſich die Reihe (1) in:

$$u = \varphi x + \frac{at}{1}\cdot\varphi' x + \frac{a^2t^2}{1.2}\cdot\varphi'' x + \frac{a^3t^3}{1.2.3}\cdot\varphi''' x + \text{ꝛc.}$$

Aber der zweite Theil dieſer letzten Gleichung iſt nichts anders, als die Reihenentwickelung der Function $\varphi(x + at)$ nach den Potenzen von at, und man erhält folglich auf dieſe Weiſe das geſuchte Integral unter der endlichen Form:

$$u = \varphi(x + at), \quad (2)$$

wie man es nach der Methode im §. 528 erhalten haben würde. Die Function φ bleibt willkürlich, wie es der Fall ſein muß.

Wir hätten die Function u auch durch den Taylor'ſchen Lehrſatz nach den Potenzen von $t - t_0$ entwickeln können, indem wir die Conſtante t_0 unbeſtimmt ließen, um den Ausnahmefall zu umgehen, welchem die Maclaurin'ſche Formel unterworfen iſt, wenn die Entwickelung der Function nach den ganzen und poſitiven Potenzen der Veränderlichen nicht mehr möglich iſt, und φx würde alsdann den Werth der Function u bezeichnen, welcher dem particulären Werthe $t = t_0$ entſpricht. Der Einfachheit der Rechnung wegen werden wir aber immer den Maclaurin'ſchen Lehrſatz anwenden; denn es iſt, wenn man will, immer leicht, für die erhaltenen Reihenentwickelungen andere nach den Potenzen der um eine willkürliche Conſtante verminderten Veränderlichen fortſchreitende Reihenentwickelungen zu ſubſtituiren.

§. 551. Entwickelt man z. B. das Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} \quad (3)$$

nach den Potenzen von t und behält dieſelben Bezeichnungen bei, wie vorhin, ſo hat man:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = \varphi'' x, \quad \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0 = \varphi^{iv} x, \quad \left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)_0 = \varphi^{vi} x, \text{ ꝛc.},$$

folglich:

$$u = \varphi x + \frac{t}{1} \cdot \varphi' x + \frac{t^2}{1.2} \cdot \varphi'' x + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot \varphi''' x + \text{ꝛc.} \qquad (4)$$

In dieſem Beiſpiele kann man nicht, wie in dem vorhergehenden aus der Reihenentwickelung des Integrales ſeinen Ausdruck unter endlicher Form erſchließen, wenigſtens nicht nach dem, was bisher darüber vorgekommen iſt; aber ſo oft die Reihe convergent iſt, beſtimmt ſie den Werth von u als Function der unabhängigen Veränderlichen x, t, und dieſer Werth iſt nur von der willkürlichen Function φ abhängig, welche in jedem beſondern Falle angegeben werden muß.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren fände man für den nach den Potenzen von x entwickelten Werth von u die Reihe:

$$u = \psi t + \frac{x}{1} \cdot \omega t + \frac{x^2}{1.2} \cdot \psi' t + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot \omega' t + \frac{x^4}{1.2.3.4} \cdot \psi'' t + \text{ꝛc.} \quad (5)$$

Die Functionen ψt, ωt bleiben beide willkürlich und bezeichnen reſp. die Werthe von u, $\frac{du}{dx}$ für $x = 0$.

Um zu zeigen, daß die Integrale (4), (5) auf eins hinauslaufen, obgleich das erſte nur die willkürliche Function φx und ihre Ableitungen, dagegen das zweite die beiden willkürlichen Functionen ψt, ωt enthält, entwickelt Poiſſon die Functionen ψt, ωt nach den Potenzen von t und ſetzt zu dem Zwecke:

$$\psi t = A + B\frac{t}{1} + C\frac{t^2}{1.2} + D\frac{t^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

$$\omega t = A' + B'\frac{t}{1} + C'\frac{t^2}{1.2} + D'\frac{t^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

ſo daß ſich die Gleichung (5) alsdann verwandelt in:

$$u = A + A'\frac{x}{1} + B\frac{x^2}{1.2} + B'\frac{x^3}{1.2.3} + C\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{t}{1}\left(B + B'\frac{x}{1} + C\frac{x^2}{1.2} + C'\frac{x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{t^2}{1.2}\left(C + C'\frac{x}{1} + \text{ꝛc.}\right) + \text{ꝛc.}$$

Bezeichnet man nun, wie es erlaubt iſt, durch φx die willkürliche Function:

$$A + A'\frac{x}{1} + B\frac{x^2}{1.2} + B'\frac{x^3}{1.2.3} + C\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.},$$

ſo fällt der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung mit der Reihe (4) zuſammen.

§. 552. Wenn man das Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dxdt} = u \qquad (6)$$

vermittelſt des Maclaurin'ſchen Lehrſatzes nach den Potenzen von t entwickelt, ſo erhält man:

$$u = \varphi x + \frac{t}{1} \cdot \int \varphi x dx + \frac{t^2}{1.2} \cdot \iint \varphi x dx^2 + \frac{t^3}{1.2.3} \iiint \varphi x dx^3 + \text{ꝛc.} \quad (7)$$

und unter dieſer Form ſcheint das Integral nur von der willkürlichen Function φx abzuhängen, welche den Werth von u für $t = 0$ ausdrückt. Aber es iſt zu bemerken, daß durch jede der in der vorhergehenden Reihenentwickelung unendlich vielen angedeuteten Integrationen eine willkürliche Conſtante eingeführt wird, und daß das Syſtem dieſer, reſp. durch veränderliche Factoren multiplicirten Conſtanten einer willkürlichen Function gleich zu achten iſt. Denn man kann ſetzen:

$$\varphi x = A + \varphi_1 x$$

$$\int \varphi x dx = B + A\frac{x}{1} + \varphi_2 x$$

$$\iint \varphi x dx^2 = C + B\frac{x}{1} + A\frac{x^2}{1.2} + \varphi_3 x$$

$$\iiint \varphi x dx^3 = D + C\frac{x}{1} + B\frac{x^2}{1.2} + A\frac{x^3}{1.2.3} + \varphi_4 x$$

ꝛc.,

wo $A, B, C, D, \ldots$ willkürliche Conſtanten und $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \varphi_3 x$, ꝛc. Functionen bezeichnen, welche mit x verſchwinden. Durch die Subſtitution dieſer Werthe in die vorhergehende Formel ergibt ſich:

$$u = A\left(1 + \frac{xt}{(1)^2} + \frac{x^2t^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3t^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \varphi_1 x + \frac{t}{1} \cdot \varphi_2 x + \frac{t^2}{1.2} \cdot \varphi_3 x + \frac{t^3}{1.2.3} + \varphi_4 x + \text{ꝛc.}$$

$$+ B\frac{t}{1} + C\frac{t^2}{1.2} + D\frac{t^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{x}{1}\left(B\frac{t^2}{1.2} + C\frac{t^3}{1.2.3} + D\frac{t^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{x^2}{1.2}\left(B\frac{t^3}{1.2.3} + C\frac{t^4}{1.2.3.4} + D\frac{t^5}{1.2.3.4.5} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun:

$$B\frac{t}{1} + C\frac{t^2}{1.2} + D\frac{t^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.} = \psi_1 t$$

ſo erhält man:

$$B\frac{t^2}{1.2} + C\frac{t^3}{1.2.3} + D\frac{t^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.} = \int_0^t \psi_1 t dt = \psi_2 t$$

$$B\frac{t^3}{1.2.3} + C\frac{t^4}{1.2.3.4} + D\frac{t^5}{1.2.3.4.5} = \int_0^t \psi_2 t dt = \psi_3 t$$

ꝛc.,

ſo daß die Functionen $\psi_1 t, \psi_2 t, \psi_3 t$, ꝛc. alle mit t zugleich verſchwinden und man dem Integrale die ſymmetriſche Form:

$$u = A\left(1 + \frac{xt}{(1)^2} + \frac{x^2t^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3t^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \varphi_1 x + \frac{t}{1} \cdot \varphi_2 x + \frac{t^2}{1.2} \cdot \varphi_3 x + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot \varphi_4 x + \text{ꝛc.}$$
$$+ \psi_1 t + \frac{x}{1} \cdot \psi_2 t + \frac{x^2}{1.2} \cdot \psi_3 t + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot \psi_4 t + \text{ꝛc.}$$

geben kann.

Wenn die Conſtante A und die Functionen φ_1, ψ_1 willkürlich angenommen ſind, ſo werden alle übrigen Functionen φ_2, ψ_2, φ_3, ψ_3, ꝛc. durch Quadraturen erhalten. A iſt der Zahlenwerth von u für $x = 0$, $t = 0$ und $A + \varphi_1 x$, $A + \psi_1 t$ ſind die Werthe von u als Functionen von x und von t, welche reſp. $t = 0$ und $x = 0$ entſprechen.

§. 553. Die in den vorhergehenden §§ betrachteten partiellen Differenzialgleichungen waren lineare, und wir wollen nun die Gleichung (3) im §. 547, nämlich:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 - \left(2\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{dz}{dy} - y\right)\left(\frac{dz}{dx} - \frac{z}{1+x}\right) = 0$$

betrachten, für deren ſinguläres Integral wir:

$$z = (1+x)\varphi y \qquad (8)$$

gefunden haben. Ihr durch die Maclaurin'ſche Formel nach den Potenzen von x entwickeltes allgemeines Integral iſt:

$$z = \psi y + \frac{x}{1} \cdot \omega y + \frac{x^2}{1.2}(\omega y - \psi y)\left[\psi' y \pm \sqrt{(\psi' y)^2 - \frac{y}{\omega y - \psi y}}\right]$$
$$+ \text{ꝛc.},$$

und wenn man es nach den Potenzen von y entwickelt, ſo erhält man:

$$z = \chi x + \frac{y}{1} \cdot \frac{\chi'' x}{2\left(\chi' x - \frac{\chi x}{1+x}\right)} + \text{ꝛc.}, \qquad (9)$$

ſo daß daſſelbe im erſten Falle von zwei willkürlichen Functionen ψ, ω, und im zweiten Falle blos von einer willkürlichen Function χ abhängt.

Wenn man das Integral aus geometriſchem Geſichtspunkte als die Gleichung einer Ordnung oder Familie krummer Flächen betrachtet, ſo kann man ſagen, daß das ſinguläre Integral (8) dieſelbe Ausdehnung hat, als das durch die Reihe (9) gegebene allgemeine Integral; denn wenn man die Gleichung (8) particulariſiren will, ſo muß man die Curve $z = \varphi y$, nach welcher die Ebene der yz die krumme Fläche durchſchneidet, annehmen, und ebenſo braucht man, um die Gleichung (9) zu particulariſiren, nur die Curve $z = \chi x$, welche der Durchſchnitt der krummen Fläche mit der Ebene der xz iſt, anzunehmen. Die beiden Gleichungen charakteriſiren folglich zwei verſchiedene Familien krummer Flächen, wo in jeder die individuellen Flächen durch Bedingungen derſelben Art und von derſelben Anzahl beſtimmt werden.

§. 554. Die Entwickelung der Integrale in Reihen durch die Anwendung der Taylor'ſchen oder Maclaurin'ſchen Formel, oder durch die zuerſt angegebene allgemeinere Methode der unbeſtimmten Coefficienten führt gewöhnlich auf mühſame oder gar unausführbare Rechnungen, wenn die zu integri-

rende Differenzialgleichung keine lineare iſt, wie man aus dem Beiſpiele im vorhergehenden § ſieht, wenn man die Entwickelung über das dritte Glied hinaus fortſetzen will. Dagegen nimmt die Reihenentwickelung des Integrales eine ebenſo merkwürdige als einfache Form an, wenn die partielle Differenzialgleichung eine lineare, mit drei unabhängigen Veränderlichen und mit conſtanten Coefficienten iſt, und wenn in ihrem letzten Gliede, welches von der Function und ihren partiellen Ableitungen unabhängig iſt, die unabhängigen Veränderlichen nicht vorkommen.

Denn bezeichnet man die Function durch u und die unabhängigen Veränderlichen mit x, t und ſubſtituirt in die gegebene Differenzialgleichung den Werth:

$$u = Ce^{\alpha x + \beta t}, \qquad (C)$$

wo C eine willkürliche Conſtante und α, β unbeſtimmte Parameter bezeichnen; ſo verſchwinden die Exponentialgrößen und die ſie multiplicirende Conſtante C als gemeinſchaftliche Factoren, und es bleibt eine algebraiſche Gleichung:

$$f(\alpha, \beta) = 0, \qquad (f)$$

welcher die Unbeſtimmten α, β genügen müſſen, wenn die Gleichung (C) ein particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung ſein ſoll. Dieſer letztern wird wegen ihrer linearen Form folglich genügt, wenn man für u die Summe unendlich vieler particulärer Werthe, wie (C), oder die Reihe:

$$C_1 e^{\alpha_1 x + \beta_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 x + \beta_2 t} + C_3 e^{\alpha_3 x + \beta_3 t} + \text{ꝛc.},$$

welche wir der Kürze wegen gewöhnlich durch:

$$\Sigma \cdot Ce^{\alpha x + \beta t}$$

bezeichnen werden, und worin keine andern willkürlichen Größen, als die Coefficienten C, α vorkommen, ſubſtituirt, wo die Zahlen β vermittelſt der Gleichung (f) durch die Zahlen α beſtimmt werden.

§. 555. Wenden wir dieſes auf die lineare Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$\frac{du}{dt} = a\frac{du}{dx} + bu$$

an; ſo bekommt die Gleichung (f) die Form $\beta = a\alpha + b$, ſo daß der gegebenen Differenzialgleichung Genüge geſchieht, wenn man:

$$u = e^{bt} \Sigma \cdot Ce^{\alpha(x + at)}$$

nimmt. Für $t = 0$ gibt dieſe Reihe:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x}.$$

Es ſei folglich φx eine Function von ſolcher Beſchaffenheit, daß man, wenn man ſie in eine Reihe von Exponentialgrößen (§. 114) entwickelte,

$$\varphi x = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x}$$

erhielte. Der allgemeine Werth von u iſt unter endlicher Form:

$$u = e^{bt} \varphi(x + at),$$

wie ſich durch eine Vertauſchung der Buchſtaben der Formel (3) im §. 529 ergibt. Die Function φ bleibt wegen der Unbeſtimmtheit der Coefficienten C, α willkürlich, und ſie wird beſtimmt, wenn man den $t = 0$ entſprechenden Werth von u als Function von x angibt.

Wenn man $b = 0$ ſetzt, ſo kommt man wieder auf die Gleichung (2). Allgemein, wenn man eine partielle Differenzialgleichung von der Form:

$$\frac{du}{dt} = [u] + bu$$

hat, wo $[u]$ der Kürze wegen eine lineare Function der partiellen Ableitungen von u in Beziehung auf die von t verſchiedenen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ bezeichnet; ſo kann man $u = ve^{bt}$ ſetzen, und man erhält die transformirte Gleichung mit v:

$$\frac{dv}{dt} = [v].$$

§. 556. Es ſei die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2} \qquad (10)$$

gegeben, ſo verwandelt ſich die Gleichung (f) in $\beta^2 = a^2\alpha^2$, woraus ſich für β die beiden Werthe $\beta' = a\alpha$, $\beta'' = -a\alpha$ ergeben. Jedem Werthe von β entſprechen zwei verſchiedene Reihen, welche der gegebenen Differenzialgleichung Genüge leiſten, und particuläre Integrale derſelben ſind, und die Summe dieſer beiden Reihen bildet das allgemeine Integral:

$$u = \Sigma \cdot C'_\alpha e^{\alpha'(x+at)} + \Sigma \cdot C''_\alpha e^{\alpha''(x-at)},$$

welches mit dem Integrale unter endlicher Form:

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \qquad (11)$$

was ſich von der Formel (2) im §. 539 nur durch die Wahl der Buchſtaben unterſcheidet, gleichbedeutend iſt.

Hiernach muß ſich das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung unter endlicher Form erhalten laſſen, und n verſchiedene willkürliche Functionen erhalten, wenn ſich $f(\alpha, \beta)$ in n lineare Factoren $\beta - (a\alpha + b)$ zerlegen läßt, und insbeſondere, wenn die Function f in Beziehung auf die unbeſtimmten Größen α, β homogen iſt, oder wenn die lineare Gleichung mit partiellen Differenzialen nur partielle Differenziale von derſelben Ordnung enthält.

Die in dem Integrale (11) vorkommenden beiden willkürlichen Functionen φ, ψ laſſen ſich leicht beſtimmen, wenn man zwei Functionen fx, fx angibt, wovon die erſte für $t = 0$ den Werth von u, und die zweite den von $\frac{du}{dt}$ ausdrückt. Denn vermöge dieſer Data hat man:

$$\varphi x + \psi x = fx, \quad \varphi' x - \psi' x = \frac{1}{a} \cdot fx.$$

Durch die Integration der zweiten dieſer Gleichungen erhält man:

$$\varphi x - \psi x = \frac{1}{a} \int fx\,dx = Fx + c,$$

wo Fx eine bekannte Function von x und c eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Hieraus ergibt ſich:

$$\varphi x = \tfrac{1}{2}(fx + Fx + c), \quad \psi x = \tfrac{1}{2}(fx - Fx - c),$$

und folglich hat man die Gleichung:

$$\mu = \tfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at) + F(x+at) - F(x-at)], \qquad (12)$$

woraus die willkürliche Conſtante c verſchwunden iſt.

§. 557. Nehmen wir die bereits früher betrachtete Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} \qquad (3)$$

wieder, für welche ſich die Gleichung (f) auf $\beta = \alpha^2$ reducirt; ſo haben wir, je nachdem wir dieſe Gleichung zur Fortſchaffung der Coefficienten β, oder der Coefficienten α anwenden, die beiden Reihenentwickelungen:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x + \alpha^2 t}, \qquad (13)$$

$$u = \Sigma \cdot C'e^{x\sqrt{\beta'} + \beta' t} + \Sigma \cdot C''e^{-x\sqrt{\beta''} + \beta'' t}. \qquad (14)$$

Wenn man die Reihe (13) nach den Potenzen von t entwickelt, ſo erhält man die Reihe:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x} + \frac{t}{1} \cdot \Sigma \cdot C\alpha^2 e^{\alpha x} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \Sigma \cdot C\alpha^4 e^{\alpha x} + \text{ꝛc.},$$

welche mit der Reihe (4) zuſammenfällt, wenn man $\Sigma \cdot Ce^{\alpha x} = \varphi x$ ſetzt, wo die willkürliche Function φx wieder den Werth von u für $t = 0$ bezeichnet.

Ebenſo fände man, wenn man den zweiten Theil der Gleichung (14) nach den Potenzen von x entwickelte:

$$\begin{aligned} u = {} & \Sigma \cdot C'e^{\beta' t} + \Sigma \cdot C''e^{\beta'' t} \\ & + \frac{x}{1} \cdot (\Sigma \cdot C'\sqrt{\beta'}e^{\beta' t} - \Sigma \cdot C''\sqrt{\beta''}e^{\beta'' t}) \\ & + \frac{x^2}{1.2} \cdot (\Sigma \cdot C'\beta' e^{\beta' t} + \Sigma \cdot C''\beta'' e^{\beta'' t}) \\ & + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot (\Sigma \cdot C'\beta'\sqrt{\beta'}e^{\beta' t} - \Sigma \cdot C''\beta''\sqrt{\beta''}e^{\beta'' t}) + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$\psi t = \Sigma \cdot C'e^{\beta' t} + \Sigma \cdot C''e^{\beta'' t},$$

$$\omega t = \Sigma \cdot C'\sqrt{\beta'}e^{\beta' t} - \Sigma \cdot C''\sqrt{\beta''}e^{\beta'' t},$$

ſo kommt man wieder auf die Reihe (5). Um zu zeigen, daß die beiden Functionen ψ, ω willkürlich und von einander unabhängig ſind, wollen wir:

$$\Sigma \cdot C'e^{\beta' t} = \Psi t, \quad \Sigma \cdot C''e^{\beta'' t} = \Pi t$$

$$\Sigma \cdot C'\sqrt{\beta'}e^{\beta' t} = \Psi_{,}t, \quad \Sigma \cdot C''\sqrt{\beta''}e^{\beta'' t} = \Pi_{,}t$$

ſetzen, woraus folgt:

$$\psi t = \Psi t + \Pi t, \qquad (15)$$

$$\omega t = \Psi_{,}t - \Pi_{,}t. \qquad (16)$$

Statt dieſer letzten Gleichung kann man ſetzen:

$$\omega' t = \Psi t - \Pi t, \qquad (17)$$

wo ω eine Function iſt, welche durch die umgekehrte der Operation aus ω abgeleitet wird, vermittelſt welcher die Functionen Ψ, Π, reſp. aus den

Functionen Ψ, Π abgeleitet werden. *) Aus den Gleichungen (15) und (17) folgt:

$$\Psi t = \tfrac{1}{2}\psi t + \tfrac{1}{2}\omega' t, \quad \Pi t = \tfrac{1}{2}\psi t - \tfrac{1}{2}\omega' t,$$

so daß die Functionen Ψ, Π, und folglich die Reihen $\Sigma \cdot C' e^{\beta' t}$, $\Sigma \cdot C'' e^{\beta'' t}$ immer bestimmt sind, von welcher Beschaffenheit die willkürlichen Functionen ψ, ω auch sein mögen.

Wenn man die Reihe (13) nach den Potenzen von x entwickelt hätte; so hätte man

$$u = \Sigma \cdot C e^{\alpha^2 t} + \frac{x}{1} \cdot \Sigma \cdot C\alpha e^{\alpha^2 t} + \frac{x^2}{1.2} \cdot \Sigma \cdot C\alpha^2 e^{\alpha^2 t} + \text{&c.}$$

erhalten, und diese Entwickelung stimmt wieder mit der Reihe (5) überein, wenn man:

$$\psi t = \Sigma \cdot C^{\alpha^2 t}, \quad \omega t = \Sigma \cdot C\alpha e^{\alpha^2 t}$$

setzt; aber alsdann sind die beiden Functionen ψ, ω nicht mehr von einander unabhängig, sondern es findet zwischen ihnen eine Relation statt, welche nach der obigen Bezeichnung durch $\omega t = \psi, t$ oder durch $\omega' t = \psi t$ ausgedrückt wird, was auch darauf hinausläuft, in den Gleichungen (15) und (17) die Function $\Pi = 0$ zu setzen. Die Reihe (13) muß folglich als das allgemeine Integral der Gleichung (3), oder als ein particuläres Integral betrachtet werden, je nachdem diese Reihe von den Potenzen t, oder nach den Potenzen von x entwickelt ist, oder was auf dasselbe hinausläuft, je nachdem die darin vorkommenden willkürlichen Parameter vermittelst des Werthes von u als Function von x für $t = 0$, oder vermittelst der Werthe von u und von $\frac{du}{dx}$ als Functionen von t für $x = 0$ bestimmt werden.

Es ist uns unbekannt, ob man diese merkwürdige Eigenschaft gewisser Reihenentwickelungen, daß sie zugleich ein allgemeines und ein particuläres Integral ausdrücken, schon früher bemerkt hat. Diese Bemerkung widerspricht sogar der Behauptung Poissons, daß man die Reihe (13) so entwickeln könne, daß sie mit der Reihe (5) identisch werde. **)

---

*) Aus der Gleichung $\Sigma . C' e^{\beta' t} = \Psi t$ folgt:

$$\Sigma . C' (\beta')^n e^{\beta' t} = \frac{d^n . \Psi t}{dt^n}, \quad \Sigma . C' (\beta')^{-n} e^{\beta' t} = \int^{(n)} \Psi t . dt^{(n)},$$

wo n eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet. Nach der Analogie kann man schreiben:

$$\Sigma . C' (\beta')^{\frac{1}{2}} e^{\beta' t} = \frac{d^{\frac{1}{2}} . \Psi t}{dt^{\frac{1}{2}}}$$

und alsdann hat man vermöge dieser Bezeichnung statt der Gleichungen (16) und (17) die folgenden:

$$\omega t = \frac{d^{\frac{1}{2}}(\Psi t - \Pi t)}{dt^{\frac{1}{2}}}, \quad \int^{(\frac{1}{2})} \omega t . dt^{\frac{1}{2}} = \Psi t - \Pi t.$$

Die als eine Folge aus der Entwickelung der Functionen in Exponenzialreihen sich ergebende Differenzial- und Integral-Rechnung mit gebrochenen Indices ist der Gegenstand einer wichtigen Abhandlung von Liouville in dem 21. Hefte des Journals der polytechnischen Schule zu Paris.

**) Théorie de la chaleur, p. 139.

§. 558. Wir wollen auch die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dxdt} = u \qquad (6)$$

wieder betrachten, welche für die Gleichung (f), $\alpha\beta = 1$, folglich:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x} + \frac{a}{t} \qquad (18)$$

gibt, und wenn wir nach den Potenzen von t entwickeln:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x} + \frac{t}{1} \cdot \Sigma \cdot C\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \Sigma \cdot C\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} + \text{ꝛc.}$$

Da man $\varphi x = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x}$ setzen kann, so ist klar, daß diese Entwickelung mit der Reihe (7) übereinstimmt. Nur sind alle Glieder der Reihe:

$$\Sigma \cdot C\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} = \int \varphi x dx, \quad \Sigma \cdot \frac{Ce^{\alpha x}}{\alpha^2} = \int\int \varphi x dx^2, \text{ ꝛc.},$$

wenn die Function φ angegeben ist und die Coefficienten C, α zu diesem Zwecke selbst bestimmt sind, ebenfalls vollständig bestimmt, so daß die in den Integralen $\int \varphi x dx$, $\int\int \varphi x dx^2$, ꝛc. vorkommenden willkürlichen Constanten selbst vollständig bestimmt sind. Die Reihe (18) gibt also nur ein particuläres Integral der Gleichung (6) und kein allgemeines oder vollständiges Integral derselben, wie S. 149 des eben angeführten Werkes gesagt wird.

Die Gleichung (6) würde ebenfalls verificirt, wenn man

$$u = A \sin.(\alpha x + \beta t) + B \cos.(\alpha x + \beta t)$$

setzte, wofern zwischen den Parametern α, β die Bedingungsgleichung $\alpha\beta + 1 = 0$ stattfindet, und folglich wird der Gleichung (6) genügt, wenn man

$$u = \Sigma\left[A \sin.\left(\alpha x - \frac{t}{\alpha}\right) + B \cos.\left(\alpha x - \frac{t}{\alpha}\right)\right]$$

setzt; aber dieses ist wieder nur ein particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung, und selbst dann, wenn man

$$u = \Sigma \cdot A \sin.\left(\alpha' x - \frac{t}{\alpha'}\right) + \Sigma \cdot B \cos.\left(\alpha'' x - \frac{t}{\alpha''}\right)$$

setzte, würde das Integral, wie man sich leicht überzeugt, keine größere Allgemeinheit haben.

§. 559. Allgemein, da die willkürlichen Constanten C, α, β sowohl reell als imaginär angenommen werden können, so ist klar, daß für jede Reihe von Exponentialgrößen eine Reihe von Sinussen und Cosinussen substituirt werden kann, und umgekehrt. Die Natur der Aufgabe bestimmt die Natur der Functionen, welche in der Endauflösung bleiben müssen, nachdem man alle willkürlichen Constanten bestimmt und die Zeichen des Imaginären fortgeschafft hat.

Wenn die Gleichung (f) so beschaffen wäre, daß die Parameter α, β nicht zu gleicher Zeit reell sein können, so wäre dieses ein Beweis, daß man statt gewisser Exponentialgrößen Kreisfunctionen in die Reihe einführen müßte. Dieser Fall bietet sich z. B. bei der Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \qquad (19)$$

dar, auf welche sich die Gleichung (10) reducirt, wenn man der willkürlichen

Conſtante a den Werth $\sqrt{-1}$ beilegt, und man genügt dieſer Gleichung, wenn man:

$$u = \Sigma \cdot (A' \sin. \alpha' x + B' \cos. \alpha' x) e^{\alpha' t} + \Sigma \cdot (A'' \sin. \alpha'' x + B'' \cos. \alpha'' x) e^{-\alpha'' t}$$

ſetzt. Bezeichnet man durch fx und $fx = \frac{dFx}{dx}$ die Werthe von u und $\frac{du}{dx}$ für $t = 0$; ſo hat man:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \cdot (A' \sin. \alpha' x + B' \cos. \alpha' x) &= \tfrac{1}{2}(fx + Fx + c) \\ \Sigma \cdot (A'' \sin. \alpha'' x + B'' \cos. \alpha'' x) &= \tfrac{1}{2}(fx - Fx - c) \end{aligned}\right\}, \qquad (20)$$

wo c eine willkürliche Conſtante bezeichnet; und die Functionen f, F mögen mathematiſche oder empiriſche Functionen ſein, wofern ſie nur nicht unendlich werden, ſo kann man nach den Formeln in Buch 5, Kap. 12 alle die Coefficienten A', B', α'; A'', B'', α'' doch immer ſo beſtimmen, daß den vorhergehenden Gleichungen Genüge geſchieht, wenigſtens für Werthe von x, welche zwiſchen gegebenen Grenzen liegen.

Das Integral der Differenzialgleichung (19) wäre alſo nach der Formel (12) unter endlicher Form:

$$u = \frac{1}{2}\left[f(x + t\sqrt{-1}) + f(x - t\sqrt{-1}) + \frac{F(x + t\sqrt{-1}) - F(x - t\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}\right],$$

wo das Zeichen F dieſelbe Bedeutung hat, wie in den Gleichungen (20), und dieſes Integral wird, wenigſtens für die numeriſche Berechnung der Werthe von u illuſoriſch, wenn die Functionen f, F nicht durch algebraiſche Formeln ausgedrückt werden, in welche man Werthe von der Form $x \pm t\sqrt{-1}$ ſo ſubſtituiren kann, daß die Zeichen des Imaginären verſchwinden.

§. 560. Die linearen partiellen Differenzialgleichungen mit conſtanten Coefficienten ſind beſonders auf die Probleme der Mechanik und der mathematiſchen Phyſik anwendbar, bei deren Auflöſung es geſtattet iſt, die Producte und höheren Potenzen gewiſſer veränderlicher Größen ihrer Kleinheit wegen zu vernachläſſigen. Zur Beſtimmung der in den Integralen vorkommenden willkürlichen Functionen muß man die anfänglichen Werthe gewiſſer Functionen in der begrenzten Ausdehnung eines materiellen Syſtemes mit einer, zwei oder drei Dimenſionen beſtimmen, wobei es nicht nöthig iſt, daß ſich dieſe Functionen durch eine mathematiſche Formel ausdrücken laſſen, ſondern es iſt blos erforderlich, daß ſie in der Ausdehnung des materiellen Syſtemes, für welches ſie gegeben ſind, endliche und beſtimmte Werthe behalten, weil ſie phyſiſche Größen ausdrücken, welche nothwendig endlich und beſtimmt ſind. Die Formeln im Kap. 12 des 5. Buches, ſowie alle diejenigen, welche innerhalb einer begrenzten Ausdehnung eine beliebige mathematiſche oder empiriſche Function ausdrücken können, laſſen ſich alſo nothwendig auf die Entwickelung der Integrale der partiellen Differenzialgleichungen, worin die willkürlichen Functionen nach phyſiſchen Daten beſtimmt werden müſſen, anwenden. Dagegen ſind die Reihenentwickelungen mit Exponentialgrößen nur anwendbar, wenn ſich die anfänglichen willkürlichen Functionen analytiſch ausdrücken laſſen, und alsdann drücken ſie die entwickelten Functionen für alle möglichen Werthe der Ver-

Reihenentwickelungen nur den Taylor'schen oder Maclaurin'schen Lehrsatz anzuwenden, wo alsdann die Exponenten α_i nach der Reihe der natürlichen Zahlen fortlaufen. Es sei z. B. die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = a\frac{du}{dx}$$

gegeben, so gibt die Maclaurin'sche Formel:

$$u = \varphi x + \frac{t}{1}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0 + \frac{t^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)_0 + \text{ꝛc.}, \quad (1)$$

wo φx den Werth von u für $t = 0$ und $\left(\frac{d^iu}{dt^i}\right)_0$ den Werth der Ableitung $\frac{d^iu}{dt^i}$ für denselben particulären Werth $t = 0$ bezeichnet. Vermöge der gegebenen Gleichung hat man:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = a\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = a\varphi'x,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0 = a\left(\frac{d^2u}{dxdt}\right)_0 = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = a^2\varphi''x, \text{ ꝛc.},$$

und vermittelst dieser Werthe verwandelt sich die Reihe (1) in:

$$u = \varphi x + \frac{at}{1}\cdot\varphi'x + \frac{a^2t^2}{1.2}\cdot\varphi''x + \frac{a^3t^3}{1.2.3}\cdot\varphi'''x + \text{ꝛc.}$$

Aber der zweite Theil dieser letzten Gleichung ist nichts anders, als die Reihenentwickelung der Function $\varphi(x+at)$ nach den Potenzen von at, und man erhält folglich auf diese Weise das gesuchte Integral unter der endlichen Form:

$$u = \varphi(x+at), \quad (2)$$

wie man es nach der Methode im §. 528 erhalten haben würde. Die Function φ bleibt willkürlich, wie es der Fall sein muß.

Wir hätten die Function u auch durch den Taylor'schen Lehrsatz nach den Potenzen von $t - t_0$ entwickeln können, indem wir die Constante t_0 unbestimmt ließen, um den Ausnahmefall zu umgehen, welchem die Maclaurin'sche Formel unterworfen ist, wenn die Entwickelung der Function nach den ganzen und positiven Potenzen der Veränderlichen nicht mehr möglich ist, und φx würde alsdann den Werth der Function u bezeichnen, welcher dem particulären Werthe $t = t_0$ entspricht. Der Einfachheit der Rechnung wegen werden wir aber immer den Maclaurin'schen Lehrsatz anwenden; denn es ist, wenn man will, immer leicht, für die erhaltenen Reihenentwickelungen andere nach den Potenzen der um eine willkürliche Constante verminderten Veränderlichen fortschreitende Reihenentwickelungen zu substituiren.

§. 551. Entwickelt man z. B. das Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} \quad (3)$$

nach den Potenzen von t und behält dieselben Bezeichnungen bei, wie vorhin, so hat man:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = \varphi''x, \quad \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0 = \varphi^{iv}x, \quad \left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)_0 = \varphi^{v}x, \text{ ꝛc.},$$

folglich:

$$u = \varphi x + \frac{t}{1} \cdot \varphi'' x + \frac{t^2}{1.2} \cdot \varphi''' x + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot \varphi^{IV} x + \text{ꝛc.} \qquad (4)$$

In dieſem Beiſpiele kann man nicht, wie in dem vorhergehenden aus der Reihenentwickelung des Integrales ſeinen Ausdruck unter endlicher Form erſchließen, wenigſtens nicht nach dem, was bisher darüber vorgekommen iſt; aber ſo oft die Reihe convergent iſt, beſtimmt ſie den Werth von u als Function der unabhängigen Veränderlichen x, t, und dieſer Werth iſt nur von der willkürlichen Function φ abhängig, welche in jedem beſondern Falle angegeben werden muß.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren fände man für den nach den Potenzen von x entwickelten Werth von u die Reihe:

$$u = \psi t + \frac{x}{1} \cdot \omega t + \frac{x^2}{1.2} \cdot \psi' t + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot \omega' t + \frac{x^4}{1.2.3.4} \cdot \psi'' t + \text{ꝛc.} \quad (5)$$

Die Functionen ψt, ωt bleiben beide willkürlich und bezeichnen reſp. die Werthe von u, $\frac{du}{dx}$ für $x = 0$.

Um zu zeigen, daß die Integrale (4), (5) auf eins hinauslaufen, obgleich das erſte nur die willkürliche Function φx und ihre Ableitungen, dagegen das zweite die beiden willkürlichen Functionen ψt, ωt enthält, entwickelt Poiſſon die Functionen ψt, ωt nach den Potenzen von t und ſetzt zu dem Zwecke:

$$\psi t = A + B\frac{t}{1} + C\frac{t^2}{1.2} + D\frac{t^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

$$\omega t = A' + B'\frac{t}{1} + C'\frac{t^2}{1.2} + D'\frac{t^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

ſo daß ſich die Gleichung (5) alsdann verwandelt in:

$$u = A + A'\frac{x}{1} + B\frac{x^2}{1.2} + B'\frac{x^3}{1.2.3} + C\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{t}{1}\left(B + B'\frac{x}{1} + C\frac{x^2}{1.2} + C'\frac{x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{t^2}{1.2}\left(C + C'\frac{x}{1} + \text{ꝛc.}\right) + \text{ꝛc.}$$

Bezeichnet man nun, wie es erlaubt iſt, durch φx die willkürliche Function:

$$A + A'\frac{x}{1} + B\frac{x^2}{1.2} + B'\frac{x^3}{1.2.3} + C\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.},$$

ſo fällt der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung mit der Reihe (4) zuſammen.

§. 552. Wenn man das Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dxdt} = u \qquad (6)$$

vermittelſt des Maclaurin'ſchen Lehrſatzes nach den Potenzen von t entwickelt, ſo erhält man:

$$u = \varphi x + \frac{t}{1} \cdot \int \varphi x dx + \frac{t^2}{1.2} \cdot \iint \varphi x dx^2 + \frac{t^3}{1.2.3} \iiint \varphi x dx^3 + \text{ꝛc.} \quad (7)$$

und unter dieſer Form ſcheint das Integral nur von der willkürlichen Function φx abzuhängen, welche den Werth von u für $t = 0$ ausdrückt. Aber es iſt zu bemerken, daß durch jede der in der vorhergehenden Reihenentwickelung unendlich vielen angedeuteten Integrationen eine willkürliche Conſtante eingeführt wird, und daß das Syſtem dieſer, reſp. durch veränderliche Factoren multiplicirten Conſtanten einer willkürlichen Function gleich zu achten iſt. Denn man kann ſetzen:

$$\varphi x = A + \varphi_1 x$$

$$\int \varphi x dx = B + A\frac{x}{1} + \varphi_2 x$$

$$\iint \varphi x dx^2 = C + B\frac{x}{1} + A\frac{x^2}{1.2} + \varphi_3 x$$

$$\iiint \varphi x dx^3 = D + C\frac{x}{1} + B\frac{x^2}{1.2} + A\frac{x^3}{1.2.3} + \varphi_4 x$$

ꝛc.,

wo $A, B, C, D, \ldots$ willkürliche Conſtanten und $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \varphi_3 x,$ ꝛc. Functionen bezeichnen, welche mit x verſchwinden. Durch die Subſtitution dieſer Werthe in die vorhergehende Formel ergibt ſich:

$$u = A\left(1 + \frac{xt}{(1)^2} + \frac{x^2t^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3t^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \varphi_1 x + \frac{t}{1} \cdot \varphi_2 x + \frac{t^2}{1.2} \cdot \varphi_3 x + \frac{t^3}{1.2.3} + \varphi_4 x + \text{ꝛc.}$$

$$+ B\frac{t}{1} + C\frac{t^2}{1.2} + D\frac{t^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{x}{1}\left(B\frac{t^2}{1.2} + C\frac{t^3}{1.2.3} + D\frac{t^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{x^2}{1.2}\left(B\frac{t^3}{1.2.3} + C\frac{t^4}{1.2.3.4} + D\frac{t^5}{1.2.3.4.5} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun:

$$B\frac{t}{1} + C\frac{t^2}{1.2} + D\frac{t^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.} = \psi_1 t$$

ſo erhält man:

$$B\frac{t^2}{1.2} + C\frac{t^3}{1.2.3} + D\frac{t^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.} = \int_0^t \psi_1 t dt = \psi_2 t$$

$$B\frac{t^3}{1.2.3} + C\frac{t^4}{1.2.3.4} + D\frac{t^5}{1.2.3.4.5} = \int_0^t \psi_2 t dt = \psi_3 t$$

ꝛc.,

ſo daß die Functionen $\psi_1 t, \psi_2 t, \psi_3 t,$ ꝛc. alle mit t zugleich verſchwinden und man dem Integrale die ſymmetriſche Form:

$$u = A\left(1 + \frac{xt}{(1)^2} + \frac{x^2t^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3t^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \varphi_1 x + \frac{t}{1} \cdot \varphi_2 x + \frac{t^2}{1.2} \cdot \varphi_3 x + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot \varphi_4 x + \text{ꝛc.}$$
$$+ \psi_1 t + \frac{x}{1} \cdot \psi_2 t + \frac{x^2}{1.2} \cdot \psi_3 t + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot \psi_4 t + \text{ꝛc.}$$

geben kann.

Wenn die Conſtante A und die Functionen φ_1, ψ_1 willkürlich angenommen ſind, ſo werden alle übrigen Functionen φ_2, ψ_2, φ_3, ψ_3, ꝛc. durch Quadraturen erhalten. A iſt der Zahlenwerth von u für $x = 0$, $t = 0$ und $A + \varphi_1 x$, $A + \psi_1 t$ ſind die Werthe von u als Functionen von x und von t, welche reſp. $t = 0$ und $x = 0$ entſprechen.

§. 553. Die in den vorhergehenden §§ betrachteten partiellen Differenzialgleichungen waren lineare, und wir wollen nun die Gleichung (3) im §. 547, nämlich:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 - \left(2\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{dz}{dy} - y\right)\left(\frac{dz}{dx} - \frac{z}{1+x}\right) = 0$$

betrachten, für deren ſinguläres Integral wir:

$$z = (1+x)\varphi y \qquad (8)$$

gefunden haben. Ihr durch die Maclaurin'ſche Formel nach den Potenzen von x entwickeltes allgemeines Integral iſt:

$$z = \psi y + \frac{x}{1} \cdot \omega y + \frac{x^2}{1.2}(\omega y - \psi y)\left[\psi' y \pm \sqrt{(\psi' y)^2 - \frac{y}{\omega y - \psi y}}\right]$$
$$+ \text{ꝛc.},$$

und wenn man es nach den Potenzen von y entwickelt, ſo erhält man:

$$z = \chi x + \frac{y}{1} \cdot \frac{\chi'' x}{2\left(\chi' x - \frac{\chi x}{1+x}\right)} + \text{ꝛc.}, \qquad (9)$$

ſo daß daſſelbe im erſten Falle von zwei willkürlichen Functionen ψ, ω, und im zweiten Falle blos von einer willkürlichen Function χ abhängt.

Wenn man das Integral aus geometriſchem Geſichtspunkte als die Gleichung einer Ordnung oder Familie krummer Flächen betrachtet, ſo kann man ſagen, daß das ſinguläre Integral (8) dieſelbe Ausdehnung hat, als das durch die Reihe (9) gegebene allgemeine Integral; denn wenn man die Gleichung (8) particulariſiren will, ſo muß man die Curve $z = \varphi y$, nach welcher die Ebene der yz die krumme Fläche durchſchneidet, annehmen, und ebenſo braucht man, um die Gleichung (9) zu particulariſiren, nur die Curve $z = \chi x$, welche der Durchſchnitt der krummen Fläche mit der Ebene der xz iſt, anzunehmen. Die beiden Gleichungen charakteriſiren folglich zwei verſchiedene Familien krummer Flächen, wo in jeder die individuellen Flächen durch Bedingungen derſelben Art und von derſelben Anzahl beſtimmt werden.

§. 554. Die Entwickelung der Integrale in Reihen durch die Anwendung der Taylor'ſchen oder Maclaurin'ſchen Formel, oder durch die zuerſt angegebene allgemeinere Methode der unbeſtimmten Coefficienten führt gewöhnlich auf mühſame oder gar unausführbare Rechnungen, wenn die zu integri-

rende Differenzialgleichung keine lineare iſt, wie man aus dem Beiſpiele im vorhergehenden § ſieht, wenn man die Entwickelung über das dritte Glied hinaus fortſetzen will. Dagegen nimmt die Reihenentwickelung des Integrales eine ebenſo merkwürdige als einfache Form an, wenn die partielle Differenzialgleichung eine lineare, mit drei unabhängigen Veränderlichen und mit conſtanten Coefficienten iſt, und wenn in ihrem letzten Gliede, welches von der Function und ihren partiellen Ableitungen unabhängig iſt, die unabhängigen Veränderlichen nicht vorkommen.

Denn bezeichnet man die Function durch u und die unabhängigen Veränderlichen mit x, t und ſubſtituirt in die gegebene Differenzialgleichung den Werth:

$$u = Ce^{\alpha x + \beta t}, \qquad (C)$$

wo C eine willkürliche Conſtante und α, β unbeſtimmte Parameter bezeichnen; ſo verſchwinden die Exponentialgrößen und die ſie multiplicirende Conſtante C als gemeinſchaftliche Factoren, und es bleibt eine algebraiſche Gleichung:

$$f(\alpha, \beta) = 0, \qquad (f)$$

welcher die Unbeſtimmten α, β genügen müſſen, wenn die Gleichung (C) ein particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung ſein ſoll. Dieſer letztern wird wegen ihrer linearen Form folglich genügt, wenn man für u die Summe unendlich vieler particulärer Werthe, wie (C), oder die Reihe:

$$C_1 e^{\alpha_1 x + \beta_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 x + \beta_2 t} + C_3 e^{\alpha_3 x + \beta_3 t} + \text{ꝛc.},$$

welche wir der Kürze wegen gewöhnlich durch:

$$\Sigma \cdot Ce^{\alpha x + \beta t}$$

bezeichnen werden, und worin keine andern willkürlichen Größen, als die Coefficienten C, α vorkommen, ſubſtituirt, wo die Zahlen β vermittelſt der Gleichung (f) durch die Zahlen α beſtimmt werden.

§. 555. Wenden wir dieſes auf die lineare Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$\frac{du}{dt} = a\frac{du}{dx} + bu$$

an; ſo bekommt die Gleichung (f) die Form $\beta = a\alpha + b$, ſo daß der gegebenen Differenzialgleichung Genüge geſchieht, wenn man:

$$u = e^{bt} \Sigma \cdot Ce^{\alpha(x + at)}$$

nimmt. Für $t = 0$ gibt dieſe Reihe:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x}.$$

Es ſei folglich φx eine Function von ſolcher Beſchaffenheit, daß man, wenn man ſie in eine Reihe von Exponentialgrößen (§. 114) entwickelte,

$$\varphi x = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x}$$

erhielte. Der allgemeine Werth von u iſt unter endlicher Form:

$$u = e^{bt} \varphi(x + at),$$

wie ſich durch eine Vertauſchung der Buchſtaben der Formel (3) im §. 529 ergibt. Die Function φ bleibt wegen der Unbeſtimmtheit der Coefficienten C, α willkürlich, und ſie wird beſtimmt, wenn man den $t = 0$ entſprechenden Werth von u als Function von x angibt.

Wenn man $b = 0$ setzt, so kommt man wieder auf die Gleichung (2). Allgemein, wenn man eine partielle Differenzialgleichung von der Form:

$$\frac{du}{dt} = [u] + bu$$

hat, wo $[u]$ der Kürze wegen eine lineare Function der partiellen Ableitungen von u in Beziehung auf die von t verschiedenen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ bezeichnet; so kann man $u = ve^{bt}$ setzen, und man erhält die transformirte Gleichung mit v:

$$\frac{dv}{dt} = [v].$$

§. 556. Es sei die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2} \qquad (10)$$

gegeben, so verwandelt sich die Gleichung (f) in $\beta^2 = a^2\alpha^2$, woraus sich für β die beiden Werthe $\beta' = a\alpha$, $\beta'' = -a\alpha$ ergeben. Jedem Werthe von β entsprechen zwei verschiedene Reihen, welche der gegebenen Differenzialgleichung Genüge leisten, und particuläre Integrale derselben sind, und die Summe dieser beiden Reihen bildet das allgemeine Integral:

$$u = \Sigma \cdot C'e^{\alpha'(x+at)} + \Sigma \cdot C''e^{\alpha''(x-at)},$$

welches mit dem Integrale unter endlicher Form:

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \qquad (11)$$

was sich von der Formel (2) im §. 539 nur durch die Wahl der Buchstaben unterscheidet, gleichbedeutend ist.

Hiernach muß sich das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung unter endlicher Form erhalten lassen, und n verschiedene willkürliche Functionen erhalten, wenn sich $f(\alpha, \beta)$ in n lineare Factoren $\beta - (a\alpha + b)$ zerlegen läßt, und insbesondere, wenn die Function f in Beziehung auf die unbestimmten Größen α, β homogen ist, oder wenn die lineare Gleichung mit partiellen Differenzialen nur partielle Differenziale von derselben Ordnung enthält.

Die in dem Integrale (11) vorkommenden beiden willkürlichen Functionen φ, ψ lassen sich leicht bestimmen, wenn man zwei Functionen fx, fx angibt, wovon die erste für $t = 0$ den Werth von u, und die zweite den von $\frac{du}{dt}$ ausdrückt. Denn vermöge dieser Data hat man:

$$\varphi x + \psi x = fx, \quad \varphi' x - \psi' x = \frac{1}{a} \cdot fx.$$

Durch die Integration der zweiten dieser Gleichungen erhält man:

$$\varphi x - \psi x = \frac{1}{a}\int fx\,dx = Fx + c,$$

wo Fx eine bekannte Function von x und c eine willkürliche Constante bezeichnet. Hieraus ergibt sich:

$$\varphi x = \tfrac{1}{2}(fx + Fx + c), \quad \psi x = \tfrac{1}{2}(fx - Fx - c),$$

und folglich hat man die Gleichung:

$$\mu = \tfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at) + F(x+at) - F(x-at)], \qquad (12)$$

woraus die willkürliche Constante c verschwunden ist.

§. 557. Nehmen wir die bereits früher betrachtete Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} \qquad (3)$$

wieder, für welche sich die Gleichung (f) auf $\beta = \alpha^2$ reducirt; so haben wir, je nachdem wir diese Gleichung zur Fortschaffung der Coefficienten β, oder der Coefficienten α anwenden, die beiden Reihenentwickelungen:

$$u = \Sigma \cdot C e^{\alpha x + \alpha^2 t}, \qquad (13)$$

$$u = \Sigma \cdot C' e^{x\sqrt{\beta'} + \beta' t} + \Sigma \cdot C'' e^{-x\sqrt{\beta''} + \beta'' t}. \qquad (14)$$

Wenn man die Reihe (13) nach den Potenzen von t entwickelt, so erhält man die Reihe:

$$u = \Sigma \cdot C e^{\alpha x} + \frac{t}{1} \cdot \Sigma \cdot C\alpha^2 e^{\alpha x} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \Sigma \cdot C\alpha^4 e^{\alpha x} + \text{ꝛc.},$$

welche mit der Reihe (4) zusammenfällt, wenn man $\Sigma \cdot C e^{\alpha x} = \varphi x$ setzt, wo die willkürliche Function φx wieder den Werth von u für $t = 0$ bezeichnet.

Ebenso fände man, wenn man den zweiten Theil der Gleichung (14) nach den Potenzen von x entwickelte:

$$\begin{aligned} u = {} & \Sigma \cdot C' e^{\beta' t} + \Sigma \cdot C'' e^{\beta'' t} \\ & + \frac{x}{1} \cdot (\Sigma \cdot C'\sqrt{\beta'} e^{\beta' t} - \Sigma \cdot C''\sqrt{\beta''} e^{\beta'' t}) \\ & + \frac{x^2}{1.2} \cdot (\Sigma \cdot C'\beta' e^{\beta' t} + \Sigma \cdot C''\beta'' e^{\beta'' t}) \\ & + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot (\Sigma \cdot C'\beta'\sqrt{\beta'} e^{\beta' t} - \Sigma \cdot C''\beta''\sqrt{\beta''} e^{\beta'' t}) + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$\psi t = \Sigma \cdot C' e^{\beta' t} + \Sigma \cdot C'' e^{\beta'' t},$$

$$\omega t = \Sigma \cdot C'\sqrt{\beta'} e^{\beta' t} - \Sigma \cdot C''\sqrt{\beta''} e^{\beta'' t},$$

so kommt man wieder auf die Reihe (5). Um zu zeigen, daß die beiden Functionen ψ, ω willkürlich und von einander unabhängig sind, wollen wir:

$$\Sigma \cdot C' e^{\beta' t} = \Psi t, \quad \Sigma \cdot C'' e^{\beta'' t} = \Pi t$$

$$\Sigma \cdot C'\sqrt{\beta'} e^{\beta' t} = \Psi, t, \quad \Sigma \cdot C''\sqrt{\beta''} e^{\beta'' t} = \Pi, t$$

setzen, woraus folgt:

$$\psi t = \Psi t + \Pi t, \qquad (15)$$

$$\omega t = \Psi, t - \Pi, t. \qquad (16)$$

Statt dieser letzten Gleichung kann man setzen:

$$\omega' t = \Psi t - \Pi t, \qquad (17)$$

wo ω eine Function ist, welche durch die umgekehrte der Operation aus ω abgeleitet wird, vermittelst welcher die Functionen Ψ, Π, resp. aus den

Functionen Ψ, Π abgeleitet werden. *) Aus den Gleichungen (15) und (17) folgt:

$$\Psi t = \tfrac{1}{2}\psi t + \tfrac{1}{2}\omega' t, \quad \Pi t = \tfrac{1}{2}\psi t - \tfrac{1}{2}\omega' t,$$

so daß die Functionen Ψ, Π, und folglich die Reihen $\Sigma \cdot C' e^{\beta' t}$, $\Sigma \cdot C'' e^{\beta'' t}$ immer bestimmt sind, von welcher Beschaffenheit die willkürlichen Functionen ψ, ω auch sein mögen.

Wenn man die Reihe (13) nach den Potenzen von x entwickelt hätte; so hätte man

$$u = \Sigma \cdot C e^{\alpha^2 t} + \frac{x}{1} \cdot \Sigma \cdot C\alpha e^{\alpha^2 t} + \frac{x^2}{1.2} \cdot \Sigma \cdot C\alpha^2 e^{\alpha^2 t} + \text{&c.}$$

erhalten, und diese Entwickelung stimmt wieder mit der Reihe (5) überein, wenn man:

$$\psi t = \Sigma \cdot C^{\alpha^2 t}, \quad \omega t = \Sigma \cdot C\alpha e^{\alpha^2 t}$$

setzt; aber alsdann sind die beiden Functionen ψ, ω nicht mehr von einander unabhängig, sondern es findet zwischen ihnen eine Relation statt, welche nach der obigen Bezeichnung durch $\omega t = \psi, t$ oder durch $\omega' t = \psi t$ ausgedrückt wird, was auch darauf hinausläuft, in den Gleichungen (15) und (17) die Function $\Pi = 0$ zu setzen. Die Reihe (13) muß folglich als das allgemeine Integral der Gleichung (3), oder als ein particuläres Integral betrachtet werden, je nachdem diese Reihe von den Potenzen t, oder nach den Potenzen von x entwickelt ist, oder was auf dasselbe hinausläuft, je nachdem die darin vorkommenden willkürlichen Parameter vermittelst des Werthes von u als Function von x für $t = 0$, oder vermittelst der Werthe von u und von $\frac{du}{dx}$ als Functionen von t für $x = 0$ bestimmt werden.

Es ist uns unbekannt, ob man diese merkwürdige Eigenschaft gewisser Reihenentwickelungen, daß sie zugleich ein allgemeines und ein particuläres Integral ausdrücken, schon früher bemerkt hat. Diese Bemerkung widerspricht sogar der Behauptung Poissons, daß man die Reihe (13) so entwickeln könne, daß sie mit der Reihe (5) identisch werde. **)

---

*) Aus der Gleichung $\Sigma . C' e^{\beta' t} = \Psi t$ folgt:

$$\Sigma . C'(\beta')^n e^{\beta' t} = \frac{d^n . \Psi t}{dt^n}, \quad \Sigma . C'(\beta')^{-n} e^{\beta' t} = \int^{(n)} \Psi t . dt^{(n)},$$

wo n eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet. Nach der Analogie kann man schreiben:

$$\Sigma . C'(\beta')^{\frac{1}{2}} e^{\beta' t} = \frac{d^{\frac{1}{2}} . \Psi t}{dt^{\frac{1}{2}}}$$

und alsdann hat man vermöge dieser Bezeichnung statt der Gleichungen (16) und (17) die folgenden:

$$\omega t = \frac{d^{\frac{1}{2}}(\Psi t - \Pi t)}{dt^{\frac{1}{2}}}, \quad \int^{(\frac{1}{2})} \omega t . dt^{\frac{1}{2}} = \Psi t - \Pi t.$$

Die als eine Folge aus der Entwickelung der Functionen in Exponenzialreihen sich ergebende Differenzial- und Integral-Rechnung mit gebrochenen Indices ist der Gegenstand einer wichtigen Abhandlung von Liouville in dem 21. Hefte des Journals der polytechnischen Schule zu Paris.

**) Théorie de la chaleur, p. 139.

§. 558. Wir wollen auch die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dxdt} = u \qquad (6)$$

wieder betrachten, welche für die Gleichung (f), $\alpha\beta = 1$, folglich:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x} + \frac{a}{t} \qquad (18)$$

gibt, und wenn wir nach den Potenzen von t entwickeln:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x} + \frac{t}{1} \cdot \Sigma \cdot C\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \Sigma \cdot C\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} + \text{ꝛc.}$$

Da man $\varphi x = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x}$ setzen kann, so ist klar, daß diese Entwickelung mit der Reihe (7) übereinstimmt. Nur sind alle Glieder der Reihe:

$$\Sigma \cdot C\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} = \int \varphi x dx, \quad \Sigma \cdot \frac{Ce^{\alpha x}}{\alpha^2} = \iint \varphi x dx^2, \text{ ꝛc.},$$

wenn die Function φ angegeben ist und die Coefficienten C, α zu diesem Zwecke selbst bestimmt sind, ebenfalls vollständig bestimmt, so daß die in den Integralen $\int \varphi x dx$, $\iint \varphi x dx^2$, ꝛc. vorkommenden willkürlichen Constanten selbst vollständig bestimmt sind. Die Reihe (18) gibt also nur ein particuläres Integral der Gleichung (6) und kein allgemeines oder vollständiges Integral derselben, wie S. 149 des eben angeführten Werkes gesagt wird.

Die Gleichung (6) würde ebenfalls verificirt, wenn man

$$u = A \sin.(\alpha x + \beta t) + B \cos.(\alpha x + \beta t)$$

setzte, wofern zwischen den Parametern α, β die Bedingungsgleichung $\alpha\beta + 1 = 0$ stattfindet, und folglich wird der Gleichung (6) genügt, wenn man

$$u = \Sigma\left[A \sin.\left(\alpha x - \frac{t}{\alpha}\right) + B \cos.\left(\alpha x - \frac{t}{\alpha}\right)\right]$$

setzt; aber dieses ist wieder nur ein particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung, und selbst dann, wenn man

$$u = \Sigma \cdot A \sin.\left(\alpha' x - \frac{t}{\alpha'}\right) + \Sigma \cdot B \cos.\left(\alpha'' x - \frac{t}{\alpha''}\right)$$

setzte, würde das Integral, wie man sich leicht überzeugt, keine größere Allgemeinheit haben.

§. 559. Allgemein, da die willkürlichen Constanten C, α, β sowohl reell als imaginär angenommen werden können, so ist klar, daß für jede Reihe von Exponentialgrößen eine Reihe von Sinussen und Cosinussen substituirt werden kann, und umgekehrt. Die Natur der Aufgabe bestimmt die Natur der Functionen, welche in der Endauflösung bleiben müssen, nachdem man alle willkürlichen Constanten bestimmt und die Zeichen des Imaginären fortgeschafft hat.

Wenn die Gleichung (f) so beschaffen wäre, daß die Parameter α, β nicht zu gleicher Zeit reell sein können, so wäre dieses ein Beweis, daß man statt gewisser Exponentialgrößen Kreisfunctionen in die Reihe einführen müßte. Dieser Fall bietet sich z. B. bei der Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \qquad (19)$$

dar, auf welche sich die Gleichung (10) reducirt, wenn man der willkürlichen

Conſtante a den Werth $\sqrt{-1}$ beilegt, und man genügt dieſer Gleichung, wenn man:

$$u = \Sigma \cdot (A' \sin. \alpha' x + B' \cos. \alpha' x) e^{\alpha' t}$$
$$+ \Sigma \cdot (A'' \sin. \alpha'' x + B'' \cos. \alpha'' x) e^{-\alpha'' t}$$

ſetzt. Bezeichnet man durch fx und $fx = \frac{dFx}{dx}$ die Werthe von u und $\frac{du}{dx}$ für $t = 0$; ſo hat man:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \cdot (A' \sin. \alpha' x + B' \cos. \alpha' x) &= \tfrac{1}{2}(fx + Fx + c) \\ \Sigma \cdot (A'' \sin. \alpha'' x + B'' \cos. \alpha'' x) &= \tfrac{1}{2}(fx - Fx - c) \end{aligned}\right\}, \qquad (20)$$

wo c eine willkürliche Conſtante bezeichnet; und die Functionen f, F mögen mathematiſche oder empiriſche Functionen ſein, wofern ſie nur nicht unendlich werden, ſo kann man nach den Formeln in Buch 5, Kap. 12 alle die Coefficienten A', B', α'; A'', B'', α'' doch immer ſo beſtimmen, daß den vorhergehenden Gleichungen Genüge geſchieht, wenigſtens für Werthe von x, welche zwiſchen gegebenen Grenzen liegen.

Das Integral der Differenzialgleichung (19) wäre alſo nach der Formel (12) unter endlicher Form:

$$u = \frac{1}{2}\left[f(x + t\sqrt{-1}) + f(x - t\sqrt{-1})\right.$$
$$\left. + \frac{F(x + t\sqrt{-1}) - F(x - t\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}\right],$$

wo das Zeichen F dieſelbe Bedeutung hat, wie in den Gleichungen (20), und dieſes Integral wird, wenigſtens für die numeriſche Berechnung der Werthe von u illuſoriſch, wenn die Functionen f, F nicht durch algebraiſche Formeln ausgedrückt werden, in welche man Werthe von der Form $x \pm t\sqrt{-1}$ ſo ſubſtituiren kann, daß die Zeichen des Imaginären verſchwinden.

§. 560. Die linearen partiellen Differenzialgleichungen mit conſtanten Coefficienten ſind beſonders auf die Probleme der Mechanik und der mathematiſchen Phyſik anwendbar, bei deren Auflöſung es geſtattet iſt, die Producte und höheren Potenzen gewiſſer veränderlicher Größen ihrer Kleinheit wegen zu vernachläſſigen. Zur Beſtimmung der in den Integralen vorkommenden willkürlichen Functionen muß man die anfänglichen Werthe gewiſſer Functionen in der begrenzten Ausdehnung eines materiellen Syſtemes mit einer, zwei oder drei Dimenſionen beſtimmen, wobei es nicht nöthig iſt, daß ſich dieſe Functionen durch eine mathematiſche Formel ausdrücken laſſen, ſondern es iſt blos erforderlich, daß ſie in der Ausdehnung des materiellen Syſtemes, für welches ſie gegeben ſind, endliche und beſtimmte Werthe behalten, weil ſie phyſiſche Größen ausdrücken, welche nothwendig endlich und beſtimmt ſind. Die Formeln im Kap. 12 des 5. Buches, ſowie alle diejenigen, welche innerhalb einer begrenzten Ausdehnung eine beliebige mathematiſche oder empiriſche Function ausdrücken können, laſſen ſich alſo nothwendig auf die Entwickelung der Integrale der partiellen Differenzialgleichungen, worin die willkürlichen Functionen nach phyſiſchen Daten beſtimmt werden müſſen, anwenden. Dagegen ſind die Reihenentwickelungen mit Exponentialgrößen nur anwendbar, wenn ſich die anfänglichen willkürlichen Functionen analytiſch ausdrücken laſſen, und alsdann drücken ſie die entwickelten Functionen für alle möglichen Werthe der Ver-

änderlichen aus, mit Ausnahme des Falles, wenn die Reihenentwickelungen divergent werden.

§. 561. Die einfachſte Differenzialgleichung, auf welche man das eben über die Beſtimmung der willkürlichen Functionen nach phyſiſchen Daten Geſagte anwenden kann, iſt die Gleichung für die Bewegung der ſchwingenden Saiten (§. 539):

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}, \tag{21}$$

worin t die Zeit, x die Abſciſſe eines Punktes der in Bewegung befindlichen Saite, u die Ordinate dieſes Punktes, welche im Ruhezuſtande $= 0$ iſt, und a einen Coefficienten bezeichnet, welcher von der Spannung, dem Gewichte und den Dimenſionen der Saite abhängt. Wenn $x = 0$ und $x = l$ die Abſciſſen der Endpunkte der ſchwingenden Saite und dieſe beiden Endpunkte feſt ſind; ſo ſind die Werthe von u und von $\frac{du}{dt}$ für $x = 0$, $x = l$ und für jeden Werth von t Null. Im Anfange der Bewegung und für Werthe von x, welche zwiſchen Null und l liegen, hat man $u = fx$, $\frac{du}{dt} = \mathit{f}x$, wo die Functionen fx, $\mathit{f}x$ der Bedingung genügen müſſen, daß ſie endliche und beſtimmte Werthe haben.

Der Gleichung (21) wird genügt, wenn man

$$u = \Sigma(A \sin. a\alpha t + B \cos. a\alpha t) \sin. \alpha x \tag{22}$$

nimmt, und wenn man

$$\alpha = \frac{i\pi}{l} \tag{23}$$

ſetzt, wo i eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, und alsdann wird die Bedingung erfüllt, daß die Functionen u, $\frac{du}{dt}$ für $x = 0$, $x = l$ und für jeden Werth von t verſchwinden. Die Gleichung (22) verwandelt ſich alsdann in:

$$u = \Sigma\left(A \sin. \frac{i\pi at}{l} + B \cos. \frac{i\pi at}{l}\right) \sin. \frac{i\pi x}{l},$$

und es kommt nur noch darauf an, die Coefficienten A, B als Functionen des Index i zu beſtimmen, und um dieſe Abhängigkeit anzudeuten, wollen wir blos A_i, B_i, ſtatt A, B ſetzen. Nach den ausgedrückten Bedingungen erhält man aber:

$$\Sigma \cdot B_i \sin. \frac{i\pi x}{l} = fx, \quad \Sigma \cdot \frac{i\pi a}{l} A_i \sin. \frac{i\pi x}{l} = \mathit{f}x,$$

und dieſen letzten Gleichungen wird zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = l$ für eine beliebige Beſchaffenheit, der Functionen fx und $\mathit{f}x$ genügt, wenn man:

$$B_i = \frac{2}{l}\int_0^l \sin. \frac{i\pi\xi}{l} \cdot f\xi d\xi, \quad A_i = \frac{2}{i\pi a}\int_0^l \sin. \frac{i\pi\xi}{l} \cdot \mathit{f}\xi d\xi$$

ſetzt (§. 430.).

§. 562 Die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}, \tag{24}$$

welche mit der Gleichung (3) übereinſtimmt, wenn man der Einfachheit wegen $a = 1$ ſetzt, findet zwiſchen der Temperatur u des Normaldurchſchnittes einer homogenen cylindriſchen Stange, der Zeit t und der von dem einen Ende dieſer Stange aus gezählten Abſciſſe x dieſes Querſchnittes ſtatt. Durch a bezeichnen wir einen Coefficienten, welcher von dem Wärmeleitungsvermögen der Stange und von ihrer Wärmecapacität abhängt, durch l die Länge der Stange und für den Nullpunkt der Termometerſcale nehmen wir die als conſtant vorausgeſetzte Temperatur des die Stange umgebenden Mittels. Für $x = 0$ und $x = 1$ muß alſo $u = 0$ ſein, welchen Werth t auch haben mag. Ferner muß ſich u für $t = 0$ auf eine zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = l$ willkürlich angenommene Function reduciren, welche den anfänglichen Temperaturzuſtand der Stange ausdrückt.

Der Differenzialgleichung (24) wird durch die Reihe:

$$u = \Sigma \cdot A \sin. \alpha x e^{-\alpha^2 a^2 t} \tag{25}$$

genügt, und wenn man, wie im vorhergehenden Beiſpiele:

$$\alpha = \frac{i\pi}{l} \tag{23}$$

nimmt, ſo werden die ſich auf die beiden Enden der Stange beziehenden Bedingungen in Rechnung gebracht. Man braucht alsdann nur:

$$A_i = \frac{2}{l} \int_0^l \sin. \frac{i\pi\xi}{l} \cdot f\xi d\xi$$

zu ſetzen, damit der $t = 0$ entſprechende Werth von u den anfänglichen Temperaturzuſtand der Stange ausdrückt.

§. 563. Bei den eben mitgetheilten beiden Anwendungen kann man die durch die Formel (23) gegebenen Werthe des Parameters α als die unendlich vielen Wurzeln der transcendenten Gleichung $\sin. \alpha l = 0$ betrachten, und im Allgemeinen hat man zur Beſtimmung der unendlich vielen Werthe von α eine transcendente Gleichung; aber von einer complicirtern Form und von einer ſolchen Beſchaffenheit, daß man die auf einander folgenden Wurzeln nur durch Probiren beſtimmen kann.

Wir wollen dieſelben Data, wie in der vorhergehenden Gleichung beibehalten, nur ſoll die Function u, ſtatt für $x = l$ beſtändig Null zu ſein, an dieſer Grenze und für alle Werthe von t der Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dx} + hu = 0 \tag{26}$$

genügen. Dieſe neue Aufgabe bezieht ſich auf die Beſtimmung der Temperatur einer homogenen Kugel, welche in ein Mittel von conſtanter Temparatur getaucht und urſprünglich ſo erhitzt iſt, daß alle gleich weit vom Mittelpunkte entfernte Punkte dieſelbe Temperatur haben. Die Veränderliche x bezeichnet die Entfernung eines beliebigen Punktes der Kugel von ihrem Mittelpunkte, die Function u iſt das Produkt aus der Temperatur dieſes Punktes und aus ſeiner Entfernung x vom Mittelpunkte der Kugel, und l iſt der Halbmeſſer der letztern. Die Bedingung, daß für $x = 0$ bei jedem Werthe von t die Function $u = 0$ ſei, folgt daraus, daß die Temperatur des Mittelpunktes der Kugel nicht unendlich groß werden kann (§. 458), und das Stattfinden der Gleichung (26), worin h einen conſtanten Coefficienten ausdrückt, iſt eine Folge von dem an der Oberfläche der Kugel durch Ausſtrahlung und durch Berührung ſtattfindenden Wärmeverluſte.

Der Werth von u wird immer durch die Formel (25) gegeben; aber vermöge der Gleichung (26) müſſen die Parameter α die Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$\alpha \cos. \alpha l + h \sin. \alpha l = 0 \qquad (27)$$

ſein. Wir wollen annehmen, dieſe Wurzeln wären berechnet, ſo kommt es darauf an, die Coefficiente A ſo zu beſtimmen, daß ſich u für $t = 0$ auf eine zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = l$ willkürlich angegebene Function fx reducirt. Folgendes iſt das Verfahren, welches Poiſſon zu dieſer Beſtimmung und zugleich zu dem Beweiſe, daß die Gleichung (27) keine imaginären Wurzeln haben kann, angewandt hat.

§. 564. Wenn wir die beiden Theile der Gleichung (24) durch $\sin. \alpha x dx$ multipliciren, und zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = l$ integriren; ſo erhalten wir:

$$\frac{d \cdot \int_0^l u \sin. \alpha x dx}{dt} = a^2 \int_0^l \sin. \alpha x \frac{d^2 u}{dx^2} dx, \qquad (28)$$

und die theilweiſe Integration gibt:

$$\int_0^l \sin. \alpha x \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \left[\frac{du}{dx} \sin. \alpha x\right]_0^l - \alpha \int_0^l \cos. \alpha x \frac{du}{dx} dx$$

$$\int_0^l \cos. \alpha x \frac{du}{dx} dx = \left[u \cos. \alpha x\right]_0^l + \alpha \int_0^l u \sin. \alpha x dx,$$

woraus folgt:

$$\int_0^l \sin. \alpha x \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \left[\frac{du}{dx} \sin. \alpha x - \alpha u \cos. \alpha x\right]_0^l - \alpha^2 \int_0^l u \sin. \alpha x dx.$$

Für $x = 0$ iſt $u = 0$, $\sin. \alpha x = 0$ und für $x = l$ hat man vermöge der Gleichung (26):

$$\frac{du}{dx} \sin. \alpha x - \alpha u \cos. \alpha x = -u(h \sin. \alpha l + \alpha \cos. \alpha l),$$

welche Größe wegen der Gleichung (27) Null iſt. Die Gleichung (28) reducirt ſich alſo auf:

$$\frac{d \cdot \int_0^l u \sin. \alpha x dx}{dt} = -\alpha^2 a^2 \int_0^l u \sin. \alpha x dx,$$

und das Integral derſelben iſt:

$$\int_0^l u \sin. \alpha x dx = Ce^{-\alpha^2 a^2 t},$$

wo C den $t = 0$ entſprechenden Werth von:

$$\int_0^l u \sin. \alpha x dx,$$

d. h. das Integral:

$$\int_0^l fx \cdot \sin. \alpha x dx$$

bezeichnet. Durch die Elimination der Conſtanten C erhält man alſo:

$$\int_0^l u \sin. \alpha x dx = e^{-\alpha^2 a^2 t} \int_0^l fx \cdot \sin. \alpha x dx. \qquad (29)$$

Wenn wir in dieſe letzte Gleichung den durch die Formel (25) gegebenen Reihenausdruck des Werthes von u ſubſtituiren, ſo iſt zur Identität der Gleichung erforderlich, daß im erſten Theile derſelben nur das der im zweiten Theile angewandten Wurzel α entſprechende Glied bleibt. Für jede andere von α numeriſch verſchiedene Wurzel α' hat man folglich:

$$\int_0^l \sin. \alpha x \sin. \alpha' x dx = 0, \qquad (30)$$

und die Gleichung (29) gibt blos:

$$A \int_0^l \sin.^2 \alpha x dx = \int_0^l fx \cdot \sin. \alpha x dx,$$

oder, wenn die erſte Integration verrichtet wird:

$$A = \frac{2\alpha \int_0^l fx \cdot \sin. \alpha x dx}{\alpha l - \sin. \alpha l \cos. \alpha l},$$

folglich:

$$u = 2\Sigma \cdot \frac{\alpha \int_0^l fx \cdot \sin. \alpha x dx}{\alpha l - \sin. \alpha l \cos. \alpha l} \sin. \alpha x \cdot e^{-\alpha^2 a^2 t}, \qquad (31)$$

wodurch der Werth von u vollſtändig beſtimmt iſt.

Es iſt zu bemerken, daß, wenn α eine Wurzel der Gleichung (27) iſt, $-\alpha$ eine andere Wurzel derſelben iſt; allein die Auflöſung bekäme keine größere Allgemeinheit, wenn man die negativen Wurzeln in Betracht ziehen wollte, weil die Summe der beiden Glieder:

$$(A_1 \sin. \alpha x \cdot e^{-\alpha^2 a^2 t} + A_2 \sin. (-\alpha x) \cdot e^{-\alpha^2 a^2 t}$$

gleichbedeutend iſt mit:

$$(A_1 - A_2) \sin. \alpha x \cdot e^{-\alpha^2 a^2 t} = A \sin. \alpha x \cdot e^{-\alpha^2 a^2 t},$$

wo der Parameter α nun blos noch poſitive Werthe bekommen kann.

§. 565. Vermittelſt der Gleichung (30) kann man, wie bereits bemerkt worden, darthun, daß die Gleichung (27) keine imaginären Wurzeln haben kann. Denn es ſei $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ eine imaginäre Wurzel der Gleichung (27), ſo muß dieſe Gleichung auch eine andere der erſten conjugirte imaginäre Wurzel $\alpha' = \mu - \nu\sqrt{-1}$ haben, und nach den gewöhnlichen Transformationen verwandelt ſich die Gleichung (30) in:

$$\frac{1}{4\nu} \int_0^l [\sin.^2 \mu x (e^{\nu x} + e^{-\nu x})^2 + \cos.^2 \mu x (e^{\nu x} - e^{-\nu x})^2] dx = 0,$$

welche Gleichung unmöglich iſt, weil alle Elemente des Integrales im erſten Theile nothwendig poſitiv ſind.

Wenn man die Integration verrichtet, ſo findet man:

$$\int_0^l \text{sin. } \alpha x \text{ sin. } \alpha' x dx = \frac{\text{sin. } (\alpha - \alpha')l}{2(\alpha - \alpha')} - \frac{\text{sin. } (\alpha + \alpha')l}{2(\alpha + \alpha')}$$

$$= \frac{\alpha' \text{ sin. } \alpha l \text{ cos. } \alpha' l - \alpha \text{ sin. } \alpha' l \text{ cos. } \alpha l}{\alpha^2 - \alpha'^2}. \qquad (32)$$

Da α, α' Wurzeln der Gleichung (27) bezeichnen, ſo iſt der Zähler dieſes letzten Bruches $= 0$ und die Gleichung (30), welche bereits durch eine von der beſondern Form der Function unter dem Integralzeichen f unabhängige Betrachtung bewieſen iſt, wird alſo erfüllt.

Für $\alpha' = \alpha$ erſcheint der letzte Theil der Gleichung (32) unter der Form $\frac{0}{0}$ und ſein nach der gewöhnlichen Methode beſtimmter wahrer Werth iſt:

$$\frac{\alpha l - \text{sin. } \alpha l \text{ cos. } \alpha l}{2\alpha},$$

welchen wir auch durch directe Berechnung des Integrales $\int_0^l \text{sin.}^2 \alpha x dx$ erhalten haben.

§. 566. Wir wollen in der Gleichung (31), $t = 0$ ſetzen, ſo muß ſich die Function u zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = l$ auf fx reduciren, und man hat, wenn man der Deutlichkeit wegen für die Veränderliche x unter dem Integrationszeichen eine Hülfsveränderliche ξ ſetzt:

$$fx = 2\Sigma \cdot \frac{\alpha \int_0^l f\xi \cdot \text{sin. } \alpha\xi d\xi}{\alpha l - \text{sin. } \alpha l \text{ cos. } \alpha l} \cdot \text{sin. } \alpha x.$$

Dieſes iſt eine neue Formel für die Entwickelung der Function fx, welche denen in Buch 5, Kap. 12 analog und ebenſo ſtreng, obgleich auf eine indirecte Weiſe bewieſen iſt. Formeln dieſer Art laſſen ſich wie die linearen partiellen Differenzialgleichungen, welchen ſie entſprechen, beliebig vermehren; allein ſie können nur dann mit Zuverläſſigkeit angewandt werden, wenn die Convergenz der Reihen, welche ſie erzeugen, ſtreng nachgewieſen iſt.

§. 567. Wenn die lineare partielle Differenzialgleichung mit conſtanten Coefficienten drei Veränderliche x, y, t enthielte, ſo könnte man zum particulären Integrale

$$u = Ce^{\alpha x + \beta y + \gamma t}$$

nehmen, und man hätte zwiſchen α, β, γ eine Bedingungsgleichung:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \text{oder} \quad \gamma = \varphi(\alpha, \beta),$$

ſo daß zwei dieſer Parameter unbeſtimmt blieben. Man könnte alſo für das allgemeine Integral:

$$u = \Sigma\Sigma \cdot Ce^{\alpha x + \beta y + t\varphi(\alpha, \beta)}$$

nehmen, wo das doppelte Zeichen $\Sigma\Sigma$ andeutet, daß man ſucceſſive alle möglichen Werthe von α mit allen möglichen Werthen von β verbinden muß. Mit dem vorhergehenden Werthe von u könnte man ähnliche Transformationen vornehmen, wie die im Verlaufe dieſes Kapitels bei der Entwickelung der Functionen mit zwei Veränderlichen angegebenen; aber im Allgemeinen ſind ſolche Entwickelungen, wenn die Anzahl der Veränderlichen größer iſt als zwei, wegen ihrer Weitſchichtigkeit unbrauchbar, und man muß alsdann [illegible] der unendlichen Reihen beſtimmte Integrale anwenden, wie wir in dem folgenden Kapitel zeigen wollen.

Fünftes Kapitel.

Ueber die Integration der linearen partiellen Differenzialgleichungen durch bestimmte Integrale.

§. 568. Im §. 551 haben wir gesehen, daß das Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} \tag{1}$$

durch die Reihe:

$$u = \varphi x + \frac{t}{1} \cdot \varphi'' x + \frac{t^2}{1.2} \cdot \varphi^{IV} x + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot \varphi^{VI} x + \text{ꝛc.} \tag{2}$$

ausgedrückt wird, welche ihrerseits selbst durch ein bestimmtes Integral summirt oder unter endlicher Form ausgedrückt werden kann.

Denn nach den bekannten Formeln (§. 403):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \sqrt{\pi}, \quad \text{(a)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} \omega^{2i+1} d\omega = 0 \quad \text{(b)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} \omega^{2i} d\omega = \frac{1.3.5 \ldots (2i-1)}{2^i} \cdot \sqrt{\pi} \tag{c}$$

nimmt die Gleichung (2) folgende Form an:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi x + 2\omega\sqrt{t} \cdot \varphi' x + \frac{(2\omega\sqrt{t})^2}{1.2} \varphi'' x + \frac{(2\omega\sqrt{t})^3}{1.2.3} \cdot \varphi''' x \right.$$

$$\left. + \frac{(2\omega\sqrt{t})^4}{1.2.3.4} \cdot \varphi^{IV} x + \text{ꝛc.} \right] e^{-\omega^2} d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\omega\sqrt{t}) e^{-\omega^2} d\omega. \tag{3}$$

Auch hätte man:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - 2\omega\sqrt{t}) e^{-\omega^2} d\omega,$$

und folglich:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x + 2\omega\sqrt{t}) + \varphi(x - 2\omega\sqrt{t})] e^{-\omega^2} d\omega.$$

Wenn man den Ausdruck auf diese Form bringt, so erhellet daraus besser, daß er sowohl auf positive, wie auf negative Werthe von t anwendbar ist, denn die Glieder, welche für negative Werthe von t mit dem Zeichen des imaginären behaftet sind, heben sich gegenseitig auf, und in der That kann man in der Reihe (2), woraus der Ausdruck (3) abgeleitet ist, der Veränderlichen t negative Werthe beilegen.

Der Ausdruck (3) läßt sich auch sehr einfach aus der Formel:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{ax + a^2 t} \quad (\text{§. } 557)$$

ableiten, denn die Gleichung (a) gibt, wenn man darin $\omega - \alpha\sqrt{t}$ für ω ſetzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2+2\alpha\omega\sqrt{t}-\alpha^2 t}\,d\omega = \sqrt{\pi}$$

folglich:

$$e^{\alpha^2 t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2+2\alpha\omega\sqrt{t}}\,d\omega, \qquad (4)$$

und mithin:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma \cdot Ce^{\alpha(x+2\omega\sqrt{t})} \cdot e^{-\omega^2} d\omega,$$

welche Formel mit dem Ausdrucke (3) übereinſtimmt, wenn man, wie es erlaubt iſt:

$$\varphi(x+2\omega\sqrt{t}) \quad \text{für} \quad \Sigma \cdot Ce^{\alpha(x+2\omega\sqrt{t})}$$

ſetzt. Soll dieſe Formel anwendbar ſein, ſo muß die Function φ, obgleich ſie willkürlich iſt, doch ſo vorausgeſetzt werden, daß das Product $\varphi(x+2\omega\sqrt{t})e^{-\omega^2}$ für $\omega = \pm\infty$ und für beliebige Werthe von t, x verſchwindet, damit das Integral immer einen endlichen Werth behält. Vermöge dieſer Einſchränkung ergibt ſich durch eine directe Rechnung, daß die Gleichung (3) der gegebenen Genüge leiſtet.

§. 569. Das vollſtändige Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dxdt} = u$$

iſt (§. 552):

$$u = A\left(1 + \frac{xt}{(1)^2} + \frac{x^2t^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3t^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \varphi_1 x + \frac{t}{1} \cdot \varphi_2 x + \frac{t^2}{1.2} \cdot \varphi_3 x + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot \varphi_4 x + \text{ꝛc.}$$
$$+ \psi_1 t + \frac{x}{1} \cdot \psi_2 t + \frac{x^2}{1.2} \cdot \psi_3 t + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot \psi_4 t + \text{ꝛc.}$$

Wenn man die Ableitungen der Functionen $\varphi_1 x$, $\psi_1 t$ mit φx, ψt bezeichnet, ſo hat man:

$$\varphi_i x = \frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)} \int_0^x (x-\omega)^{i-1} \varphi\omega d\omega$$
$$\psi_i t = \frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)} \int_0^t (t-\omega)^{i-1} \psi\omega d\omega;$$

denn die $i$mal wiederholte theilweiſe Integration gibt:

$$\int (x-\omega)^{i-1} \varphi\omega d\omega = (x-\omega)^{i-1} \varphi_1\omega + (i-1)(x-\omega)^{i-2} \varphi_2\omega$$
$$+ (i-1)(i-2)(x-\omega)^{i-3} \varphi_3\omega + \ldots + (i-1)(i-2)\ldots 3.2.1\, \varphi_i\omega,$$

wo vermöge der Definition an der Grenze $\omega = 0$ alle die Functionen $\varphi_i\omega$, und an der Grenze $\omega = x$ alle Glieder des zweiten Theiles verſchwinden, welche $x - \omega$ zum gemeinſchaftlichen Factor haben, ſo daß man für $\varphi_i x$ den vorhin angegebenen Werth erhält, und dieſelbe Rechnung iſt auf die Function $\psi_i t$ anwendbar.

Durch dieſe Transformation erhält man alſo:

$$u = A\left(1 + \frac{xt}{(1)^2} + \frac{x^2t^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3t^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+\int_0^x \left[1 + \frac{t(x-\omega)}{(1)^2} + \frac{t^2(x-\omega)^2}{(1.2)^2} + \frac{t^3(x-\omega)^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right]\varphi\omega d\omega$$
$$+\int_0^t \left[1 + \frac{x(t-\omega)}{(1)^2} + \frac{x^2(t-\omega)^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3(t-\omega)^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right]\psi\omega d\omega,$$

und wenn i wieder eine ganze poſitive Zahl bezeichnet, ſo hat man (§. 404):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i}\alpha d\alpha = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots 2i} \cdot \frac{\pi}{2}$$

oder:

$$\frac{\pi}{(1.2.3\ldots i)^2} = \frac{2^{2i+1}}{1.2.3\ldots 2i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i}\alpha d\alpha.$$

Man kann alſo den erſten Theil des Werthes von u auf die Form bringen:

$$\frac{2}{\pi} A\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2^2 \cdot xt}{1.2}\sin.^2\alpha + \frac{2^4 \cdot x^2t^2}{1.2.3.4}\sin.^4\alpha + \text{ꝛc.}\right)d\alpha$$
$$= \frac{1}{\pi} A\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{2\sqrt{xt}\cdot\sin.^2\alpha} + e^{-2\sqrt{xt}\cdot\sin.^2\alpha}\right)d\alpha,$$

und für die beiden andern Theile des Werthes von u, welche auf eine ähnliche Weiſe zuſammengeſetzt ſind, iſt es einfacher, die Exponentialgrößen in Coſinuſſe zu verwandeln, ſo daß man endlich erhält:

$$u = \frac{A}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{2\sqrt{xt}\cdot\sin.^2\alpha} + e^{-2\sqrt{xt}\cdot\sin.^2\alpha}\right)d\alpha$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^x \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.\left(2\sqrt{t(\omega-x)}\sin.^2\alpha\right)d\alpha\right]\varphi\omega d\omega$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^t \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.\left(2\sqrt{x(\omega-t)}\sin.^2\alpha\right)d\alpha\right]\psi\omega d\omega.$$

Wir ſind hier auf doppelte beſtimmte Integrale gekommen, während wir das Integral der Gleichung (1), durch ein einfaches beſtimmtes Integral ausgedrückt, erhalten hatten.

§. 570. Um ein Beiſpiel von der Integration der linearen Differenzialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten zu geben, wollen wir die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{ku}{x^2} \qquad (5)$$

nehmen, welche das particuläre Integral $u = ye^{\alpha t}$ hat, wofern y eine Function der einzigen Veränderlichen x iſt, welche der Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{k}{x^2}y = \alpha y \qquad (6)$$

Genüge leiſtet. Das Integral dieſer letzten Gleichung muß zwei willkürliche Conſtanten A, B enthalten und für das vollſtändige Integral der Gleichung (5) kann man $u = \Sigma \cdot ye^{\alpha t}$ nehmen, wo ſich die Summe Σ auf alle möglichen Werthe der Conſtanten A, B, α erſtreckt.

Der Bequemlichkeit der Rechnung wegen wollen wir α^2 für α und $m(m-1)$ für k ſetzen, ſo iſt das vollſtändige Integral der Gleichung (6) nach der Formel (17) im §. 471:

$$y = Ax^m \int_0^{\pi} e^{\alpha x \cos.\omega} \sin.^{2m-1}\omega d\omega + Bx^{1-m} \int_0^{\pi} e^{\alpha x \cos.\omega} \sin.^{1-2m}\omega d\omega.$$

Subſtituiren wir dieſen Werth von y in die Gleichung $u = \Sigma \cdot ye^{\alpha^2 t}$ und ſetzen dann für $e^{\alpha^2 t}$ ſeinen aus der Gleichung (4) gezogenen Werth, indem wir die in dieſer letzten Gleichung vorkommenden ω accentuiren, um ſie von den in dem Ausdrucke von y vorkommenden zu unterſcheiden, ſo erhalten wir:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^m \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} [\Sigma \cdot Ae^{\alpha(x\cos.\omega + 2\omega'\sqrt{-1})}] e^{-\omega'^2} \sin.^{2m-1}\omega d\omega d\omega' d\omega$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{1-m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} [\Sigma \cdot Be^{\alpha(x\cos.\omega + x'\sqrt{-1})}] e^{-\omega'^2} \sin.^{1-2m}\omega d\omega d\omega' d\omega,$$

und wenn man:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Sigma \cdot Ae^{\alpha x} = \varphi x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Sigma \cdot Be^{\alpha x} = \psi x$$

ſetzt, ſo hat man einfacher:

$$u = x^m \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \varphi(x\cos.\omega + 2\omega'\sqrt{-t}) e^{-\omega'^2} \sin.^{2m-1}\omega d\omega d\omega' d\omega$$

$$+ x^{1-m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \psi(x\cos.\omega + 2\omega'\sqrt{-t}) e^{-\omega'^2} \sin.^{1-2m}\omega d\omega d\omega' d\omega.$$

Uebrigens hat Poiſſon dargethan*), daß das Integral, ungeachtet der beiden Functionszeichen φ, ψ nur von der willkürlichen Function von x abhängt, welche den Werth von u für $t = 0$ ausdrückt.

§. 571. Da die Rechnungskunſtgriffe, vermittelſt welcher wir oben die vollſtändigen Integrale verſchiedener partieller Differenzialgleichungen durch beſtimmte Integrale ausgedrückt haben, keine gleichförmige Methode bilden, ſo kann man, wie Fourier zuerſt gethan hat, andere Betrachtungen anwenden, welche ſich der Fundamentaleigenſchaft der linearen Differenzialgleichung enger anſchließen.

Nehmen wir z. B. die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2},$$

welcher durch den particulären Werth:

$$u = Ae^{-\alpha^2 t} \cos.\alpha(x - \xi)$$

*) Journal de l'École polytechnique, 19e cahier, pag. 241.

Genüge geſchieht, wo A, α, ξ unbeſtimmte Parameter bezeichnen. Statt dieſen Parametern durch endliche Intervalle von einander getrennte Werthe beizulegen, kann man annehmen, daß ſie unendlich viele Werthe ſtetig durchlaufen, und man kann ſogar zwiſchen den Parametern A, ξ eine willkürliche Relation:

$$A = \omega(\xi)$$

aufſtellen, wodurch die Allgemeinheit der Auflöſung durchaus nicht beſchränkt wird, ſondern im Gegentheil durch Einführung einer willkürlichen Function, welche man nach den Erforderniſſen der Aufgabe annehmen kann, die erforderliche Allgemeinheit bekommt. Man bemerkt leicht die Analogie, welche zwiſchen dieſem Kunſtgriffe und dem ſtattfindet, deſſen ſich Lagrange und Monge bedient haben, um aus einem particulären Integrale, worin aber eine hinreichende Anzahl willkürlicher Conſtanten fehlen, das Syſtem von Gleichungen abzuleiten, welche vermöge der darin vorkommenden willkürlichen Functionen das allgemeine Integral ausdrücken können (§. 525 und §. 534).

So genügt man z. B. der gegebenen Differenzialgleichung wegen ihrer linearen Form, wenn man:

$$u = \iint e^{-a^2t} \cos.\, \alpha(x - \xi) \cdot \omega(\xi) d\xi d\alpha$$

ſetzt, von welcher Beſchaffenheit die Function ω und die Integrationsgrenzen auch ſein mögen. Ferner wollen wir annehmen, daß ſich die Function u für $t = 0$ auf φx reduciren müſſe, ſo braucht man nach der Fourier'ſchen Formel (§. 435) nur:

$$\omega(\xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \varphi(\xi)$$

zu ſetzen, indem die obern und untern Integrationsgrenzen reſp. $+\infty$ und $-\infty$ ſind, und man hat folglich:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t} \cos.\, \alpha(x - \xi) \varphi\xi d\xi d\alpha. \qquad (7)$$

Wir haben den Werth von u bereits durch ein einfaches beſtimmtes Integral ausgedrückt erhalten, und um dieſen Werth wieder zu finden, braucht man in der vorhergehenden Formel nur die in Beziehung auf α angedeutete Integration zu verrichten. In der That iſt nach der Formel (k) im §. 410:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t} \cos.\, \alpha(x - \xi) d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

folglich:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi\xi d\xi,$$

und es kommt blos noch darauf an, unter dem Integrationszeichen die Hülfsveränderliche zu vertauſchen, indem man

$$\frac{(x - \xi)^2}{4t} = \omega^2, \quad \text{oder} \quad \xi = x + 2\omega\sqrt{t}$$

ſetzt, um wieder auf die Formel (3) zu kommen.

Wenn man ſtatt der gegebenen die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}$$

hätte, ſo müßte man in den Formeln (7) und (3) offenbar t in a^2t verwandeln, wodurch man erhielte:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 a^2 t}\cos.\,\alpha(x-\xi)\,\varphi\xi\,d\xi\,d\alpha$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2a\omega\sqrt{t})e^{-\omega^2}\,d\omega.$$

§. 572. Die vorhergehenden Gleichungen drücken die Fortpflanzungsgesetze der Wärme in einer unendlich langen cylindrischen Stange von einem unendlich kleinen normalen Querschnitte aus, wenn der Wärmeverlust durch Ausstrahlung und durch Berührung an der ganzen Oberfläche der Stange als Null oder unmerklich angenommen wird. Wenn die Stange als unbestimmt lang betrachtet wird, so findet in Beziehung auf die Grenzwerthe von x keine Bedingung mehr statt, wodurch sich im Allgemeinen die Aufgaben, bei welchen man bestimmte zwischen unendlichen Grenzen genommene Integrale anwendet, von denen unterscheiden, bei deren Auflösung man das Integral in Reihen entwickelt, deren Glieder durch die Reihe der Wurzeln einer transcendenten Gleichung gegeben werden.

Es sei nun die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)$$

mit vier unabhängigen Veränderlichen gegeben, welche sich auf die Fortpflanzung der Wärme in einem nach allen Richtungen unbegrenzten homogenen Körper bezieht, und wo sich die Function u für $t=0$ auf $\varphi(x, y, z)$ reduciren muß.

Wenn wir der Einfachheit wegen:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta)\cdot e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)a^2 t} = \theta$$

setzen, so gibt die auf Functionen mit drei Veränderlichen erstreckte Fourier'sche Formel:

$$u = \frac{1}{8\pi^3}\overline{\overline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{\infty}\theta\,.\cos.\,\alpha(x-\xi)\,.\cos.\,\beta(y-\eta)\,.\cos.\,\gamma(z-\zeta)\,.\,d\xi d\eta d\zeta d\alpha d\beta d\gamma.$$

Durch eine Analyse, wie die oben angewandte wird das sechsfache Integral auf ein dreifaches reducirt, und man hat:

$$u = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}\cdot\overline{\overline{\int\int\int}}_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega^2+\omega'^2+\omega''^2)}\varphi(x+2a\omega\sqrt{t}, y+2a\omega'\sqrt{t}, z+2a\omega''\sqrt{t})\,d\omega d\omega' d\omega''.$$

Die Querstriche über und unter den Integrationszeichen deuten an, daß alle Integrale zwischen denselben Grenzen genommen sind.

§. 573. Betrachten wir nun die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\frac{d^2u}{dx^2}, \tag{8}$$

welcher durch die particulären Werthe:

$$A\cos.\,\alpha at\cos.\,\alpha(x-\xi), \quad B\sin.\,\alpha at\cos.\,\alpha(x-\xi)$$

Genüge geschieht, und nehmen wir an, daß sich die Function u, $\frac{du}{dt}$ für $t=0$ resp. auf:

$$u = fx, \qquad (9) \qquad \frac{du}{dt} = fx = a\frac{dFx}{dx} \qquad (10)$$

reduciren; ſo geſchieht der Gleichung (8) und der Bedingungsgleichung (9) Genüge, wenn man:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos.\,\alpha at \cos.\,\alpha(x-\xi) f\xi d\xi d\alpha$$

ſetzt; aber dieſer Werth von u gibt $\frac{du}{dt} = 0$ für $t = 0$, und genügt folglich der Bedingungsgleichung (10) nicht. Dagegen leiſtet der Werth:

$$u = \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin.\,\alpha at}{\alpha} \cos.\,\alpha(x-\xi) f\xi d\xi d\alpha,$$

woraus folgt:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos.\,\alpha at \cos.\,\alpha(x-\xi) f\xi d\xi d\alpha$$

der Gleichung (8) und der Bedingung (10), aber nicht der Bedingung (9) Genüge, weil derſelbe $u = 0$ für $t = 0$ gibt. Es wird alſo der gegebenen Differenzialgleichung und den Bedingungsgleichungen (9), (10) zu gleicher Zeit Genüge geleiſtet, wenn man

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos.\,\alpha at \cos.\,\alpha(x-\xi) f\xi d\xi d\alpha$$
$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin.\,\alpha at}{\alpha} \cos.\,\alpha(x-\xi) f\xi d\xi d\alpha$$

ſetzt. Bekanntlich hat die Gleichung (8), welche die Gleichung für die ſchwingenden Saiten und für die Schallwellen in einer cylindriſchen Röhre iſt, ein Integral unter endlicher Form, wovon das vorhergehende eine Transformation ſein muß. In der That kann der erſte Theil des Werthes von u auf die Form:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\cos.\,\alpha(x+at-\xi) + \cos.\,\alpha(x-at-\xi)] f\xi d\xi d\alpha$$

gebracht werden, und reducirt ſich vermöge des Fourier'ſchen Lehrſatzes auf:

$$\tfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)].$$

Der zweite Theil des Werthes von u verwandelt ſich durch eine ähnliche Transformation in:

$$\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin.\,\alpha(x+at-\xi)}{\alpha} - \frac{\sin.\,\alpha(x-at-\xi)}{\alpha}\right] f\xi d\xi d\alpha. \qquad (11)$$

Das Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin.\,\alpha(x+at-\xi)}{\alpha} - \frac{\sin.\,\alpha(x-at-\xi)}{\alpha}\right] d\alpha$$

reducirt ſich nach §. 413 auf π oder $-\pi$, je nachdem

$$\xi > x-at, \quad \xi < x+at, \quad \text{und folglich: } t > 0,$$

oder:

$$\xi > x+at, \quad \xi < x-at, \quad \text{und folglich: } t > 0$$

iſt. Es verſchwindet für die Werthe von ξ, welche außerhalb der Grenzen

$\xi = x - at$, $\xi = x + at$ liegen, und den Factoren $x + at - \xi$, $x - at - \xi$ entgegengeſetzte Zeichen ertheilen. Das Integral (11) hat alſo zum Werthe:

$$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} f\xi d\xi = \frac{1}{2}[F(x+at) - F(x-at)]$$

und wenn man die beiden Theile des Werthes von u vereinigt, ſo kommt man wieder auf die Gleichung (12) im §. 556.

Für die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right),$$

welche das Fortpflanzungsgeſetz der Wellen in einem Mittel, deſſen Elaſticität in allen Richtungen dieſelbe iſt, oder in einem nicht **cryſtalliſirten Mittel**, ausdrückt, ergibt ſich leicht ein Integral von ähnlicher Form, wie das der Gleichung (8). Es ſeien $f(x, y, z)$, $f(x, y, z)$ die Functionen, welche ſich für $t = 0$ reſp. auf u und $\frac{du}{dt}$ reduciren, und wir wollen

$$a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \theta^2$$

$$f(\xi, \eta, \zeta)\cos.\theta t + f(\xi, \eta, \zeta)\frac{\sin.\theta t}{\theta} = \Theta$$

ſetzen, ſo iſt das Integral:

$$u = \frac{1}{8\pi^3}\overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{\infty} \cos.\alpha(x-\xi)\cos.\beta(y-\eta)\cos.\gamma(z-\zeta)\,.\,\Theta d\xi d\eta d\zeta d\alpha d\beta d\gamma.$$

Aber dieſes ſechsfache Integral, woraus ſich die Geſetze der Erſcheinung ſchwer würden erkennen laſſen, kann, wie **Poiſſon** gezeigt hat *), in das doppelte Integral verwandelt werden:

$$u = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x + at\cos.\theta,\ y + at\sin.\theta\sin.\omega,\ z + at\sin.\theta\cos.\omega)\,t\sin.\theta d\theta d\omega$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x + at\cos.\theta, y + at\sin.\theta\sin.\omega, z + at\sin.\theta\cos.\omega)\,t\sin.\theta d\theta d\omega.$$

Im Allgemeinen beſteht die Schwierigkeit darin, die Ordnung des vielfachen Integrales, auf welches die Anwendung des **Fourier**'ſchen Lehrſatzes unmittelbar führt, ſo viel, als es die Natur der Aufgabe geſtattet, zu erniedrigen; allein dieſe Reduction ſcheint bis jetzt noch keinen allgemeinen Regeln zu unterliegen.

§. 574. Betrachten wir zuletzt noch die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a^2\frac{d^4u}{dx^4} = 0,$$

welche ſich auf die Fortpflanzung der Transverſalſchwingungen eines elaſtiſchen Stabes, welcher zu beiden Seiten des urſprünglichen Erſchütterungsmittelpunktes eine unbeſtimmte Länge hat, bezieht, und wobei wieder angenommen wird, daß $u = fx$ und $\frac{du}{dt} = fx$ für $t = 0$ ſein muß.

Der gegebenen Gleichung geſchieht durch den particulären Werth:

$$u = A\cos.\alpha^2 at\cos.\alpha(x - \xi)$$

*) Nouveaux mémoires de l'Académie des sciences, tom. III.

Genüge, und folglich gibt eine ähnliche Rechnung, wie die frühern für das vollständige Integral:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos.\,\alpha^2\,at\cos.\,\alpha(x-\xi)f\xi d\xi d\alpha$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin.\,\alpha^2\,at}{\alpha^2}\cos.\,\alpha(x-\xi)f\xi d\xi d\alpha.$$

Der erste Theil des Werthes von u läßt sich auf ein einfaches bestimmtes Integral zurückführen; denn nach der ersten der Gleichungen (i) im §. 409 hat man:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos.\,\alpha^2\,at\cos.\,\alpha(x-\xi)\,d\alpha$$
$$=\left[\cos.\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{at}}\right)^2+\sin.\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{at}}\right)^2\right]\sqrt{\frac{\pi}{2at}}$$

und wenn man folglich:

$$\xi = x + 2\omega\sqrt{at} \qquad (12)$$

setzt, so nimmt der erste Theil des Werthes von u folgende Form an:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sin.\,\omega^2+\cos.\,\omega^2)\,f(x+2\omega\sqrt{at})\,d\omega.$$

Wenn also die Function $fx = 0$ ist, oder wenn die Molecule des elastischen Stabes anfangs aus ihren ursprünglichen Lagen des Gleichgewichtes entfernt sind, ohne anfängliche Geschwindigkeiten in den auf der Axe der Stange senkrechten Ebenen zu bekommen, so hat man blos die Gleichung:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sin.\,\omega^2+\cos.\,\omega^2)\,f(x+2\omega\sqrt{at})\,d\omega,$$

welche wegen ihrer Aehnlichkeit mit der Gleichung (3) merkwürdig ist.

Für schwingende Platten, welche in allen Richtungen dieselbe Elasticität haben, werden die Normalschwingungen ausgedrückt durch die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+a^2\left(\frac{d^4u}{dx^4}+2\frac{d^4u}{dx^2dy^2}+\frac{d^4u}{dy^4}\right)=0.$$

Wir wollen annehmen, daß sich die Function u im Anfange der Zeit auf $f(x,y)$ reducire, und daß die Function $\frac{du}{dt}=0$ sei, so wird der Werth von u durch das vierfache Integral:

$$u = \frac{1}{4\pi^2}\overline{\iiint}_{-\infty}^{\infty}\cos.\,(\alpha^2+\beta^2)\,at\cos.\,\alpha(x-\xi)\cos.\,\beta(y-\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,d\alpha\,d\beta$$

ausgedrückt. Das doppelte Integral:

$$\overline{\iint}_{-\infty}^{\infty}\cos.\,(\alpha^2+\beta^2)\,at\cos.\,\alpha(x-\xi)\cos.\,\beta(y-\eta)\,d\alpha d\beta$$
$$=\overline{\iint}_{-\infty}^{\infty}[\cos.\,\alpha^2 at\cos.\,\beta^2 at-\sin.\,\alpha^2 at\sin.\,\beta^2 at]\cos.\,\alpha(x-\xi)\cos.\,\beta(y-\eta)\,d\alpha d\beta \qquad (13)$$

kann erhalten werden; denn wenn man zuerſt die Integration in Beziehung auf α nach den Formeln (j) im §. 409 verrichtet, ſo findet man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\cos.\alpha^2 at \cos.\beta^2 at - \sin.\alpha^2 at \sin.\beta^2 at] \cos.\alpha(x-\xi)d\alpha$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{at}} \cdot \left[\cos.\beta^2 at \sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega^2\right) - \sin.\beta^2 at \sin.\left(\frac{\pi}{4}-\omega^2\right)\right],$$

wo ω den durch die Gleichung (12) gegebenen Werth hat. Das Integral (13) verwandelt ſich alſo in:

$$\sqrt{\frac{\pi}{at}} \cdot \sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \cos.\beta^2 at \cos.\beta(y-\eta)d\beta$$

$$-\sqrt{\frac{\pi}{at}} \cdot \sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \sin.\beta^2 at \cos.\beta(y-\eta)d\beta.$$

Aber in dieſem letzten Ausdrucke werden die Integrationen in Beziehung auf β auf dieſelbe Weiſe verrichtet, und wenn man

$$\eta = y + 2\omega' \sqrt{at}$$

ſetzt; ſo erhält man für den Werth des Integrales (13):

$$\frac{\pi}{at}\left[\sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega^2\right)\sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega'^2\right) - \sin.\left(\frac{\pi}{4}-\omega^2\right)\sin.\left(\frac{\pi}{4}-\omega'^2\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{at}\sin.(\omega^2+\omega'^2).$$

Folglich nimmt der Werth von u die eben ſo einfache als elegante Form an:

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sin.(\omega^2+\omega'^2) \cdot f(x+2\omega\sqrt{at},\ y+2\omega'\sqrt{t})d\omega d\omega'.$$

Sechstes Kapitel.

Ueber die Conſtruction der partiellen Differenzialgleichungen.

§. 575. Betrachten wir zuvörderſt die partielle Differenzialgleichung der erſten Ordnung mit drei Veränderlichen:

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \text{oder} \quad q = f(x, y, z, p), \qquad (a)$$

und es ſei φx der Werth von z als Function von x, wenn die Veränderliche $y = 0$ iſt; ſo hat man für $y = 0$:

$$q = f(x, 0, \varphi x, \varphi' x), \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{dy} = \Phi x.$$

Wenn alſo die Function Φx für alle Werthe von x endlich bleibt, und Δy eine ſehr kleine Größe der erſten Ordnung bezeichnet, ſo hat man bis auf

größen der zweiten Ordnung genau $\Delta z = \Phi x \cdot \Delta y$, so daß bei diesem Grade on Annäherung:

$$z = \varphi x + \Phi x \cdot \Delta y = \varphi_1 x$$

er Ausdruck des $y = \Delta y$ entsprechenden Werthes von z als Function von ist, und ebenso könnte man den $y = 2\Delta y$ entsprechenden Ausdruck $z = \varphi_2 x$ estimmen, u. s. f.

Wir wollen x, y, z als die drei rechtwinkligen Coordinaten einer krummen läche betrachten, so ist:

$$z = \varphi x \qquad (b)$$

ie Gleichung der Durchschnittslinie dieser Fläche mit der Ebene der xz und er Durchschnitt der Ebene, welche die krumme Fläche nach dieser Linie berührt, mit der Ebene der xz, ist die Tangente an der Curve (b). Vermöge ieser Bedingung und der Gleichung (a) ist die Richtung der Berührungsebene ir jeden Werth von x vollständig bestimmt, so daß man im Raume die ylindrische Fläche beschreiben kann, welche die vermittelst der Gleichung (a) u construirende Fläche nach der willkürlichen Curve (b) umhüllt. Wenn man ie Umhüllungsfläche mit einer zu der Ebene der xz parallelen Ebene, deren Entfernung von dieser Coordinatenebene eine sehr kleine Größe der ersten Ordnung ist, durchschneidet, so ist die Ordinate des Durchschnittes der Umhüllungsfläche nur um eine sehr kleine Größe der zweiten Ordnung von der Ordinate der Durchschnittslinie der umhüllten Fläche mit derselben Ebene verschieden, und folglich kann der Durchschnitt der Umhüllungsfläche für die Berührungslinie der krummen Fläche mit einer zweiten Umhüllungsfläche, welche an wie die erste construirt, genommen werden, u. s. f.

Statt die Gleichung der Durchschnittscurve der krummen Fläche mit der Ebene der xz willkürlich anzunehmen, hätte man auch die Gleichung des Durchschnittes der krummen Fläche mit jeder andern parallelen Ebene geben können. Hieraus folgt, daß, wenn man einen Ausdruck von z durch x, y angeben kann, welcher der Gleichung (a) genügt, dieser Ausdruck eine willkürliche Function enthalten muß, welche man nach Belieben annehmen kann, um ie krumme Fläche durch eine gegebene Curve gehen zu lassen, wenn derselbe enselben Grad von Allgemeinheit haben soll, als die partielle Differenzialleichung, der er Genüge leistet.

§. 576. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man für die Conruction einer krummen Fläche im Raume die Construction ihrer Niveaulinien §. 126) in einer horizontalen Ebene substituirt. Gesetzt, daß außer der Gleichung (a) auch der Durchschnitt der krummen Fläche mit der horizontalen Ebene der x, y oder die Gleichung:

$$y = \varphi x \qquad (\beta)$$

ieser Durchschnittslinie gegeben sei, so hat man für alle Punkte der krummen läche, welche der Curve (β) angehören, $p + q\varphi' x = 0$, und diese Gleichung ibt in Verbindung mit der gegebenen Gleichung (a) die Werthe von p, q, owie die von $p^2 + q^2$ als Functionen von x, y für jeden Punkt der krummen läche, welcher der Niveaulinie (β) angehört. Wenn man in jedem Punkte ieser Curve Normale zieht und auf jeder Normale eine Länge nimmt, welche er sehr kleinen Größe der ersten Ordnung $\frac{\Delta z}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ gleich ist, so bestimmt man auf der Ebene der xy bis auf Größen der zweiten Ordnung genau ie Projection einer zweiten Niveaulinie, für welche die Ordinate z den Werth

Δz hat, und wenn man daſſelbe Verfahren weiter fortſetzt, ſo kann man ſich dieſer Curve zum Beſchreiben der Projection einer dritten Niveaulinie, deren Ordinate z den Werth $2\Delta z$ hat, bedienen, u. ſ. f.

§. 577. Dieſe Betrachtungen erſtrecken ſich auf die partiellen Differenzialgleichungen der erſten Ordnung mit einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen. Es ſei die Differenzialgleichung:

$$F\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dz} = f\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right) \qquad (c)$$

gegeben, vermittelſt welcher man die Function u von drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z conſtruiren ſoll. Zu dieſem Zwecke iſt es nothwendig, daß die Function $u = \varphi(x, y)$ für einen particulären Werth von z, z. B. für $z = 0$, angegeben wird. Alsdann hat man für die ſehr kleine Größe der erſten Ordnung $z = \Delta z$ die Gleichung:

$$\frac{du}{dz} = f\left[x, y, 0, \varphi(x, y), \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}\right] = \Phi(x, y),$$

woraus bis auf Größen der zweiten Ordnung $\Delta u = \Phi(x, y) \cdot \Delta z$ genau folgt:

$$u \doteq \varphi(x, y) + \Phi(x, y) \cdot \Delta z = \varphi_1(x, y).$$

Ebenſo würde man den $z = 2\Delta z$ entſprechenden Werth $u = \varphi_2(x, y)$ beſtimmen, u. ſ. f.

Wenn man alſo einen Ausdruck von u als Function von x, y, z angeben kann, welcher der Gleichung (c) genügt, ſo muß dieſer Ausdruck, um denſelben Grad von Allgemeinheit zu haben, als die partielle Differenzialgleichung, welcher er Genüge leiſtet, eine willkürliche Function von zwei Veränderlichen enthalten, welche man ſo beſtimmen kann, daß ſich die Function u auf eine gegebene Function von zwei der Veränderlichen x, y, z reducirt, wenn man der dritten Veränderlichen einen gewiſſen particulären Werth beilegt.

Daſſelbe erhellet auch aus der Betrachtung der Niveauflächen (§. 129); denn geſetzt, man hätte im Raume eine erſte Niveaufläche:

$$z = \varphi(x, y) \qquad (\gamma)$$

conſtruirt, für welche die Function u einen gewiſſen particulären Werth, z. B. den Werth Null hat, für die Punkte (x, y, z), welche der krummen Fläche:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} = \frac{1}{q} \cdot \frac{du}{dy} \qquad (\gamma')$$

angehören, wo p, q die ſich aus der Gleichung (γ) ergebenden Werthe von $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ bezeichnen. Die Gleichungen (c) und (γ') beſtimmen folglich für die in Rede ſtehenden Punkte die Werthe der drei partiellen Ableitungen $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$, und folglich den Werth der Wurzelgröße:

$$R = \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}.$$

Wenn man nun in jedem Punkte der Fläche (γ) eine Normale errichtet und auf jeder Normale eine Länge nimmt, welche der ſehr kleinen Größe der erſten

Ordnung $\frac{\Delta u}{R}$ gleich ist, so bestimmt man bis auf Größen der zweiten Ordnung genau eine zweite Niveaufläche im Raume, für welche die Function u den Werth Δu hat (§. 129, 151 und 238). Durch die Fortsetzung desselben Verfahrens construirt man die Function u, wenn man die Reihe ihrer Niveauflächen construirt.

§. 578. Eine partielle Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zwischen der Function z und den unabhängigen Veränderlichen x, y hat in dem allgemeinsten Falle die Form:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Wir wollen zunächst annehmen, daß sie sich auf:

$$F(x, y, z, p, q, r) = 0$$

reducirt, so kann man sich derselben, wenn man sie auf die Form:

$$q = f(x, y, z, p, r)$$

bringt, bedienen, um, wie vorhin (§. 575) die Function z zu construiren, wenn man zuvor den $y = 0$ entsprechenden Werth $z = \varphi x$ willkürlich angenommen hat.

Aber wenn man dieselbe Gleichung (d) in Beziehung auf r auflöst, und sie verwandelt sich in:

$$r = \frac{d^2 z}{dx^2} = f(x, y, z, p, q),$$

so construirt man successive die Werthe von z für $x = \Delta x$, $x = 2\Delta x$, $x = 3\Delta$, ꝛc., indem man die Functionen von y willkürlich annimmt, welche die Werthe von z und von $p = \frac{dz}{dx}$ für $x = 0$ ausdrücken. Denn es seien ψy und ωy diese beiden willkürlichen Functionen, so hat man für $x = 0$:

$$r = \frac{dp}{dx} = f(0, y, \psi y, \omega y, \psi' y) = \Phi y,$$

woraus bis auf Größen der zweiten Ordnung genau folgt:

$$\Delta p = \Phi y \cdot \Delta x, \quad p + \Delta p = \omega y + \Phi y \cdot \Delta x = \omega_1 y.$$

Ueberdies verwandeln sich die Functionen z und q, deren Werthe ψy und $\psi' y$ für $x = 0$ sind, für $x = \Delta x$ bei demselben Grade von Annäherung in:

$$z + \Delta z = \psi y + p\Delta x = \psi y + \omega y \cdot \Delta x = \psi_1 y,$$
$$q + \Delta q = \psi'_1 y.$$

Nun ist aber für $x = 2\Delta x$ der Werth von z:

$$\psi_1 y + \omega_1 y \cdot \Delta x = \psi_2 y,$$

und wenn man dieselbe Rechnung successive weiter fortsetzt, so bestimmt man die Reihe der Werthe von z.

Man sieht also, daß die Gleichung mit x, y, z, welche der Gleichung (d) mit der möglichsten Allgemeinheit genügt, eine oder zwei willkürliche Functionen enthalten kann, je nachdem diese willkürlichen Functionen durch Bedingungen in Beziehung auf die anfänglichen Werthe von x, oder durch Bedingungen in Beziehung auf die anfänglichen Werthe von y bestimmt werden müssen. Dieses

analytiſche Factum, welches, als man es zum erſten Male an der Gleichung $r = q$ bemerkte (§. 551), faſt paradox erſchien, erklärt ſich alſo ſehr einfach durch die Natur der partiellen Differenzialgleichungen.

§. 579. Wir wollen nun annehmen, daß die Ableitung s in der gegebenen Differenzialgleichung von der Form:

$$F(x, y, z, p, q, r, s) = 0 \qquad (\varepsilon)$$

vorkommt. Wenn es darauf ankommt, die Function vermittelſt ihres anfänglichen Werthes $z = \varphi x$ für $y = 0$ zu conſtruiren, ſo gibt die Subſtitution dieſes anfänglichen Werthes die Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$F\left(x, 0, \varphi x, \varphi' x, q, \varphi'' x, \frac{dq}{dx}\right) = 0, \qquad (\varepsilon)$$

woraus man durch Integration den anfänglichen Werth von q als Function von x ableiten kann. Der Ausdruck dieſes anfänglichen Werthes iſt von der willkürlichen Function φx abhängig, und enthält außerdem eine durch die Integration eingeführte willkürliche Conſtante, d. h., um die Function z zu conſtruiren, muß man außer der Function φx den Zahlenwerth von q für $y = 0$ und $x = 0$, oder für jeden andern particulären Werth von x annehmen. Es ſei $q = \Phi(x, C)$ der Werth von q als Function von x und der durch die Integration der Gleichung (ε) erhaltenen Conſtante C, ſo hat man für $y = \Delta y$ bis auf Größen der zweiten Ordnung genau:

$$z = \varphi x + \Phi(x, C) \cdot \Delta y = \varphi_1 x.$$

Für denſelben Werth von y hat man $q = \Phi_1(x, C_1)$, wo C_1 eine durch die Integration der Gleichung:

$$F\left(x, \Delta y, \varphi_1 x, q, \varphi_1'' x, \frac{dq}{dx}\right) = 0$$

eingeführte willkürliche Conſtante bezeichnet; u. ſ. f. Die Reihe der willkürlichen Conſtanten C, C_1, ꝛc. kann als eine willkürliche Function von y betrachtet werden, welche, wie die Function φx gegeben ſein muß, um die Function z, welche der Gleichung (ε) genügen muß, conſtruiren zu können.

Wenn man für $x = 0$ die anfänglichen Werthe $z = \psi y$, $p = \omega y$ gäbe, ſo hätte man zu gleicher Zeit:

$$r = \frac{dp}{dx} = f(0, y, \psi y, \omega y, \psi' y, \omega' y),$$

und man käme wieder auf den im vorhergehenden § betrachteten Fall.

Wenn endlich die Ableitung t ſowohl als r in der gegebenen Gleichung vorkäme, ſo wäre die Symmetrie wieder hergeſtellt, und die Art der Conſtruction wäre dieſelbe, man möchte die Gleichung in Beziehung auf r oder in Beziehung auf t auflöſen.

Dieſe Unterſuchung ließe ſich leicht auf Differenzialgleichungen von höhern Ordnungen mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher ausdehnen.

§. 580. Wenn die Zeit eine der unabhängigen Veränderlichen iſt, ſo iſt zu bemerken, daß die zur Conſtruction der partiellen Differenzialgleichung erforderlichen willkürlichen Functionen immer für die Anfangswerthe dieſer Veränderlichen gegeben ſein müſſen. So muß man z. B. bei der Conſtruction der Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}, \qquad (1)$$

wo u die Temperatur des der Abscisse x entsprechenden Querschnittes einer cylindrischen Stange am Ende der Zeit t bezeichnet (§. 562), annehmen, daß die Function $u = \varphi x$, welche das Gesetz der Temperaturen der Stange ausdrückt, für einen bestimmten Werth von t, z. B. für $t = 0$ gegeben ist. Abgesehen von der Bedeutung der Buchstaben u, x, t, könnte man ohne Zweifel dieselbe Differenzialgleichung construiren, wenn die Werthe ψt und ωt von u und von $\frac{du}{dx}$ für einen bestimmten Werth von x, z. B. für $x = 0$, gegeben wären; allein die Functionen ψt und ωt können keine gegebenen Größen der Aufgabe sein, und im Gegentheil ist die Reihe der Werthe von u nothwendig vermöge der Gleichung (1) in Verbindung mit der anfänglichen Bedingung $u = \varphi x$ bestimmt. Dieses ist eine Folgerung aus der Eigenschaft der Veränderlichen t, auf welche wir bereits mehrere Male aufmerksam gemacht haben, nämlich, daß t eine nothwendige unabhängige veränderliche Größe und keine blos willkürlich angenommene ist.

Die oben angegebenen Verfahrungsarten sind in der Ausübung fast unbrauchbar; allein es war auch blos unser Zweck, zu zeigen, was eine partielle Differenzialgleichung, sie mag ein analytisches Integral haben, oder nicht, an und für sich bedeutet.

§. 581. Alle diese Verfahrungsarten der arithmetischen Construction der partiellen Differenzialgleichungen setzen voraus, daß die Ableitungen endliche Werthe behalten. Es sei z. B. die Differenzialgleichung:

$$p(y - y_0) - qx = 0 \qquad (2)$$

gegeben, welche zu den Rotationsflächen um eine auf der Ebene der xy senkrechte Axe, welche die Axe der y in einem Punkte trifft, dessen Entfernung vom Anfangspunkte der y_0 bezeichnet wird; gehören, so kann man diese Gleichung auf die Form:

$$q = \frac{p(y - y_0)}{x}$$

bringen, und wenn man annimmt, daß der Werth:

$$z = \varphi x \qquad (3)$$

für $y = 0$ gegeben ist, so kann man das Constructionsverfahren im §. 575 anwenden, wofern x zwischen den Constructionsgrenzen nicht verschwindet, weil sonst der Werth von q unendlich werden würde. In der That haben wir im §. 256 bemerkt, daß die Meridiancurve einer Rotationsfläche um eine gegebene Axe im Allgemeinen nicht in ihrer ganzen Ausdehnung bestimmt ist, weil die Durchschnittscurve der krummen Fläche mit einer Ebene, wie die der xz, gegeben wird, und daß folglich die Rotationsfläche selbst nicht in ihrer ganzen Ausdehnung bestimmt ist. Wenn man durch die Punkte, wo die Curve (3) die Axe der z schneidet, parallele Ebenen zu der Ebene der xy legt, so ist, je nach der Richtung, welche man der Rotationsaxe gibt, nur der zwischen diesen Ebenen liegende Theil der Rotationsfläche durch das System der Gleichungen (2) und (3) bestimmt. Streng genommen, gibt sogar die Construction im §. 575 nicht dieses ganze Stück der Rotationsfläche, sondern nur das Stück, welches zwischen andern zu der Ebene der xy

parallelen Ebenen liegt, die den durch die Punkte, wo die Curve (3) die Axe der x trifft, gelegten Ebenen ſich beliebig nähern. Die Stetigkeitsunterbrechung, welche $x = 0$ entſpricht, zeigt an, daß die Conſtruction nicht auf Theile der Oberfläche erſtreckt werden kann, welche durch die Data der Conſtruction, nämlich durch die Gleichungen (2) und (3) nicht beſtimmt werden können.

Achtes Buch.

Rechnung mit endlichen Differenzen.

Erſtes Kapitel.

Rechnung mit endlichen Differenzen und Integrale oder Summen endlicher Differenzen für die entwickelten Functionen mit einer einzigen veränderlichen Größe.

§. 582. Gleich zu Anfang dieſes Werkes (Buch 1, Kap. 4) haben wir die endlichen Differenzen zwiſchen den Werthen betrachtet, welche eine veränderliche Größe ſucceſſive annimmt, und ſie durch das vor die Veränderliche geſetzte Zeichen Δ angedeutet, und haben mit der Reihe dieſer Differenzen, wie mit der urſprünglichen Reihe, operirt, indem wir die Differenzen der ſucceſſiven Glieder der erſten Differenzenreihe nahmen und ſo die Differenzen der zweiten Ordnung, welche durch Δ^2 bezeichnet wurden, bildeten, u. ſ. f. Allein es war dort blos unſer Zweck, die Theorie der unendlich kleinen Differenzen der verſchiedenen Ordnungen und die Prinzipien der Differenzialrechnung zu begründen, an welche ſich das Wichtigſte der Theorie der Functionen, was bis jetzt bekannt iſt, anſchließt. Es finden jedoch zwiſchen den endlichen Differenzen der verſchiedenen Ordnungen, und den Veränderlichen, wovon ſie abgeleitet ſind, Relationen ſtatt, welche ebenfalls entwickelt zu werden verdienen, wodurch ein neuer Zweig der Theorie der Functionen, nämlich die ſogenannte **endliche Differenzenrechnung** entſteht, mit deren kurzen Auseinanderſetzung wir das gegenwärtige Werk beſchließen wollen.

Wir wollen durch:

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n \qquad (y_n)$$

eine Reihe von $n+1$ Werthen der Größe y bezeichnen, ſo haben wir (§. 43):

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 + \ldots$$
$$\ldots\ldots + \Delta^n y_0. \qquad (a)$$

Dieſe Formel, worin der Werth von y_n vermittelſt des anfänglichen Werthes von y_0 und ſeiner Differenzen bis zu der n^{ten} Ordnung incl. ausgedrückt wird, kann nach dem im §. 43 Geſagten ſymboliſch ausgedrückt werden durch:

$$y_n = (1 + \Delta)^n y_0, \qquad (\alpha)$$

und umgekehrt kann die Differenz $\Delta^n y_0$ durch die Glieder der Reihe (y_n) ausgedrückt werden; denn durch succeſſive Subſtitutionen erhält man die Gleichungen:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \; \Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0, \text{ ꝛc.},$$

welche ſämmtlich in der allgemeinen Formel:

$$\Delta^n y_0 = y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} y_{n-3}$$
$$+ \ldots\ldots \pm y_0 \qquad (b)$$

enthalten ſind, auf die man das gewöhnliche inductoriſche Beweisverfahren leicht anwenden kann. Denn geſetzt, die Formel (b) ſinde für den Index n ſtatt, ſo hat man:

$$\Delta^{n+1} y_0 = \Delta^n y_1 - \Delta^n y_0 = y_{n+1} - \frac{n}{1} y_n + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-1}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} y_{n-2} + \ldots - y_n + \frac{n}{1} y_{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} + \ldots$$
$$= y_{n+1} - \frac{n+1}{1} y_n + \frac{(n+1)n}{1.2} y_{n-1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} y_{n-2} + \text{ ꝛc.},$$

ſo daß die Formel noch für den Index $n+1$ ſtattfindet. Uebrigens läßt ſie ſich ſymboliſch durch:

$$\Delta^n y_0 = (y - 1)^n \qquad (\beta)$$

ausdrücken, wofern man nach der Entwickelung die Exponenten von y in Indices verwandelt und in dem letzten Gliede der Entwickelung y_0 ſtatt der Einheit ſetzt.

§. 583. Wir wollen nun y als eine Function einer andern Veränderlichen x betrachten, ſo daß, wenn die Veränderliche x succeſſive die Werthe:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n \qquad (x_n)$$

durchläuft, die Function y succeſſive die correſpondirenden Werthe:

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n \qquad (y_n)$$

annimmt, und alsdann beſteht der Zweck der Berechnung der Differenzen der Function $y = fx$ darin, dieſe Differenzen als Functionen der Differenzen der Veränderlichen x auszudrücken, ſobald die Form der Function f angegeben iſt.

Die einfachſte Vorausſetzung, welche man machen kann, beſteht darin, daß die Veränderliche x nach gleichen Incrementen zunimmt, ſo daß ſich die Reihen (x_n) und (y_n) reſp. in:

$$x_0, x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x, x_0 + 3\Delta x, \ldots\ldots x_0 + n\Delta x;$$
$$fx, f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x), f(x_0 + 3\Delta x), \ldots f(x_0 + n\Delta x)$$

verwandeln.

In dieſer Vorausſetzung hindert nichts, $\Delta x = 1$ zu ſetzen; denn wenn $\Delta x = h$ wäre, wo h eine von der Einheit verſchiedene Conſtante iſt, ſo brauchte man nur $x = x_0 + ih$ zu ſetzen, um y in eine Function von einer neuen Veränderlichen i zu verwandeln, welche nach Incrementen zunimmt, die der Einheit gleich ſind.

Wenn die Veränderliche x nicht nach gleichen Incrementen zunähme, so wäre die Berechnung der Differenzen der Function y so lange eine unbestimmte Aufgabe, als das Gesetz der auf einander folgenden Werthe von x nicht angegeben ist, und folglich müßte jedes Glied x_i der Reihe (x_n) einen bestimmten Werth annehmen, sobald der Zahlenwerth des Index i gegeben, der $x_i = fi$ wäre. Aber alsdann wäre y auch eine Function von i, von welcher man die Differenzen nehmen könnte, wenn angenommen würde, daß die Veränderliche, wovon sie abhängt, die Reihe der natürlichen Zahlen durchläuft, und folglich nach constanten der Einheit gleichen Incrementen wächst.

Diese Veränderliche i, welche den Index, oder die Ordnungszahl eines Gliedes in der Reihe, wozu dasselbe gehört, bezeichnet, ist folglich die nothwendig unabhängig veränderliche Größe, von welcher man sich alle übrigen Veränderlichen als abhängig denken kann, und welche hier vermöge einer in philosophischer Beziehung sehr merkwürdigen Analogie dieselbe Rolle spielt, wie die Veränderliche t, welche die Zeit bezeichnet, in der Theorie der Fluxionen.

Im Allgemeinen kann eine Reihe von Gliedern, welche sich nach einem bestimmten Gesetze ändern, von einem willkürlich gewählten Anfangsgliede aus vor- und rückwärts beliebig weit fortgesetzt werden, und man muß sich daher im Allgemeinen vorstellen, daß die Veränderliche i successive die Reihe der ganzen Zahlen, sowohl der positiven, als negativen durchläuft, wo übrigens bei den Anwendungen auf besondere Untersuchungen auch ein Theil dieser Reihe wegfallen kann.

§. 584. Die Veränderliche i, welche einen Index oder eine Ordnungszahl bezeichnet, ist nothwendig discontinuirlich; aber die Veränderlichen x, y können stetige Größen ausdrücken, und obgleich sich die Differenzenrechnung nur auf Reihen von Werthen bezieht, welche durch endliche Intervalle von einander getrennt sind; so müssen doch die Resultate der Rechnung verschieden interpretirt werden, je nachdem sie auf wesentlich continuirliche oder discontinuirliche Größen angewandt werden.

Denn betrachten wir die beiden Reihen:

$$\ldots y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_i, \ldots \quad (\alpha)$$

$$\ldots \Delta y_{-3}, \Delta y_{-2}, \Delta y_{-1}, \Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \ldots \Delta y_i, \ldots \quad (\gamma)$$

und nehmen der Einfachheit wegen an, daß das allgemeine Glied jeder derselben unmittelbar als eine Function des Index i gegeben ist, so ist klar, daß man zu jedem Gliede der Reihe (α) eine willkürliche Constante C addiren könnte, ohne daß die aus der ersten abgeleitete Reihe (γ) dadurch verändert würde. Umgekehrt, wenn das allgemeine Glied Δy_i oder die Reihe (γ) gegeben ist, und man kann durch irgend ein Mittel eine Function y_i finden, deren Differenz der ersten Ordnung Δy_i ist; so muß man zu y_i eine willkürliche Constante C addiren, um die Reihe (α) in ihrer möglichst größten Allgemeinheit zu erhalten. Die Reihe (α) wird also vermittelst der Reihe γ) nur dann vollständig bestimmt, wenn der Zahlenwerth eines Gliedes der ersten Reihe, z. B. der Zahlenwerth des Gliedes y_0 gegeben ist, und hierin zeigt sich wieder eine vollkommene Aehnlichkeit zwischen den Differenzen und Differenzialen.

Wir wollen nun annehmen, daß es sich nicht mehr um die bloße Construction von Reihen handle, sondern daß man, indem die Veränderlichen x, y stetige Größen bezeichnen, für alle möglichen Werthe von y und x

$$y = fx, \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - fx = f(x, x + \Delta x) \quad (\varphi)$$

habe; so wird die Function f nicht blos nicht geändert, wenn man zu fx eine Constante C, sondern auch, wenn man eine periodische Function:

$$\omega(x, \Delta x)$$

zu fx addirt, welche jedesmal dieſelben Werthe wieder annimmt, wenn x um Δx zunimmt, und welche überdies eine beliebige Form haben kann. Wenn alſo umgekehrt die Function f gegeben iſt, und man kann durch irgend ein Mittel eine Function f finden, welche f zur Differenz hat; ſo bleibt die Function y nicht blos ihrem Zahlenwerthe, ſondern auch ihrer Form nach noch unbeſtimmt.

Um vermittelſt der Gleichung (f) eine Curve zu conſtruiren, deren Ordinate y iſt, muß man ſich vorſtellen, daß man vorläufig ganz willkürlich das Curvenſtück MN (Fig. 103), deſſen Endpunkte den Abſciſſen $OP = x_0$, $OQ = x_0 + \Delta x$ entſprechen, beſchrieben habe, und daß die Differenz HN der Ordinaten der beiden Endpunkte der Werth von Δy iſt, welchen die Gleichung (f) für $x = x_0$ gibt. Alsdann iſt die Curve in ihrem ganzen Verlaufe beſtimmt; denn es ſei $Op = x$ irgend eine zwiſchen x_0 und $x_0 + \Delta x$ liegende Abſciſſe; ſo nehme man $pq = \Delta x$, und alsdann iſt die Differenz der Ordinaten pn, qn vermöge der Gleichung (f) gegeben. Folglich beſtimmt der Zug des Bogens MN in Verbindung mit der Gleichung (f) auch den Zug des Bogens NN_1, deſſen Endpunkte die Ordinaten $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x$ haben, und da dieſelbe Conſtruction, ſowohl in dem Sinne der poſitiven, wie in dem der negativen x, beliebig oft wiederholt werden kann; ſo folgt, daß der Zug der ganzen Curve beſtimmt iſt, wobei wohl zu bemerken iſt, daß derſelbe Stetigkeitsunterbrechungen einer beliebigen Ordnung darbieten kann.

§. 585. Die Operation, vermöge welcher man aus dem Gliede Δy_i das Glied y_i, oder die Reihe (c) aus der Reihe (γ) ableiten kann, iſt eine Summation im eigentlichen Sinne des Wortes; denn es iſt identiſch:

$$y_i = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_{i-1},$$

ſo daß man durch eine bloße algebraiſche Addition die Reihe (c) aus der Reihe (γ) ableiten kann, wofern man übrigens das Anfangsglied y_0 kennt, welches die Stelle der eben erwähnten Conſtanten oder willkürlichen Function vertritt, je nachdem y eine discontinuirliche oder continuirliche Veränderliche iſt.

Sowie man das Zeichen $\int$ zur Andeutung einer Summe von Differenzialen oder eines eigentlichen Integrales anwendet, ebenſo bedient man ſich des Zeichens Σ, um eine eigentliche Summe oder ein Integral für endliche Differenzen anzuzeigen. Die Zeichen Σ und Δ ſind einander entgegengeſetzt, und heben ſich gegenſeitig auf, wie die Zeichen $\int, d$. So folgt z. B. aus der vorhergehenden Formel:

$$\Sigma y_i = \Sigma y_0 + y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{i-1}, \qquad (d)$$

und das Glied Σy_0 bezeichnet alsdann die durch die Integration eingeführte willkürliche Conſtante oder Function.

Wenn man eine ähnliche Bezeichnung wie die, welche man gegenwärtig für die gewöhnlichen beſtimmten Integrale anwendet, gebraucht, ſo iſt:

$$\Sigma y_i - \Sigma y_0 = \Sigma_0^i y_i,$$

und folglich:

$$\Sigma_0^i y_i = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{i-1}. \qquad (e)$$

Wir haben das Zeichen Σ im Verlaufe dieſes Werkes ſchon als Summenzeichen angewandt, und zuweilen bedient man ſich der Bezeichnung:

$$\sum_{i_0}^{i_1} y_i,$$

um die Summe der Werthe der Function y_i für alle Werthe des Index i von

$= i_0$ bis $i = i_1$ incl. kurz anzudeuten. Die Formel (e) zeigt, daß das letzte Glied y_i von dieſer Summe ausgeſchloſſen bleiben muß, wenn das Zeichen Σ ein Integral bei endlichen Differenzen andeutet, und in dem entgegengeſetzten Falle wird jede Zweideutigkeit beſeitigt, wenn man S für Σ ſetzt, und ſchreibt:

$$S_{i_0}^{i_1} y_i.$$

Die durch das Zeichen Σ angedeutete Operation kann ebenſo, wie die durch das Zeichen Δ angezeigte umgekehrte Operation beliebig oft wiederholt werden, und dieſe Wiederholung wird ebenfalls durch einen oben zur Rechten des Zeichens Σ geſetzten Index angedeutet. Aus der Formel (d) folgt alſo:

$$\Sigma^2 y_i = \Sigma^3 y_0 + \Sigma y_0 + \Sigma y_1 + \Sigma y_2 + \ldots + \Sigma y_{i-1}$$

$$\Sigma^3 y_i = \Sigma^3 y_0 + \Sigma^2 y_0 + \Sigma^2 y_1 + \Sigma^2 y_2 + \ldots + \Sigma^2 y_{i-1} \text{ ꝛc.}$$

Da $\Sigma y_1, \Sigma y_2, \ldots \Sigma y_{i-1}$ durch die Formel (d) als Functionen von Σy_0 beſtimmt werden, ſo ſieht man, daß der Ausdruck $\Sigma^2 y_i$ zwei willkürliche Conſtanten oder Functionen, nämlich $\Sigma^2 y_0$ und Σy_0 enthält. Der Werth von $\Sigma^3 y_i$ iſt von dieſen beiden willkürlichen Größen und außerdem von einer dritten Größe derſelben Art $\Sigma^3 y_0$ abhängig, und im Allgemeinen iſt das unbeſtimmte Integral $\Sigma^n y_i$ je nach der Beſchaffenheit der Größe y von n Conſtanten oder willkürlichen Functionen abhängig.

§. 586. Wenn u, v, w, ... beliebige Functionen derſelben veränderlichen Größe bezeichnen, und a eine Conſtante iſt, ſo hat man offenbar:

$$\Delta(u + v + w + \ldots.) = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots.$$

$$\Sigma(u + v + w + \ldots.) = \Sigma u + \Sigma v + \Sigma w + \ldots.$$

$$\Delta \cdot au = a\Delta u, \quad \Sigma \cdot au = a\Sigma u.$$

Das Verfahren der theilweiſen Integration (§. 55) iſt auf die Integrale Σ wie auf die gewöhnlichen Integrale anwendbar. Wenn man

$$\Sigma \cdot uv = v\Sigma u + w$$

ſetzt, wo w eine zu beſtimmende unbekannte Function bezeichnet, ſo erhält man, wenn man von beiden Theilen dieſer Gleichung die Differenzen nimmt:

$$uv = (v + \Delta v)\,\Sigma(u + \Delta u) - v\Sigma u + \Delta w,$$

folglich:

$$\Delta w = -\Delta v \Sigma(u + \Delta u),$$

und mithin:

$$\Sigma \cdot uv = v\Sigma u - \Sigma[\Delta v \Sigma(u + \Delta u)],$$

oder wenn man u_1 ſtatt $u + \Delta u$ ſetzt:

$$\Sigma \cdot uv = v\Sigma u - \Sigma(\Delta v \Sigma u_1).$$

Durch Wiederholung derſelben Rechnung ergibt ſich:

$$\Sigma \cdot uv = v\Sigma u - \Delta v \Sigma^2 u_1 + \Sigma(\Delta^2 v \Sigma^2 u_2)$$

$$\Sigma \cdot uv = v\Sigma u - \Delta v \Sigma^2 u_1 + \Delta^2 v \Sigma^3 u_2 - \Sigma(\Delta^3 v \Sigma^3 u_3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma \cdot uv = v\Sigma u - \Delta v \Sigma^2 u_1 + \Delta^2 v \Sigma^3 u_2 - \Delta^3 v \Sigma^4 u_3 + \text{ꝛc.}$$

Dieſe letzte Gleichung kann man auf folgende Form bringen:

$$\Sigma \cdot uv = v\Sigma u - \Delta v\,(\Sigma^2 u + \Sigma u)$$

$$+ \Delta^2 v(\Sigma^3 u + 2\Sigma^2 u + \Sigma u) - \Delta^3 v(\Sigma^4 u + 3\Sigma^3 u + 3\Sigma^2 u + \Sigma u) + \text{ꝛc.},$$

wo sich die Entwickelung schließt, wenn die Differenzen der Function v nach einer hinreichenden Anzahl von Differenzirungen Constanten werden.

§. 587. Wir wollen annehmen, daß $y = fx$ eine ganze und rationale Function von x sei, so besteht dieselbe aus einer Summe von Gliedern von der Form Ax^m, wo A eine constante, und m eine ganze positive Zahl bezeichnet, so daß die Differenzirung der ganzen rationalen Functionen auf die der Function $y = x^m$ zurückkommt.

Wir wollen daher:

$$y_0 = x^m,\ y_1 = (x + \Delta x)^m,\ \text{ꝛc.}$$

setzen, so haben wir nach der binomischen Formel, wenn wir nach den abnehmenden Potenzen von x ordnen:

$$\Delta y_0 = \Delta \cdot x^m = mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\Delta x^2 + \ldots \qquad (\varepsilon)$$

$$\Delta y_1 = m(x + \Delta x)^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}(x + \Delta x)^{m-2}\Delta x^2 + \ldots,$$

und folglich, wenn wieder auf dieselbe Weise geordnet wird:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta^2 \cdot x^m = m(m-1)\,x^{m-2}\Delta x^2 + \ldots.$$

Ebenso fände man:

$$\Delta^3 \cdot x^m = m(m-1)(m-2)\,x^{m-3}\Delta x^3 + \ldots.$$

und allgemein:

$$\Delta^i \cdot x^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-i+1)\,x^{m-i}\Delta x^i + \ldots,$$

was übrigens auch daraus folgt, daß sich das Verhältniß $\frac{\Delta^i \cdot x^m}{\Delta x^i}$ an der Grenze $\Delta x = 0$ auf $\frac{d^i \cdot x^m}{dx^i}$ reduciren muß.

Man hat also:

$$\Delta^m \cdot x^m = m(m-1)(m-2)\ldots : 3.2.1.\Delta x^m, \qquad (b)$$

und da diese Differenz constant ist, so verschwinden die Differenzen der höhern Ordnungen.

Andererseits gibt die Formel (b):

$$\Delta^n \cdot x^m = [x + n\Delta x]^m - \frac{n}{1}[x + (n-1)\Delta x]^m + \frac{n(n-1)}{1.2}[x + (n-2)\Delta x]^m - \ldots \pm x^m,$$

und wenn man den zweiten Theil nach den Potenzen von Δx entwickelt, und der Kürze wegen

$$n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^i + \ldots = N_i$$

setzt, so kommt:

$$\Delta^n \cdot x^m = N_0 x^m + \frac{m}{1} N_1 x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2} N_2 x^{m-2} \Delta x^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + N_m \Delta x^m.$$

Man hat aber eben gesehen, daß Δx^n die niedrigste Potenz von Δx in der Entwickelung von $\Delta^n \cdot x^m$ ist, und folglich ist die Zahl N^i für alle niedrigern Werthe von i als n gleich Null.

Nach der Formel (h) hat man auch:

$$\Delta^n \cdot x^n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1.\Delta x^n,$$

und folglich:

$$N_n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1.$$

§. 588. Es sei:

$$y = x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots\ldots[x-(m-1)\Delta x],$$

so kommt:

$$\Delta y = x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots\ldots[x-(m-2)\Delta x]\cdot m\Delta x,$$

woraus sich leicht ergibt:

$$\Delta^2 y = x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots[x-(m-3)\Delta x]\cdot m(m-1)\Delta x^2,$$

und allgemeiner:

$$\Delta^i y = x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots\ldots[x-(m-i-1)\Delta x]\cdot m(m-1)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots(m-i+1)\Delta x^i.$$

Es findet also zwischen der Formel, welche das Differenzial der Potenz x^m und der, welche die Differenz der aus m Factoren bestehenden Factorielle (§. 417) gibt, wenn die Differenz der auf einander folgenden Factoren $= \Delta x$, und der erste Factor $= x$ ist, eine merkwürdige Analogie statt.

Wenn man

$$y = x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots[x+(m-1)\Delta x]$$

setzte, so fände man ebenso:

$$\Delta y = (x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots[x+(m-1)\Delta x]\cdot m\Delta x, \qquad (i)$$

und folglich:

$$\Delta^i y = (x+i\Delta x)[x+(i+1)\Delta x]\ldots\ldots[x+(m-1)\Delta x]\cdot m(m-1)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots(m-i+1)\Delta x^i.$$

Es sei endlich:

$$y = \frac{1}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots[x+(m-1)\Delta x]},$$

so hat man:

$$\Delta y = -\frac{m\Delta x}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots(x+m\Delta x)}, \qquad (j)$$

$$\Delta^i y = \pm\frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+i-1)\cdot\Delta x^i}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots[x+(m+i-1)\Delta x]},$$

wo das Zeichen + oder − genommen werden muß, je nachdem i eine gerade oder ungerade Zahl ist.

§. 589. Auch von den Exponential- und Kreisfunctionen lassen sich die successiven Differenzen leicht bilden; denn man hat unmittelbar:

$$\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),\ \Delta^2 a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^2, \ldots$$

$$\ldots \Delta^i a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^i, \qquad (k)$$

und nach den erſten Formeln der Trigonometrie iſt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta \sin. x &= 2 \sin. \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \cos.(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) \\ \Delta \cos. x &= -2 \sin. \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \sin.(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) \end{aligned}\right\}. \qquad (l)$$

Hieraus folgt:

$$\Delta^2 \sin. x = -4 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \sin.(x + \Delta x),$$

$$\Delta^2 \cos. x = -4 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \cos.(x + \Delta x),$$

und allgemein:

$$\Delta^{2i} \sin. x = \pm 2^{2i} \sin.^{2i} \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \sin.(x + i\Delta x),$$

$$\Delta^{2i} \cos. x = \pm 2^{2i} \sin.^{2i} \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \cos.(x + i\Delta x),$$

$$\Delta^{2i+1} \sin. x = \pm 2^{2i+1} \sin.^{2i+1} \frac{1}{2}\Delta x \cdot \cos.\left(x + \frac{2i+1}{2}\Delta x\right),$$

$$\Delta^{2i+1} \cos. x = \pm 2^{2i+1} \sin.^{2i+1} \frac{1}{2}\Delta x \cdot \sin.\left(x + \frac{2i+1}{2}\Delta x\right),$$

wo man das obere oder untere Zeichen nehmen muß, je nachdem i eine gerade oder ungerade Zahl iſt.

§. 590. Die Integrale mit endlichen Differenzen der geringen Anzahl von Functionen, bei welchen ſich die durch das Zeichen Σ angedeutete Operation verrichten läßt, werden durch die Umkehrung der vorhin abgeleiteten Formeln der Differenzirung erhalten. Betrachten wir zunächſt die Function x^m, ſo gibt die Formel (g), nachdem man $m + 1$ für m geſetzt hat:

$$\Delta \cdot x^{m+1} = (m+1)x^m \Delta x + \frac{(m+1)m}{1.2} x^{m-1} \Delta x^2$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} x^{m-2} \Delta x^3 + \text{ꝛc.},$$

woraus folgt:

$$x^{m+1} = (m+1)\Sigma \cdot x^m \Delta x + \frac{(m+1)m}{1.2} \Sigma \cdot x^{m-1} \Delta x^2$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} \Sigma \cdot x^{m-2} \Delta x^3 + \text{ꝛc.},$$

und endlich:

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \left\{\frac{m\Delta x}{1.2} \cdot \Sigma x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2.3} \Delta x^2 \cdot \Sigma x^{m-3} + \text{ꝛc.}\right\}.$$

Wenn man in dieſer Formel ſucceſſive $m = 0, = 1, = 2, = 3,$ ꝛc. ſetzt, ſo findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma x^0 &= \frac{x}{\Delta x}\\
\Sigma x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\Delta x} - \frac{1}{2}x\\
\Sigma x^2 &= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x\Delta x\\
\Sigma x^3 &= \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2.2}x^2\Delta x\\
\Sigma x^4 &= \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\Delta x - \frac{1}{5.6}x\Delta x^3\\
\Sigma x^5 &= \frac{1}{6}\cdot\frac{x^6}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2.6}x^4\Delta x - \frac{1}{2.6}x^2\Delta x^3\\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}\right\} \quad (m)$$

Jedes dieſes Integrale muß überdies nach dem im §. 584 Geſagten durch eine Conſtante oder durch eine willkürliche periodiſche Function ergänzt werden, und durch dieſe Formeln erhält man das Integral jeder rationalen und ganzen algebraiſchen Function. Das Geſetz, welches die ſucceſſiven Glieder der Entwickelung von Σx^m befolgen, erhellet aus dem vorhergehenden Schema nicht leicht, und wir werden daher in dem folgenden Kapitel allgemeinere Betrachtungen über dieſen Punkt anſtellen.

Aus den Formeln (i), (j), (k), (l) ergibt ſich:

$$\Sigma\left\{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots.[x+(m-1)\Delta x]\right\}$$
$$=\frac{1}{(m+1)\Delta x}\left\{(x-\Delta x)x(x+\Delta x)\ldots.[x+(m-1)\Delta x]\right\}+\omega, \quad (n)$$

$$\Sigma\cdot\frac{1}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots.[x+(m-1)\Delta x]} =$$
$$-\frac{1}{(m-1)\Delta x\cdot x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots.[x+(m-2)\Delta x]}+\omega, \quad (p)$$

$$\Sigma\cdot a^x = \frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}+\omega \quad (q)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma \sin. x &= -\frac{\cos.(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x}+\omega\\
\Sigma \cos. x &= \frac{\sin.(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x}+\omega
\end{aligned}\right\}, \quad (r)$$

wo ω die Conſtante oder die willkürliche periodiſche Function bezeichnet.

§. 591. Die Formeln im vorhergehenden § laſſen ſich ganz natürlich auf die Summation der Reihen anwenden. Nach der im §. 585 angegebenen Bezeichnung wollen wir durch $S^i_{i_0}$ die Summe der Glieder der Reihe, deren allgemeines Glied y_i iſt, von dem Gliede y_{i_0} bis zu dem Gliede y_i incl. bezeichnen, ſo daß

$$S^i_{i_0} y_i = \Sigma^i_{i_0} y_i + y_{i_0} \text{ oder } S^i_{i_0} y_i = \Sigma^{i+1}_{i_0} y_i$$

iſt; ſo geben die Formeln (m) zunächſt:

$$S^i_1 \cdot x = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + i = \frac{1}{2} i^2 + \frac{1}{2} i$$

$$S^i_1 \cdot x^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + i^2 = \frac{1}{3} i^3 + \frac{1}{2} i^2 + \frac{1}{2.3} i$$

$$S^i_1 \cdot x^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + i^3 = \frac{1}{4} i^4 + \frac{1}{2} i^3 + \frac{1}{2.2} i^2$$

ꝛc.

Bekanntlich fangen die Reihen der figurirten Zahlen, wie die vorhergehenden, mit der Einheit an, und haben die Ausdrücke:

$$\frac{i}{1}, \frac{i(i+1)}{1.2}, \frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3}, \text{ ꝛc.}$$

zum allgemeinen Gliede; man kann alſo die Formel (n) auf die Summation dieſer Reihen anwenden, und man erhält:

$$1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots + i = \frac{i(i+1)}{1.2}$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots\ldots + \frac{i(i+1)}{1.2} = \frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3}$$

$$1 + 4 + 10 + 20 + \ldots\ldots + \frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3} = \frac{i(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3.4}$$

ꝛc.,

ſo daß die Summe einer beliebigen dieſer Reihen das allgemeine Glied der Reihe von einer unmittelbar höhern Ordnung iſt, eine ſehr bekannte Relation, welche zur Definition der figurirten Zahlen genommen werden kann.

Die reciproken Reihen, deren allgemeine Glieder durch:

$$\frac{1}{i}, \frac{1.2}{i(i+1)}, \frac{1.2.3}{i(i+1)(i+2)}, \text{ ꝛc.}$$

ausgedrückt werden, laſſen ſich vermittelſt der Formel (p) ſummiren, mit Ausnahme der erſten, für welche dieſe Formel wegen eines im Nenner verſchwindenden Factors unbrauchbar wird. Für die übrigen findet man:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots\ldots + \frac{1.2}{i(i+1)} = \frac{2}{1} - \frac{2}{i+1}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \ldots\ldots + \frac{1.2.3}{i(i+1)(i+2)} = \frac{3}{2} - \frac{3}{(i+1)(i+2)}$$

ꝛc.

Wenn man $i = \infty$ ſetzt, ſo erhält man $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, ꝛc. für die Summen der ins Unendliche fortlaufenden Reihen.

Aus der Formel (q) ergibt ſich die bekannte Formel:

$$a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + a^i = \frac{a^{i+1} - a}{a - 1}$$

für die Summation der geometriſchen Progreſſionen.

Wenn wir in den Formeln (r) $x = p + iq$, $\Delta x = q$ ſetzen, ſo geben ſie:

$$\sum_{0}^{i} \sin.(p+iq) = -\frac{\cos.(p+iq-\frac{1}{2}q)-\cos.(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin.\frac{1}{2}q}$$

$$\sum_{0}^{i} \cos.(p+iq) = \frac{\sin.(p+iq-\frac{1}{2}q)-\sin.(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin.\frac{1}{2}q},$$

und folglich nach §. 406 und §. 423:

$$S_{0}^{i} \sin.(p+iq) = -\frac{\cos.(p+iq+\frac{1}{2}q)-\cos.(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin.\frac{1}{2}q}$$

$$S_{0}^{i} \cos.(p+iq) = \frac{\sin.(p+iq+\frac{1}{2}q)-\sin.(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin.\frac{1}{2}q}.$$

Zweites Kapitel.

Euler's Formel zur Bestimmung der Summen durch gewöhnliche Integrale und der Integrale durch die Summen. — Anwendung auf die Stirling'sche Formel. — Ueber die Interpolation.

I. Euler's Formel zur Bestimmung der Summen durch gewöhnliche Integrale und der Integrale durch die Summen.

§. 592. Die Taylor'sche Formel gibt:

$$\Delta fx = \frac{\Delta x}{1}\cdot f'x + \frac{\Delta x^2}{1.2}\cdot f''x + \frac{\Delta x^3}{1.2.3}\cdot f'''x + \text{ꝛc.},$$

folglich:

$$fx = \frac{\Delta x}{1}\cdot \Sigma f'x + \frac{\Delta x^2}{1.2}\cdot \Sigma f''x + \frac{\Delta x^3}{1.2.3}\cdot \Sigma f'''x + \text{ꝛc.}$$

und, wenn man $f'x = fx$ setzt:

$$\int fxdx = \frac{\Delta x}{1}\cdot \Sigma fx + \frac{\Delta x^2}{1.2}\cdot \Sigma f'x + \frac{\Delta x^3}{1.2.3}\cdot \Sigma f''x + \text{ꝛc.},$$

oder vielmehr:

$$\Sigma fx = \frac{1}{\Delta x}\int fxdx - \frac{\Delta x}{1.2}\cdot \Sigma f'x - \frac{\Delta x^2}{1.2.3}\cdot \Sigma f''x - \text{ꝛc.} \qquad (a)$$

Aber aus demselben Grunde ist:

$$\Sigma f'x = \frac{1}{\Delta x}\cdot fx - \frac{\Delta x}{1.2}\cdot \Sigma f''x - \frac{\Delta x^2}{1.2.3}\cdot \Sigma f'''x - \text{ꝛc.} \qquad (a')$$

$$\Sigma f''x = \frac{1}{\Delta x} f'x - \frac{\Delta x}{1.2}\cdot \Sigma f'''x - \frac{\Delta x^2}{1.2.3}\cdot \Sigma f^{iv}x - \text{ꝛc.} \qquad (a'')$$

ꝛc.,

so daß man aus der Reihe (a) die Integrale $\Sigma f'x$, $\Sigma f''x$, ꝛc. eliminiren kann. Die Elimination wird auf die gewöhnliche Weise verrichtet, indem man die Gleichungen (a), (a'), (a''), ꝛc., nachdem alle Glieder von (a') durch den Factor $A_0\Delta x$, alle Glieder von (a'') durch den Factor $A_1\Delta x^2$ u. s. f. multiplicirt sind, zusammenaddirt und dann die Multiplicatoren der zu eliminirenden Integrale gleich Null setzt. Diese Rechnung gibt:

$$\Sigma fx = \frac{1}{\Delta x}\int fx\,dx + A_0 fx + A_1\Delta x f'x + A_2\Delta x^2 f''x + A_3\Delta x^3 f'''x + \text{ꝛc.}, \qquad (1)$$

wo die Zahlencoefficienten A_i unabhängig von der Form der Function f successive durch das System der folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\left.\begin{aligned} &A_0 + \frac{1}{1.2} = 0,\quad A_1 + \frac{A_0}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = 0 \\ &A_2 + \frac{A_1}{1.2} + \frac{A_0}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} = 0 \\ &A_3 + \frac{A_2}{1.2} + \frac{A_1}{1.2.3} + \frac{A_0}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} = 0, \text{ ꝛc.} \end{aligned}\right\}. \qquad (A)$$

Wenn man $fx = e^x$ setzt, so erhält man:

$$\Sigma e^x = \frac{e^x}{e^{\Delta x} - 1},\quad \int e^x dx = e^x,\quad f^{(n)}x = e^x,$$

und die Gleichung (1) gibt nach der Hinweglassung des gemeinschaftlichen Factors e^x:

$$\frac{1}{e^{\Delta x} - 1} = \frac{1}{\Delta x} + A_0 + A_1\Delta x + A_2\Delta x^2 + A_3\Delta x^3 + \text{ꝛc.}$$

woraus folgt, daß der Coefficient A_i derjenige ist, womit α_i in der Entwickelung der Function:

$$\frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} \qquad (\alpha)$$

nach den ganzen und positiven Potenzen von α multiplicirt ist.

Wenn man für A_0 seinen Werth $-\frac{1}{2}$ wieder setzt; so erhält man:

$$A_1\alpha + A_2\alpha^2 + A_3\alpha^3 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^\alpha + 1}{2(e^\alpha - 1)} - \frac{1}{\alpha} = \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}}{2\left(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)} \cdot - \frac{1}{\alpha}.$$

Nun ist aber der letzte Theil dieser Gleichung offenbar eine impaare Function von α, und folglich müssen in der Reihenentwickelung dieser Function die Coefficienten der geraden Potenzen von α verschwinden. Mithin ist der Coefficient A_i für alle von 0 verschiedenen geraden Werthe des Index i Null.

Wenn man die in Rede stehende Entwickelung verrichtete, so erhielte man den Ausdruck von A_i unmittelbar als Function des Index i; allein wir wollen uns bei dieser zwar eleganten, aber complicirten Rechnung nicht auf-

halten, da ſich die Coefficienten A_i vermittelſt der Gleichungen (A), deren Geſetz einleuchtend iſt, ſehr bequem ſucceſſive berechnen laſſen.

Da die Coefficienten A_{2i+1} abwechſelnd poſitiv und negativ ſind, ſo wollen wir die Gleichung (1) auf die Form:

$$\Sigma fx = C + \frac{1}{\Delta x}\int fx\,dx - \frac{1}{2}fx + A_1\Delta x \cdot f'x - A_3\Delta x^3 \cdot f'''x + A_5\Delta x^5 \cdot f^v x - \text{ꝛc.} \quad (2)$$

bringen, wo C die willkürliche Conſtante bezeichnet, welche die unbeſtimmten Integrationszeichen Σ und $\int$ mit ſich führen, und alsdann bezeichnen die Buchſtaben A_{2i+1} lauter poſitive Zahlen.

§. 593. Wenn man:

$$B_{2i+1} = 1.2.3.\ldots.(2i+2) \cdot A_{2i+1}$$

ſetzt, ſo iſt die Reihe der Zahlen B_{2i+1} die der ſogenannten Bernoulli'ſchen Zahlen, weil Jacob Bernoulli zuerſt die Analyſten darauf aufmerkſam gemacht hat. Dieſe Reihe von Zahlen kommt oft bei Reihenentwickelungen zum Vorſchein und hat in Beziehung auf die Summen, ſowohl der directen als der inverſen Potenzen der natürlichen Zahlen, merkwürdige Eigenſchaften. Setzt man z. B. $fx = x^m$, ſo gibt die Gleichung (2):

$$\Sigma x^m = C + \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{1}{2}x^m + B_1\frac{m\Delta x}{1} - B_3\frac{m(m-1)(m-2)\Delta x^3}{1.2.3.4}x^{m-3} + \text{ꝛc.},$$

woraus das Bildungsgeſetz der Formeln (m) im §. 590 erhellet.

Die Reihe:

$$A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \text{ꝛc.}$$

iſt convergent; aber die Reihe:

$$B_1 - B_3 + B_5 - B_7 + \text{ꝛc.}$$

nicht, weil die Zahlen B_{2i+1} über jede Grenze hinaus wachſen. Die Werthe der erſten Glieder dieſer Reihe ſind folgende:

$$B_1 = \frac{1}{6} = 0{,}166666\ldots., \quad B_9 = \frac{5}{66} = 0{,}075757\ldots.,$$

$$B_3 = \frac{1}{80} = 0{,}033333\ldots., \quad B_{11} = \frac{691}{2730} = 0{,}253113\ldots.,$$

$$B_5 = \frac{1}{42} = 0{,}023809\ldots., \quad B_{13} = \frac{7}{6} = 1{,}166666\ldots.,$$

$$B_7 = \frac{1}{30} = 0{,}033333\ldots., \quad B_{15} = \frac{3617}{510} = 7{,}092156\ldots., \text{ ꝛc.}$$

§. 594. Wir wollen annehmen, daß das Intervall $x - x_0$ ein genaues Vielfaches von Δx ſei, ſo folgt aus der Gleichung (2), wenn man von den unbeſtimmten Integralen zu den beſtimmten übergeht:

$$\sum_{x_0}^{x} fx = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x} fx\,dx - \frac{1}{2}(fx - fx_0) + A_1\Delta x(f'x - f'x_0) - A_3\Delta x^3(f'''x - f'''x_0) + A_5\Delta x^5(f^v x - f^v x_0) - \text{ꝛc.} \quad (3)$$

Die Formel (2), welche gewöhnlich Euler zugeschrieben und deswegen die Euler'sche Formel genannt wird, oder die Formel (3), welche eine Transformation derselben ist, gestatten eine zweifache Anwendung, je nachdem sich das Integral $\int fx\,dx$ als eine endliche Function von x ausdrücken läßt, oder nicht. Im ersten Falle gehört das Integral $\sum_{x_0}^{x} fx$ meistens nicht in die Categorie derjenigen, auf welche sich die vorhin angegebenen Integrationsmethoden anwenden lassen, und man könnte den genauen Werth desselben nur durch eine wirkliche Summation erhalten, eine Operation, die sehr mühsam und oft sogar unausführbar ist, wenn die Differenz Δx eine sehr große Anzahl von Malen in der Differenz $x - x_0$ enthalten ist. In diesem Falle betrachtet man das Glied:

$$\frac{1}{\Delta x}\int fx\,dx$$

als einen Näherungswerth des Integrales $\sum_{x_0}^{x} fx$, und die Correction, welche man an diesem Näherungswerthe anbringen muß, wird durch die Formel (3) in Reihenform gegeben. Wenn man dagegen das unbestimmte Integral $\int fx\,dx$ nicht als Function von x erhalten kann und es darauf ankommt, den Werth des bestimmten Integrales:

$$\int_{x_0}^{x} fx\,dx$$

näherungsweise zu berechnen, so theilt man das Intervall $x - x_0$ in gleiche Theile Δx, welche klein genug sind, damit das Product:

$$\Delta x \sum_{x_0}^{x} fx$$

einen Näherungswerth des gesuchten Integrales gibt, jedoch so, daß die arithmetische Summation, durch welche man das Integral $\sum_{x_0}^{x} fx$ erhält, wegen der Größe der Zahl $\frac{x - x_0}{\Delta x}$ nicht gar zu mühsam wird. Die Correction, welche man an diesem Näherungswerthe anbringen muß, wird wieder in Reihenform durch die Gleichung (3) gegeben, welche folglich sowohl die Stelle einer Summationsformel, als die einer Quadraturformel vertritt.

Wenn wir nach der im §. 585 angenommenen Bezeichnungsart das Zeichen S für das Zeichen Σ setzen, so erhalten wir statt der Formeln (2) und (3) die beiden folgenden:

$$\mathbf{S}\,fx = C + \frac{1}{\Delta x}\int fx\,dx + \frac{1}{2}fx + A_1\Delta x f'x - A_3\Delta x^3 f'''x + A_5\Delta x^5 \cdot f^{v}x - \text{ꝛc.}, \qquad (4)$$

$$\mathbf{S}_{x_0}^{x} fx = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x} fx\,dx + \frac{1}{2}(fx - fx_0) + A_1\Delta x(f'x - f'x_0) - A_3\Delta x^3(f'''x - f'''x_0) + A_5\Delta x^5(f^{v}x - f^{v}x_0) - \text{ꝛc.} \qquad (6)$$

§. 595. Um aber die Anwendung dieser Reihen, welche nicht immer convergent sind, im Allgemeinen zu rechtfertigen, ist es durchaus nothwendig, die Grenzen des Fehlers angeben zu können, welchen man begeht, wenn man die Reihe bei einem Gliede von irgend einem Range abbricht (§. 25). Nun hat aber Poisson ein Verfahren angeben, durch welches man die Euler'sche

Reihe, und zugleich den Reſt derſelben, durch ein beſtimmtes Integral ausgedrückt, erhält alſo auch die Grenze dieſes Reſtes, und wegen der Wichtigkeit des Gegenſtandes müſſen wir daher hier dieſe weſentliche Vervollkommnung einer Fundamentalformel der Analyſis näher angeben.

Der Einfachheit der Rechnungen wegen wollen wir annehmen, daß die Grenzen der Integrale in der Euler'ſchen Formel gleiche Zahlenwerthe und entgegengeſetzte Zeichen haben, was man immer bewirken kann, wenn man den Anfangspunkt der Veränderlichen verändert, und die Formel (m) im §. 433:

$$fx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f\xi d\xi + \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{1}^{\infty} \cos.\frac{i\pi(x-\xi)}{a}\right] f\xi d\xi, \quad (7)$$

wieder betrachtet, welche für alle zwiſchen den Integrationsgrenzen liegende Werthe von x ſtattfindet. An dieſen Grenzen ſelbſt hat man:

$$\frac{1}{2}[fa + f(-a)] = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f\xi d\xi + \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{1}^{\infty} \cos.\frac{i\pi(\xi \pm a)}{a}\right] f\xi d\xi. \quad (8)$$

Nimmt man $a = n\Delta x$ und legt der Veränderlichen x ſucceſſive die $2n-1$ um dieſelbe Differenz Δx verſchiedenen Werthe:

$$-(n-1)\Delta x, -(n-2)\Delta x, \ldots -\Delta x, 0, \Delta x, 2\Delta x, \ldots (n-1)\Delta x$$

bei, für welche die Gleichung (7) ſtattfindet, nimmt die Summe der correſpondirenden Werthe von fx und addirt die halbe Summe der Werthe von fx für $x = \pm a$, ſo erhält man:

$$\Delta x\left[\sum_{-a}^{a} fx + \frac{1}{2}fa - \frac{1}{2}f(-a)\right] = \frac{\Delta x}{2}[fa + f(-a)]$$

$$+\frac{2n-1}{2n}\int_{-a}^{a} fx dx + \frac{1}{n}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{1}^{\infty} p\cos.\frac{i\pi x}{n\Delta x}\right] fx dx. \quad (9)$$

Wir haben unter den Integrationszeichen x für ξ geſetzt, was jetzt ohne Zweideutigkeit geſchehen kann, und zu gleicher Zeit haben wir der Kürze wegen:

$$p = 1 + 2\cos.\frac{i\pi}{n} + 2\cos.\frac{2i\pi}{n} + 2\cos.\frac{3i\pi}{n} + \ldots + 2\cos.\frac{(n-1)i\pi}{n}$$

geſetzt. Die Größe p reducirt ſich jedesmal auf $2n-1$, wenn i ein Vielfaches von $2n$ iſt. Außerdem hat man:

$$p\cos.\frac{i\pi}{n} = p + \cos. i\pi - \cos.\frac{(n-1)i\pi}{n},$$

woraus für alle anderen Werthe von i, $p = -\cos. i\pi$ folgt. Hierauf nimmt man die Summe Σ_1^{∞}, indem man zuvörderſt annimmt, daß dieſer Werth von p ohne Ausnahme ſtattfindet, ſetzt dann $i = 2i'n$ und nimmt eine zweite Summe Σ_1^{∞} in Beziehung auf i', indem man im Verlaufe dieſer zweiten Summation

$$p = 2n - 1 + \cos. 2i'n\pi = 2n$$

ſetzt. Die unter dem Integralzeichen $\int$ befindliche periodiſche Reihe iſt die Summe dieſer beiden Partialreihen, und wegen der Gleichung:

$$\cos. i\pi \cos.\frac{i\pi x}{n\Delta x} = \cos.\frac{i\pi(a-x)}{a}$$

ergibt ſich aus dieſer Bemerkung:

$$\sum_1^n p \cos.\frac{i\pi x}{n\Delta x} = -\sum_1^\infty \cos.\frac{i\pi(a-x)}{a} + 2a\sum_1^n \frac{2i'\pi x}{\Delta x}.$$

Die Gleichung (9) gibt folglich:

$$\Delta x\left[\sum_{-a}^{a} fx + \frac{1}{2}fa - \frac{1}{2}f(-a)\right] = \frac{\Delta x}{2}[fa + f(-a)]$$
$$+\left(1-\frac{\Delta x}{a}\right)\int_{-a}^{a} fx\,dx - \frac{\Delta x}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_1^\infty \cos.\frac{i\pi(a-x)}{a}\right]fx\,dx$$
$$+2\int_{-a}^{a}\left[\sum_1^\infty \cos.\frac{2i'\pi x}{\Delta x}\right]fx\,dx,$$

oder vielmehr wegen der Gleichung (8):

$$\Delta x\left[\sum_{-a}^{a} fx + \frac{1}{2}fa - \frac{1}{2}f(-a)\right] = \int_{-a}^{a} fx\,dx$$
$$+2\int_{-a}^{a}\left[\sum_1^\infty \cos.\frac{2i'\pi x}{\Delta x}\right]fx\,dx.$$

Nun hindert nichts, i für i' zu setzen und den Anfangspunkt der Veränderlichen x oder die Form der Function f so zu verändern, daß die Grenzen des Integrales beliebig sind. Wir können also schreiben:

$$\Delta x\left[\sum_{x_0}^{x} fx + \frac{1}{2}fx - \frac{1}{2}fx_0\right]$$
$$-\int_{x_0}^{x} fx\,dx = 2\int_{x_0}^{x}\left[\sum_1^\infty \cos.\frac{2i\pi x}{\Delta x}\right]fx\,dx. \qquad (10)$$

Setzt man:

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{2}(2\pi)^{2n} A_{2n-1}, \qquad (11)$$

und berücksichtigt, daß an den Grenzen des Integrales, für welche der Werth der Veränderlichen x nach der Voraussetzung ein genaues Vielfaches von Δx ist:

$$\cos.\frac{2i\pi x}{\Delta x} = 1, \quad \sin.\frac{2i\pi x}{\Delta x} = 0$$

ist; so gibt das Verfahren der theilweisen Integration:

$$2\int_{x_0}^{x}\left[\sum_1^\infty \cos.\frac{2i\pi x}{\Delta x}\right]fx\,dx = -A_1\Delta x^2(f'x - f'x_0)$$
$$+A_3\Delta x^4(f'''x - f'''x_0)\ldots\mp A_{2n-1}\Delta x^{2n}(f^{(2n-1)}x - f^{(2n-1)}x_0)$$
$$\pm 2\left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)^{2n}\int_{x_0}^{x}\left[\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2n}}\cos.\frac{2i\pi x}{\Delta x}\right]f^{(2n)}x\,dx. \qquad (12)$$

§. 596. Durch Vergleichung der Gleichungen (10) und (12) erhalten wir die Euler'sche Formel wieder, wie sie die Gleichung (3) gibt, und zugleich erhalten wir den Werth des Restes, welcher vernachlässigt wird, wenn man die Reihe bei einem Gliede von beliebigem Range abbricht, durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt. Die Coefficienten A_1, A_3, ꝛc., welche durch die Gleichung (11) bestimmt werden, können keine andern sein, als die durch die Gleichungen (A) oder durch die Entwickelung der Function (α) nach den Potenzen von α gegebenen Coefficienten. Die Gleichung (11) drückt also

eine sehr merkwürdige Eigenschaft der Coefficienten A oder der sich daraus ergebenden Bernoulli'schen Zahlen aus.

Wegen der Gleichung (11) hat man offenbar:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2n}} \cdot \cos. \frac{2i\pi x}{\Delta x} < \frac{1}{2}(2\pi)^{2n} A_{2n-1},$$

und wenn man durch λ_n den größten Zahlenwerth bezeichnet, welchen die Function $f^{(2n)}x$ zwischen den Grenzen des Integrales annehmen kann, so hat man, abgesehen von den Zeichen:

$$R_n = 2\left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)^{2n} \int_{x_0}^{x} \left[\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2n}} \cos. \frac{2i\pi x}{\Delta x}\right] f^{(2n)}x\,dx$$
$$< \lambda_n (x - x_0) A_{2n-1} \Delta x^{2n}.$$

Wenn man die Euler'sche Formel auf eine Quadratur anwenden will, so kann man Δx immer so klein annehmen, daß die obere Grenze des Restes R_n unter jede gegebene Größe herabsinkt. Wenn dieselbe Formel auf die Bestimmung einer Summe oder eines Integrales mit endlichen Differenzen angewandt wird, und die Differenz Δx gegeben ist, so kann es geschehen, daß der Werth R_n für ohne Ende wachsende Werthe des Index n nicht ohne Ende abnimmt, weswegen man aber doch von der Formel Gebrauch machen kann, wenn die obere Grenze von R_n für einen schicklichen Werth von n von der Ordnung der Größen ist, welche vernachlässigt werden können.

Wenn die Function $f^{(2n)}x$ in der ganzen Ausdehnung der Integration dasselbe Zeichen behält, so hat man auch, abgesehen vom Zeichen:

$$R_n < A_{2n-1} \Delta x^{2n} \int_{x_0}^{x} f^{(2n)}x\,dx,$$

oder:

$$R_n < A_{2n-1} \Delta x^{2n} (f^{(2n-1)}x - f^{(2n-1)}x_0),$$

d. h. der vernachlässigte Rest hat einen kleineren Zahlenwerth, als das letzte beibehaltene Glied.

Die Euler'sche Formel wird unbrauchbar, wenn die ungeraden Differenziale von fx verschwinden, oder allgemeiner, wenn sie den beiden Grenzen des Integrales gleich sind, und der zweite Theil der Gleichung (10) läßt sich alsdann nicht mehr in eine nach den steigenden Potenzen von Δx fortschreitende Reihe entwickeln.

§. 597. Allgemein, wenn die Function fx in der ganzen Ausdehnung der Integration dasselbe Zeichen behält, so kann man Δx so klein annehmen, daß der Zahlenwerth des Verhältnisses:

$$\int_{x_0}^{x} \left[\sum_1^\infty \cos. \frac{2i\pi x}{\Delta x}\right] fx\,dx : \int_{x_0}^{x} fx\,dx \qquad (13)$$

unter jede gegebene Größe herabsinkt, weil der Factor von fxdx in dem ersten Integrale das Zeichen verändert. Wenn außerdem Δx eine Größe ist, welche in Vergleich zu dem gegenseitigen Abstande $x - x_0$ der Integrationsgrenzen vernachlässigt werden kann, so darf man nicht blos das erste der Integrale (13) gegen das zweite, sondern auch die Glieder $\Delta x(\frac{1}{2}fx - \frac{1}{2}fx_0)$ gegen $\Delta x \sum_{x_0}^{x} fx$ vernachlässigen, und man hat:

$$\Delta x \sum_{x_0}^{x} fx = \int_{x_0}^{x} fx\,dx,$$

ſo daß ſich in Beziehung auf unſere Verſuchs- und Meſſungsmittel alles ſo verhält, wie wenn ſich ein Syſtem von discontinuirlichen Theilen in ein völlig continuirliches Syſtem verwandelte. Vermöge dieſes Satzes betrachtet man z. B. zwei Körper bei der Berechnung ihrer gegenſeitigen Anziehung als ſtetige Maſſen, indem man von den Poren oder Zwiſchenräumen, deren Exiſtenz durch eine Menge von Erſcheinungen außer Zweifel geſetzt iſt, deren Dimenſionen aber für uns unmeßbar klein ſind, abſtrahirt. Man nimmt an, daß die Maße der in einem Raume von unmeßbar kleinen Dimenſionen enthaltenen Theilchen, welcher aber dennoch eine ſehr große Anzahl ſolcher Theilchen enthalten kann, gleichmäßig in dieſem ganzen Raume verbreitet iſt, und der begangene Fehler muß in Beziehung auf die gemeſſene Größe von derſelben Ordnung ſein, als die Dimenſionen des Volumens der Theilchen in Beziehung auf die Dimenſionen der beobachteten Körper, d. h. der Fehler iſt für unſere Meſſungsmittel unmeßbar klein.

Wenn dagegen die Function fx innerhalb der Ausdehnung der Integration das Zeichen verändert, ſo können die beiden Glieder des Verhältniſſes (13) ungeachtet der Kleinheit von Δx unter einander vergleichbare Größen ſein, und Poiſſon hat aus dieſer Bemerkung eine ſinnreiche Erklärung einiger Geſetze, welchen die Molecularconſtitution der Naturkörper unterworfen zu ſein ſcheint, abgeleitet.

Bei der Auseinanderſetzung der Grundprincipien der Infinitesimalrechnung im Anfange dieſes Werkes haben wir zu zeigen geſucht, wie man von dem Begriffe der discontinuirlichen Veränderungen ausgegangen iſt, um die Rechnung auf ſtetige Veränderungen, welche ſich bei den meiſten Naturerſcheinungen darbieten, oder darzubieten ſcheinen, anwenden zu können, und in dem Vorhergehenden iſt die Andeutung eines umgekehrten Verfahrens enthalten, wobei man der Bequemlichkeit der Rechnung wegen die wirklich discontinuirlichen Veränderungen als continuirliche betrachtet. Dieſes Verfahren findet beſonders bei der Beſtimmung der Verhältniſſe großer Zahlen, welche in der Combinationslehre und in der Wahrſcheinlichkeitsrechnung häufig vorkommen, ſeine Anwendung, wobei eine von Stirling herrührende Formel, welche ſich, wie wir in dem folgenden Abſchnitte zeigen wollen, aus der weiter oben abgeleiteten Euler'ſchen Formel gibt, ſtets angewandt wird.

II. Anwendung der Stirling'ſchen Formel.

§. 598. Wenn wir die Euler'ſche Formel zur Beſtimmung der Summe der Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis x incl. anwenden, ſo haben wir:

$$\Delta x = 1,\quad \int \log. x\,dx = x \log. x - x + \text{const.}$$

$$f'x = \frac{1}{x},\quad f'''x = \frac{1.2}{x^3},\quad f^{v}x = \frac{1.2.3.4}{x^5},\quad \text{ꝛc.},$$

und folglich gibt die Formel (4):

$$\log.[1.2.3....x] = C + x \log. x - x + \frac{1}{2}\log. x + \frac{B_1}{2x} - \frac{B_3}{3.4.x^3} + \frac{B_5}{5.6.x^5} - \frac{B_7}{7.8.x^7} + \text{ꝛc.}, \qquad (14)$$

woraus ſich ergibt, wenn man 2x für x ſetzt:

$$\log.[1.2.3...(2x-1)2x] = C + 2x \log. 2x - 2x + \frac{1}{2}\log. 2x + \frac{B_1}{4x} - \text{ꝛc.}$$

Es iſt aber identiſch:

$$1.2.3\ldots(2x-1)\,2x = 2^x.1.2.3\ldots.x.1.3.5\ldots..(2x-1),$$

und folglich:

$$\log.(1.2.3\ldots..x) + \log.[1.3.5\ldots..(2x-1)]$$
$$= C + x\log.2 + 2x\log.x - 2x + \frac{1}{2}\log.2x + \frac{B_1}{4x} - \text{ꝛc.}$$

Wenn man mit dieſer Gleichung die Gleichung (14) durch Subtraction verbindet, ſo erhält man die folgende Formel, welche die Conſtante C nicht mehr enthält:

$$\log.[1.3.5\ldots(2x-1)] = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log.2 + x\log.x - x - \frac{B_1}{4x} + \text{ꝛc.} \quad (15)$$

Andererſeits hat man:

$$\frac{(1.2.3\ldots..x.2^x)^2}{2x} = 2.2.4.4.6.6\ldots..(2x-2)(2x-2)2x,$$

$$[1.3.5\ldots(2x-1)]^2 = 1.3.3.5.5.7\ldots..(2x-3)(2x-1)(2x-1),$$

und wenn man dieſe Gleichungen mit den Gleichungen (14) und (15) verbindet, ſo ergibt ſich nach den Regeln der Logarithmenrechnung leicht:

$$\log.\left[\frac{2.2.4.4.6.6\ldots.(2x-2)(2x-2)2x}{1.3.3.5.5.7\ldots.(2x-3)(2x-1)(2x-1)}\right] = 2C - 2\log.2 + \frac{3}{2}\frac{B_1}{x} + \text{ꝛc.}$$

Läßt man nun x gegen das Unendliche convergiren, ſo convergirt der erſte Theil der letzten Gleichung nach dem Wallis'ſchen Theoreme gegen die Grenze $\log.\frac{\pi}{2}$, während ſich der zweite Theil für $x=\infty$ auf $2C-2\log.2$ reducirt, woraus folgt $C = \log.\sqrt{2\pi}$, und folglich iſt:

$$\log.(1.2.3\ldots..x) = \log.\sqrt{2\pi} + x\log.x - x + \tfrac{1}{2}\log.x + \frac{B_1}{2x} - \frac{B_3}{3.4x^3} + \frac{B_5}{5.6x^5} - \frac{B_7}{7.8.x^7} + \text{ꝛc.} \quad (16)$$

Setzt man in dieſer letzten Gleichung $x=1000$, multiplicirt die Glieder ohne das Zeichen log. durch den Modulus der Logarithmentafeln (§. 64), damit ſich die Summe auf Logarithmen der Tafeln bezieht, und ſchließt die Reihe bei dem Gliede mit dem Coefficienten B_3; ſo findet man den Werth:

$$\log.\text{vulg.}(1.2.3\ldots.1000) = 2567{,}6046442221328\ldots..,$$

welcher bis auf die dreizehnte Decimalſtelle genau iſt. Wenn man $x=10$ ſetzte, und bei dem Gliede mit dem Coefficienten B_{23} ſtehen bliebe; ſo fände man einen bis auf die zwanzigſte Decimalſtelle genauen Werth. *)

Aus dieſer Rechnung geht hervor, daß das Product 1.2.3...1000 in unſerm Zahlenſyſteme durch eine Zahl von 2568 Ziffern ausgedrückt wird, deren vier erſte Ziffern zur Linken 4023 ſind, ſo daß dieſe Zahl zwiſchen:

$$4024 \cdot 10^{2564} \text{ und } 4023 \cdot 10^{2564}$$

liegt.

*) Vergl. die Einleitung zu dem Werkchen: Tabularum ad faciliorum et breviorem probabilitatis computationem utilium enneas, auct. *Degen*. Copenhagae, 1824.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat man oft die Verhältnisse sehr großer Zahlen anzugeben, welche die combinatorische Analysis unter der Form von Factoriellen oder Facultäten gibt, und deren unmittelbare numerische Berechnung ganz unausführbar sein würde. Um nun diese Verhältnisse mit einer hinreichenden Genauigkeit, welche mit der Genauigkeit der empirischen Constanten vergleichbar ist, anzugeben, braucht man offenbar für jedes Glied des Verhältnisses auf die eben bei der Factorielle 1.2.3....1000 angegebene Weise nur die Kennziffer seines Logarithmus, und die ersten Ziffern des Decimaltheiles desselben zu bestimmen.

§. 599. Wenn man in der Gleichung (14), $x = 1$ setzt, so ergibt sich daraus:

$$C = 1 - \frac{B_1}{1.2} + \frac{B_3}{3.4} - \frac{B_5}{5.6} + \frac{B_7}{7.8} - \frac{B_9}{9.10} + \frac{B_{11}}{11.12} - \text{&c.},$$

oder durch Substitution der für die Bernoulli'schen Zahlen gefundenen Werthe:

$$C = 1 - 0{,}08333.... + 0{,}00275.... - 0{,}00079.... + 0{,}00059...$$
$$- 0{,}00084.... + 0{,}00209.... - \text{&c.},$$

was genügt, um die Divergenz der Reihe darzuthun und zu zeigen, daß sie nicht zur Bestimmung des Werthes der Constante C angewandt werden kann.

Die in den Gleichungen (14) und (15) nach den ungeraden und negativen Potenzen von x fortschreitende Reihe ist ebenfalls divergent; aber, wenn man für x die Zahl 1000 nimmt, so hat das Glied mit B_3 schon blos noch auf die Decimalen von einer höhern als der 11ten Ordnung Einfluß, und man müßte eine sehr große Anzahl von Gliedern umfassen, um die Divergenz dieser Reihe durch die fortwährende Zunahme der Coefficienten B darzuthun. Wenn man blos $x = 10$ setzte, so wäre das Glied mit B_5 kleiner, als eine Decimaleinheit der 8ten Ordnung, und man müßte wieder, um die Divergenz der Reihe darzuthun, eine zu große Anzahl von Gliedern umfassen, als daß sich die Rechnung praktisch ausführen ließe.

Es ist jedoch hinreichend, daß die Reihe zuletzt divergent wird, um den Rechnungen bei der Anwendung derselben nur dann mathematische Strenge beizulegen, wenn sich eine Grenze des vernachlässigten Restes angeben läßt (§. 25). Nun ergibt sich aber diese Grenze in diesem besondern Falle mit der größten Leichtigkeit aus der, welche Poisson für den Rest der Euler'schen Reihen angegeben hat; und muß man, um hinreichend enge Grenzen zu erhalten, den Anfangspunkt der Summation verändern, und man kann z. B. die Summe $S_1^x \log. x$ in $S_1'^{\circ} \log. x + S_1'^{x} \log. x$ zerlegen, so daß man die Constante $S_1'^{\circ} \log. x$ mit jeder gewünschten Genauigkeit direct berechnen kann. Alsdann hat man:

$$S_{11}^{x} \log. x = x \log. x - x + 1 - 11 \log. 11$$
$$- \frac{B_1}{1.2}\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{x}\right) + \frac{B_3}{3.4}\left(\frac{1}{11^3} - \frac{1}{x^3}\right) - \frac{B_5}{5.6}\left(\frac{1}{11^5} - \frac{1}{x^5}\right) + \text{&c.}$$

Wenn man die Reihe mit dem Gliede B_5 schließt, so ist der vernachlässigte Rest nach dem Vorhergehenden kleiner, als eine Decimaleinheit der 8ten Ordnung, welchen Werth x an der obern Grenze des Integrales auch haben mag.

Auch ist noch zu bemerken, daß Liouville den Rest der bei dem Gliede mit B_{2i-1} geschlossenen Reihe (16) auf folgende Form gebracht hat:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(2i+2)}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{2i} f^{(2i+2)}(\theta\alpha)\,d\alpha,$$

wo $f\alpha$ die Function $\frac{\alpha}{e^\alpha-1}$ (§. 592), und θ eine zwiſchen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet. *) Wenn man den größten Zahlenwerth der Function $f^{(2i+2)}\alpha$ durch λ_{2i+2} bezeichnet, ſo iſt der Zahlenwerth des vernachläſſigten Reſtes zwiſchen den Grenzen $0, \infty$ kleiner als:

$$\frac{\lambda_{2i+2}}{1.2.3..(2i+2)}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{2i}\,d\alpha = \frac{\lambda_{2i+2}}{(2i+1)(2i+2)x^{2i+1}}.$$

Wenn man in der Reihe (16) nur die von den Coefficienten B unabhängigen Glieder beibehält, ſo gibt dieſe Rechnung für den Ausdruck des vernachläſſigten Reſtes:

$$\frac{1}{1.2}\int_0^\infty e^{-\alpha x} f''(\theta\alpha)\,d\alpha,$$

und der größte Zahlenwerth der Function:

$$f''\alpha = \frac{e^\alpha[(\alpha-2)e^\alpha+\alpha+2]}{(e^\alpha-1)^3}$$

iſt, wie Liouville gezeigt hat, $f''(0) = \frac{1}{6} = B_1$. In dieſem Falle iſt alſo der vernachläſſigte Reſt kleiner als $\frac{B_1}{2x}$, und wenn x von der Ordnung der Tauſenden iſt, ſo iſt der vernachläſſigte Reſt kleiner als eine Decimaleinheit der vierten Ordnung. Dieſe Rechnung, wobei man die genaue Beſtimmung der Conſtante C zu benutzen ſucht, hat folglich vor der vorhin angegebenen den Vortheil, den Werth der Grenze des vernachläſſigten Reſtes zu vermindern, wenn man in der Stirling'ſchen Formel alle Glieder mit den Bernoulli'ſchen Zahlen hinwegläßt; aber ſoll dieſes zuläſſig ſein, ſo muß x eine große Zahl, wenigſtens von der Ordnung der Tauſender ſein, und im entgegengeſetzten Falle gelangt man durch die angeſtellten Betrachtungen einfacher zu einem Werthe der Grenze des Reſtes, deſſen Kleinheit bei allen Anwendungen genügt.

III. Von der Interpolation.

§. 600. Wir haben bereits mehrere Male Gelegenheit gehabt, von dem Probleme der Interpolation (§. 21) zu reden, deſſen Gegenſtand darin beſteht, eine ſtetige, mathematiſch ausdrückbare Function zu beſtimmen, welche für gewiſſe Werthe der unabhängigen Veränderlichen beſtimmte Werthe, welche die Werthe einer andern continuirlichen oder discontinuirlichen Function ſind, annimmt. Wenn dieſe letzte Function ſtetig iſt, und die Werthe, zwiſchen welchen man interpoliren ſoll, einander hinreichend nahe liegen, ſo nimmt man an, daß die beiden Functionen innerhalb des Intervalles dieſer Werthe nahezu übereinſtimmen, weil zwei Curven in dem Intervalle der ihnen gemeinſchaftlichen Punkte faſt zuſammenfallen, wenn die gemeinſchaftlichen Punkte einander hinreichend nahe liegen, und weder die eine, noch die andere Curve in dieſem Intervalle eine Stetigkeitsunterbrechung erfährt.

Das Problem der Interpolation iſt ſeiner Natur nach offenbar unbeſtimmt. In gewiſſen Fällen kann es als eine Anwendung der mathematiſchen Theorie

*) Journal de mathématiques, tom. IV, pag. 317.

der Wahrſcheinlichkeiten betrachtet werden; allein wir haben daſſelbe hier nur in ſo fern zu betrachten, als es ſich an die Rechnung mit endlichen Differenzen anſchließt.

Wir wollen die Formel im §. 43 und 582, nämlich:

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0$$

wieder betrachten, worin y eine Function der Veränderlichen x iſt, welche für die Werthe $x = 0$, $x = \Delta x$, $x = 2\Delta x$, ... $x = n\Delta x$ gegeben iſt. Wir wollen $n\Delta x = x$, $y_n = fx$ und $y_0 = f(0)$ ſetzen, ſo verwandelt ſich dieſe Formel in:

$$fx = f(0) + \frac{x}{1.\Delta x}\Delta f(0) + \frac{x(x-\Delta x)}{1.2.\Delta x^2}\Delta^2 f(0) + \text{ꝛc.} \qquad (17)$$

Wenn der Werth y_0 nicht $x = 0$, ſondern $x = x_0$ entſpräche, ſo müßte man im zweiten Theile der vorhergehenden Gleichung $x - x_0$ für x und fx_0 für $f(0)$ ſetzen.

Wenn man in der Formel (17), deren Aehnlichkeit mit der Maclaurin'ſchen Reihe in die Augen fällt, $x = 0$, $x = \Delta x$, $x = 2\Delta x$, ... $x = n\Delta x$ ſetzt, ſo kommt man wieder auf die Werthe $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$, welche zur Bildung der Differenzen Δy_0, $\Delta^2 y_0$, ... $\Delta^n y_0$ gedient haben; aber man kann auch annehmen, daß die Gleichung (17) für alle dazwiſchen liegende Werthe von x ſtattfindet, und alsdann erfüllt dieſe Gleichung den Zweck einer Interpolationsformel. Man kann ſie auch auf die Form:

$$fx = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{ꝛc.} \qquad (18)$$

bringen, wo $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ gegebene Conſtanten bezeichnen. Man muß vorausſetzen, daß die Differenzen Δ^1, Δ^2, Δ^3, ꝛc. abnehmen, ſo daß man bei den Differenzen der n^{ten} Ordnung ſtehen bleiben kann, wenn man die der höhern Ordnungen vernachläſſigt, und alsdann enthält die Formel (17) oder (18) nur eine endliche Anzahl von Gliedern, ſo daß man ſtatt der Function fx eine ganze rationale Function von x hat.

§. 601. Wenn die Differenzen von den höhern, als von der n^{ten} Ordnung Null wären, ſo könnte man die Tafel der Werthe von fx vor und hinter dem zum Anfangspunkte genommenen Gliede doch beliebig weit fortſetzen, indem man ſich zu dieſem Zwecke entweder der Formel (17) bediente, oder indem man die Differenzen von den niedrigeren Ordnungen durch ſucceſſive Additionen bildete. Auch kann man die Tafel erweitern, wenn die Differenzen der n^{ten} Ordnung blos ſehr klein ſind, indem man ſie als ſtreng $= 0$ behandelt; aber alsdann muß man jenſeits der urſprünglichen Grenzen der Tafel einige bekannte Werthe von fx haben, welche gleichſam als feſte Anhaltspunkte dienen, und deren Uebereinſtimmung mit den berechneten Werthen eine hinreichende Garantie für die Genauigkeit der zwiſchenliegenden Werthe gibt, wenigſtens bis auf Größen von der Ordnung genau, welche man zu vernachläſſigen berechtigt iſt. Die Grenzen, innerhalb welcher man die Tafel erweitern darf, ſind diejenigen, zwiſchen welchen man die Gleichung (17) als Interpolationsformel anwenden kann.

Wenn die Tafeln für Werthe der Veränderlichen berechnet ſind, die einander ſo nahe liegen, daß man innerhalb einer gewiſſen Ausdehnung die Differenzen der erſten Ordnung als conſtant und die von den höhern Ordnungen als Null betrachten kann, ſo reducirt ſich die Interpolation, wie ſchon oft gezeigt worden, auf die Berechnung von Proportionaltheilen.

§. 602. Wenn man die Formel (3) auf die Berechnung des Zahlenwerthes des bestimmten Integrales $\int_{x_0}^{x} fx\,dx$ anwendet, so kann es geschehen, daß die Function fx nur durch eine Tafel gegeben ist, welche blos zu einer genäherten Berechnung der Werthe der Ableitungen fx, $f'x$, $f''x$, ꝛc. die Mittel an die Hand gibt (§. 44). Wir wollen annehmen, daß diese Tafel die Werthe von fx für Werthe von x gibt, welche sich nach gleichen Unterschieden ändern, indem das Intervall der Grenzen $x - x_0$ wieder ein Vielfaches von Δx ist. Wenn man eine Veränderliche z und eine Function:

$$fz = f(x + z) + f(x_0 - z)$$

als Hülfsgrößen anwendet, so daß:

$$f^{(n)}(0) = f^{(n)}x - f^{(n)}x_0, \quad \Delta^n f(0) = \Delta^n fx - \Delta^n fx_0 \qquad (19)$$

ist, und annimmt, daß die Veränderliche z successive die Werthe $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, ꝛc. annimmt; so gibt die Formel (17) durch eine bloße Vertauschung von f mit f und von x mit z:

$$fz = f(0) + \frac{z}{1 \cdot \Delta x}\Delta f(0) + \frac{z(z - \Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot \Delta x^2}\Delta^2 f(0) + \text{ꝛc.}$$

Wenn man nun diese Formel nach dem Prinzipe der Interpolation als für beliebige Werthe von z stattfindend betrachtet, so kann man die beiden Theile als stetige Functionen von z differenziren, und wenn man dann $z = 0$ setzt, so erhält man:

$$\Delta x f'(0) = \Delta f(0) - \tfrac{1}{2}\Delta^2 f(0) + \tfrac{1}{3}\Delta^3 f(0) - \tfrac{1}{4}\Delta^4 f(0) + \text{ꝛc.},$$

$$\Delta x^3 f'''(0) = \Delta^3 f(0) - \tfrac{3}{2}\Delta^4 f(0) + \text{ꝛc.}, \ldots\ldots \text{ꝛc.}$$

Setzt man für $f'(0), f'''(0), \ldots \Delta f(0), \Delta^2 f(0), \ldots$ ihre durch die Gleichungen (19) gegebenen Werthe wieder und substituirt in die Formel (3), so erhält man die von Laplace in der Mécanique céleste zuerst gegebene Formel:

$$\int_{x_0}^{x} fx\,dx = \Delta x\Big[\sum_{x_0}^{x} fx + \frac{1}{2}fx - \frac{1}{2}fx_0 - \frac{1}{12}(\Delta fx - \Delta fx_0)$$
$$+ \frac{1}{24}(\Delta^2 fx - \Delta^2 fx_0) - \frac{19}{20}(\Delta^3 fx - \Delta^3 fx_0)$$
$$+ \frac{3}{160}(\Delta^4 fx - \Delta^4 fx_0) - \frac{863}{60480}(\Delta^5 fx - \Delta^5 fx_0) + \text{ꝛc.}\Big]$$

Es muß vorausgesetzt werden, daß sich die Tafel der Werthe von fx über die obere Integrationsgrenze hinaus erstreckt, damit sie die sich auf diese oberen Grenzen beziehenden Differenzen Δfx, $\Delta^2 fx$, $\Delta^3 fx$, ꝛc. implicite bestimmt.

§. 603. Das umgekehrte Problem der Interpolation besteht in der Bestimmung des Werthes von x, welcher einem gegebenen Werthe fx der Function f entspricht. Wenn man die Gleichung (17) als Interpolationsformel anwendet, so läuft die Auflösung dieser Aufgabe auf die Auflösung einer algebraischen Gleichung des n^{ten} Grades hinaus, indem $\Delta^n f(0)$ die höchste in der Formel vorkommende Differenz ist. Statt aber bei dieser Auflösung sich der allgemeinen Methoden von einer so schwerfälligen Anwendung zu bedienen, wendet man successive Annäherungen an, und setzt zu dem Zwecke:

$$x = \frac{\Delta x}{Fx} \cdot \frac{fx - f(0)}{\Delta f(0)},$$

wo Fx eine Function von x bezeichnet, welche den Werth:

$$1 + \left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{\Delta^2 f(0)}{1.2.\Delta f(0)} + \left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right)\frac{\Delta^3 f(0)}{1.2.3.\Delta f(0)} + \text{&c.}$$

hat. Für den erſten Näherungswerth von x nimmt man:

$$\xi_0 = \Delta x \cdot \frac{fx - f(0)}{\Delta f(0)},$$

für den zweiten Näherungswerth:

$$\xi_1 = \frac{\Delta x}{F\xi_0} \cdot \frac{fx - f(0)}{\Delta f(0)},$$

für den dritten:

$$\xi_2 = \frac{\Delta x}{F\xi_1} \cdot \frac{fx - f(0)}{\Delta f(0)},$$

und ſo fort.

Das Problem der Interpolation umfaßt als beſondern Fall das der Einſchaltung, welches darin beſteht, zwiſchen den durch eine Tafel gegebenen Werthen eine beſtimmte Anzahl zwiſchen liegender Werthe einzuſchalten, und man nimmt gewöhnlich an, daß die eingeſchalteten Glieder um dieſelben Differenzen von einander verſchieden ſein müſſen, wie die Glieder der urſprünglichen Tafel.

§. 604. Wenn die Tafel die Werthe der Function nicht für Werthe der unabhängigen Veränderlichen gäbe, welche nach gleichen Differenzen fortſchreiten, wie es im Vorhergehenden vorausgeſetzt iſt; ſo müßte man zu andern Interpolationsformeln ſeine Zuflucht nehmen, und es ließen ſich deren vermittelſt der Rechnung mit endlichen Differenzen ableiten; allein es iſt einfacher, und für unſern Zweck hinreichend, geradezu mit Lagrange

$$y = X_0 y_0 + X_1 y_1 + X_2 y_2 + \ldots\ldots + X_n y_n$$

zu ſetzen, wo $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ wieder die gegebenen Werthe der Function y bezeichnen, welche den Werthen $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ der Veränderlichen x entſprechen, und wo X_i eine Function von x iſt, welche ſich für $x = x_i$ auf die Einheit reducirt und für $x = x_{i'}$ auf Null, wenn der Index i' jeden andern Werth als i hat. Offenbar wird dieſer doppelten Bedingung genügt, wenn man

$$X_i = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots\ldots(x_i - x_n)}$$

ſetzt, was übrigens auch auf unendlich viele andere Weiſen geſchehen könnte, weil das Problem der Interpolation nothwendig unbeſtimmt iſt.

Drittes Kapitel.

Theorie der Gleichungen mit endlichen Differenzen zwischen zwei discontinuirlichen Veränderlichen.

I. Integration unter endlicher Form der Differenzengleichungen mit zwei Veränderlichen.

§. 605. Die Theorie der Gleichungen mit endlichen Differenzen, welche in Beziehung auf wichtige Anwendungen bei weitem nicht so fruchtbar ist, als die der Differenzialgleichungen, verdient dennoch auch in einem Elementarwerke etwas näher erörtert zu werden; denn die Vergleichung beider Theorien zeigt Aehnlichkeiten und Verschiedenheiten, wodurch sich beide gegenseitig beleuchten, und welche die allgemeinen Gesetze der Analysis besser hervortreten lassen.

Wir wollen nur die Differenzengleichungen mit zwei Veränderlichen x, y hier etwas näher betrachten, und zwar successive unter zwei verschiedenen Gesichtspunkten, nämlich zunächst als Ausdruck des Gesetzes der Reihe der Werthe von y, welche einer Reihe bestimmter Werthe von x entsprechen, und dann als Ausdruck einer Eigenschaft der Function y, welche, wie die unabhängige Veränderliche x stetig zunimmt.

Man kann immer voraussetzen, daß das Intervall Δx der auf einander folgenden Werthe der unabhängigen Veränderlichen constant und der Einheit gleich ist (§. 583). Wenn Δx keine constante Zahl, sondern eine Function von x allein, oder von x und y zugleich wäre; so könnte man x und y als Functionen der positiven oder negativen ganzen Zahl i betrachten, welche den Rang des Gliedes x_i in der Reihe der Werthe von x und den des correspondirenden Gliedes y_i in der Reihe der Werthe von y bestimmt. Die Veränderlichen x, y würden alsdann durch zwei Differenzengleichungen, auf welche man das im §. 165 für die Differenzialgleichungen angegebene Eliminationsverfahren anwenden könnte als Functionen des Index i bestimmt, so daß man auf eine Endgleichung käme, woraus eine der Veränderlichen x, y, und ihre Differenzen verschwunden wären, und in dieser Endgleichung, welche im Allgemeinen von einer höhern Ordnung, als die der einen oder der andern der gegebenen Gleichungen sein würde, würde sich die unabhängige Veränderliche i nach constanten und der Einheit gleichen Incrementen ändern.

Uebrigens wird bei den meisten Aufgaben, auf welche sich die Integration der Differenzengleichungen anwenden läßt, in so fern sie den Zweck hat, das allgemeine Glied einer Reihe auszudrücken, das Gesetz der Erzeugung der Reihe, welches durch die Differenzengleichung ausgedrückt wird, unmittelbar durch den Index ausgedrückt, welcher also die Stelle einer unabhängigen Veränderlichen vertritt, ohne daß eine vorläufige Transformation erforderlich ist.

§. 606. Eine Differenzengleichung der n^{ten} Ordnung, worin die unabhängige Veränderliche x constante und der Einheit gleiche Incremente hat, kann allgemein ausgedrückt werden durch:

$$F(x, y, \Delta^2 y, \ldots\ldots \Delta^n y) = 0,$$

oder durch:

$$F(x, y, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n) = 0,$$

wenn die ſucceſſiven Differenzen als Functionen der auf einander folgenden Werthe von y ausgedrückt werden (§. 582). Man leitet alſo aus einer Differenzengleichung der erſten Ordnung y_1, durch y ausgedrückt, aus einer Differenzengleichung der zweiten Ordnung y_2, durch y_1 und y ausgedrückt, ab, und allgemein gibt eine Differenzengleichung der n^{ten} Ordnung den Zahlenwerth eines Gliedes der Reihe, durch die Werthe der n vorhergehenden Glieder ausgedrückt. Umgekehrt, das Integral der Differenzengleichung, oder der analytiſche Ausdruck des allgemeinen Gliedes der erzeugten Reihe muß ebenſo viele willkürliche Conſtanten enthalten, als die Ordnungszahl der Gleichung Einheiten hat, wo die Beſtimmung dieſer n Conſtanten gleichbedeutend ſein muß mit der Beſtimmung der n Glieder, welche man willkürlich annehmen muß, um die Reihe vermittelſt der gegebenen Differenzengleichung numeriſch conſtruiren zu können. Dieſe Bemerkungen ſind den ſich in der Theorie der Differenzialgleichungen darbietenden ſo analog, daß die bloße Andeutung derſelben hier genügt, obgleich wir bald gewiſſe Folgerungen daraus ziehen werden, nachdem wir einige Fälle unterſucht haben, wo die Differenzengleichungen ein eigentliches Integral geſtatten, ſo daß man das allgemeine Glied der entſprechenden Reihe mit ſo viel willkürlichen Conſtanten, als die Ordnungszahl der Differenzgleichung Einheiten hat, analytiſch ausdrücken kann.

§. 607. Betrachten wir zunächſt die allgemeine Differenzengleichung vom erſten Grade und von der erſten Ordnung:

$$\Delta y + yfx = fx$$

und ſetzen, wie im §. 440, $y = \theta t$, ſo erhalten wir:

$$\theta\Delta t + t\Delta\theta + \Delta\theta \cdot \Delta t + \theta t \cdot fx = fx.$$

Wegen der Unbeſtimmtheit der Functionen θ, t kann dieſe Gleichung in die beiden folgenden:

$$\theta\Delta t + \Delta\theta \cdot \Delta t = fx, \quad \Delta\theta + \theta fx = 0$$

zerlegt werden. Setzt man zur Erleichterung der Integration der zweiten $\theta = e^z$; ſo erhält man (§. 589):

$$\Delta\theta = e^z(e^{\Delta z} - 1) = \theta(e^{\Delta z} - 1),$$

folglich:

$$e^{\Delta z} = 1 - fx, \quad \Delta z = \log.(1 - fx), \quad z = \Sigma \cdot \log.(1 - fx),$$

und endlich:

$$\theta = e^z = Fx,$$

wo Fx das Product aller Werthe bezeichnet, welche die Function $1 - fx$ innerhalb der Grenzen des Integrales Σ annimmt. Iſt dieſe Function F ſo beſtimmt, ſo hat man:

$$\theta + \Delta\theta = F(x+1), \quad \Delta t = \frac{fx}{F(x+1)}$$

$$y = Fx \cdot \sum \cdot \frac{fx}{F(x+1)}.$$

Wenn die Function fx ſich auf eine Conſtante $1 - a$ reducirt, ſo gibt dieſe Formel:

$$y = a^x \sum \cdot \frac{fx}{a^{x+1}},$$

und wenn ſich die Function fx auch auf eine Conſtante b reducirt, ſo erhält man:

$$y = a^x \left(\frac{b}{(1-a)a^x} + \text{const.} \right).$$

Allgemein, wenn die Function f conſtant wird, ſo läßt ſich die Integration jedesmal verrichten, wenn f eine rationale und ganze Function bezeichnet.

Man ſieht ſchon ein, daß man y nicht als eine ſtetige Function von x würde betrachten können, wenn die Conſtante a negativ wäre (§. 2), wofern die willkürliche Conſtante nicht verſchwindet, wodurch a^x aus der vorhergehenden Gleichung verſchwinden würde. Aber wenn y das allgemeine Glied einer Reihe und x einen Index bezeichnet, welcher nur ganze Werthe haben kann, ſo kann die Conſtante a ſehr wohl negativ ſein, woraus blos folgt, daß die auf einander folgenden Werthe von a^x abwechſelnd poſitiv und negativ ſind.

§. 608. Betrachten wir die lineare Gleichung mit endlichen Differenzen von einer beliebigen Ordnung, welche die allgemeine Form:

$$\Delta^n y + P \cdot \Delta^{n-1} y + Q \cdot \Delta^{n-2} y + \ldots\ldots + Uy = V$$

hat, wo P, Q, ... U, V Functionen von x bezeichnen, oder was auf daſſelbe hinausläuft, weil ſich die Differenzen der verſchiedenen Ordnungen als lineare Functionen der ſucceſſiven Werthe der unabhängigen Veränderlichen ausdrücken laſſen:

$$y_{x+n} + P y_{x+n-1} + Q y_{x+n-2} + \ldots\ldots + U y_x = V, \qquad (a)$$

und wie bei den analogen Differenzialgleichungen wird bewieſen, daß ſich die Gleichung (a) auf folgende:

$$y_{x+n} + P y_{x+n-1} + Q y_{x+n-2} + \ldots\ldots + U y_x = 0 \qquad (b)$$

zurückführen läßt.

Wenn man durch $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$, ꝛc. Werthe von y_x bezeichnet, welche der Gleichung (b) genügen, ſo hat dieſe, wie die entſprechende Differenzialgleichung die charakteriſtiſche Eigenſchaft, daß ſie auch durch den Werth $y_x = \Sigma \cdot C_i y_x^{(i)}$ verificirt wird, wo die Coefficienten C_i willkürliche Conſtanten bezeichnen. Wenn man alſo n particuläre Auflöſungen oder Integrale der Gleichung (b) kennt, ſo hat man auch das allgemeine Integral derſelben mit den erforderlichen n Conſtanten. Die Ordnung der zu integrirenden Gleichung ſinkt um eine Einheit herab, wenn man ein particuläres Integral derſelben kennt, u. ſ. f. (§. 462).

Die n particulären Integrale laſſen ſich leicht erhalten, wenn die Coefficienten P, Q, ... U Conſtanten ſind; denn wenn man $y_x = m^x$, folglich $y_{x+i} = m^{x+i}$ ſetzt, ſo hat man zur Beſtimmung von m die algebraiſche Gleichung:

$$m^n + P m^{n-1} + Q m^{n-2} + \ldots\ldots + U = 0, \qquad (m)$$

und wenn man die Wurzeln derſelben mit $m_1, m_2, \ldots m_n$ bezeichnet, ſo nimmt das allgemeine Integral der Gleichung (b) folgende Form an:

$$y_x = C_1 m_1^x + C_2 m_2^x + \ldots\ldots + C_n m_n^x.$$

§. 609. Wir wollen das Vorhergehende auf eine merkwürdige Aufgabe der combinatoriſchen Analyſis anwenden, welche ſich folgendermaßen ausdrücken läßt, wenn man der Kürze wegen die Zahl m den Exponenten einer Combination aus je m Elementen nennt:

„Unter der Geſammtzahl der Combinationen, welche man aus x Elementen bilden kann, wenn man ſie zu je 1, je 2, je 3,... je x verbindet, die Anzahl der Combinationen zu beſtimmen,

deren Exponenten, durch einen gewiſſen Modulus n dividirt, eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... n — 1 zum Reſte geben."

Wir wollen die geſuchten Zahlen, welche ebenſo viele discontinuirliche Functionen von x ſind, mit $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(n)}$ bezeichnen.

Wenn x um eine Einheit zunimmt, ſo iſt klar, daß die Combinationen der r^{ten} Claſſe, d. h. die, deren Exponent durch n dividirt, den Reſt r gibt, durch Verbindung mit dem neuen Elemente Combinationen der $r+1^{ten}$ Claſſe werden, und daß ferner dieſes Element, allein genommen, eine neue Combination mit dem Exponenten 1 gibt. Man hat alſo:

$$\Delta y^{(0)} = y^{(n-1)},\ \Delta y^{(1)} = y^{(0)} + 1\ \Delta y^{(2)} = y^{(1)}, \ldots .$$
$$\ldots . \Delta y^{(n-1)} = y^{(n-2)}, \qquad (c_1)$$

und folglich:

$$\Delta^2 y^{(0)} = \Delta y^{(n-1)},\ \Delta^2 y^{(1)} = \Delta y^{(0)},\ \Delta^2 y^{(2)} = \Delta y^{(1)}, \ldots .$$
$$\ldots . \Delta^2 y^{(n-1)} = \Delta y^{(n-2)}. \qquad (c_2)$$

Beſtimmt man die ſucceſſiven Differenzen bis zu denen der n^{ten} Ordnung, ſo findet man endlich:

$$\Delta^n y^{(0)} = \Delta^{n-1} y^{(n-1)},\ \Delta^n y^{(1)} = \Delta^{n-1} y^{(0)}, \ldots . \Delta^n y^{(n-1)} = \Delta^{n-1} y^{(n-2)}, \qquad (c_n)$$

und die Elimination zwiſchen den Gleichungen $(c_1), (c_2), \ldots (c_n)$ gibt:

$$\Delta^n y^{(0)} = y^{(0)} + 1 \qquad (d_0)$$
$$\Delta y^{(1)} = y^{(1)},\ \Delta^n y^{(2)} = y^{(2)}, \ldots . \Delta^n y^{(n-1)} = y^{(n-1)}. \qquad (d)$$

Jede der Gleichungen (d) iſt von der Form $\Delta^n y_x = y_x$, woraus folgt, wenn man die Differenzen durch die ſucceſſiven Werthe ausdrückt (§. 582):

$$y_{x+n} - \frac{n}{1} \cdot y_{x+n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot y_{x+n-2} - \ldots . \pm y_x = y_x.$$

Wenn n eine gerade Zahl iſt, ſo verſchwindet das Glied mit y_x, die Ordnung der Gleichung ſinkt um eine Einheit herab, und man hat:

$$y_{x+n-1} - \frac{n}{1} \cdot y_{x+n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot y_{x+n-3} - \ldots . - \frac{n}{1} \cdot y_x = 0. \qquad (d_1)$$

Wenn n eine ungerade Zahl iſt, ſo hat man:

$$y_{x+n} - \frac{n}{1} \cdot y_{x+n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot y_{x+n-2} - \ldots . - 2y_x = 0. \qquad (d_2)$$

Im erſten Falle verwandelt ſich die Gleichung (m) in:

$$\frac{(m-1)^n - 1}{m} = 0,$$

und im zweiten in:

$$(m-1)^n - 1 = 0,$$

woraus folgt (§. 79):

$$m = 1 + \cos. \frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin. \frac{2i\pi}{n}$$
$$= 2 \cos. \frac{i\pi}{n} \left(\cos. \frac{i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin. \frac{i\pi}{n} \right),$$

und wenn man die imaginären Exponentialgrößen gehörig transformirt:

$$\left.\begin{aligned} y_x &= C \cdot 2^x \\ &+ M_1 \left(2 \cos. \frac{\pi}{n}\right)^x \cos. \frac{\pi x}{n} + M_2 \left(2 \cos. \frac{2\pi}{n}\right)^x \cos. \frac{2\pi x}{n} + \text{ꝛc.} \\ &+ N_1 \left(2 \cos. \frac{\pi}{n}\right)^x \sin. \frac{\pi x}{n} + N_2 \left(2 \cos. \frac{2\pi}{n}\right)^x \sin. \frac{2\pi x}{n} + \text{ꝛc.} \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Wenn man nun für y_x ſucceſſive jede der Functionen $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(n-1)}$ nimmt, ſo ergeben ſich aus der Formel (e) die Werthe aller dieſer Functionen von x, welche ſich nur durch die Beſtimmung der willkürlichen Conſtanten C, M_1, N_1, M_2, N_2, ꝛc. unterſcheiden, und was die Gleichung (d_0) anlangt, ſo iſt klar, daß die Formel (e) auch das Integral derſelben gibt, wofern man zu dem zweiten Theile die conſtante Zahl — 1 addirt. Ueberdies iſt nach dem binomiſchen Lehrſatze bekanntlich:

$$y^{(0)} + y^{(1)} + y^{(2)} + \ldots\ldots + y^{(n-1)} = 2^x - 1.$$

Wenn man z. B. $n = 4$ ſetzt, und die willkürlichen Conſtanten gehörig beſtimmt, ſo findet man:

$$y^{(0)} = \frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x \cos. \frac{1}{4}\pi x - 1,$$

$$y^{(1)} = \frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x \sin. \frac{1}{4}\pi x,$$

$$y^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot 2^x - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x \cos. \frac{1}{4}\pi x,$$

$$y^{(3)} = \frac{1}{4} \cdot 2^x - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x \sin. \frac{1}{4}\pi x.$$

§. 610. Zuweilen kann man die Integrale der Differenzengleichungen durch gewöhnliche beſtimmte Integrale ausdrücken, und um den Geiſt des Verfahrens kennen zu lehren, wollen wir die Differenzengleichung:

$$y_{x+1}(m + x) + y_x(m + 2x) = 0$$

betrachten, worin m eine poſitive Conſtante ſein ſoll. Wir wollen

$$y_x = \int \Omega \omega^x d\omega$$

ſetzen, wo Ω eine Function von ω bezeichnet, worin x nicht vorkommt, ſo kommt es darauf an, dieſe Function und die Grenzen des Integrales ſo zu beſtimmen, daß die gegebene Differenzengleichung erfüllt wird.

Dieſe Gleichung gibt:

$$(m + x) \int \Omega \omega^{x+1} d\omega + (m + 2x) \int \Omega \omega^x d\omega = 0,$$

oder:

$$m \int \Omega (1 + \omega) \omega^x d\omega + \int \Omega (2\omega + \omega^2) d \cdot \omega^x = 0. \quad (f)$$

Aber wenn man theilweiſe integrirt, ſo erhält man:

$$\int \Omega (2\omega + \omega^2) d \cdot \omega^x = \Omega (2\omega + \omega^2) \omega^x - \int \omega^x d[\Omega (2\omega + \omega^2)].$$

Folglich verwandelt ſich die Gleichung (f), wenn man zwei Wurzeln der Gleichung:

$$\Omega (9\omega + \omega^2) = 0 \quad (\omega)$$

zu den Grenzen des Integrales nimmt, in:

$$\int \{m(1 + \omega) \Omega d\omega - d[\Omega (2\omega + \omega^2)]\} \omega^x = 0,$$

und man genügt derſelben unabhängig von x, wenn man die Function Ω durch die Differenzialgleichung:

$$m(1+\omega)\,\Omega d\omega - d[\Omega(2\omega+\omega^2)] = 0$$

beſtimmt, welche gibt:

$$\Omega = C(2\omega+\omega^2)^{\frac{m}{2}-1},$$

wo C eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Subſtituirt man dieſen Werth von Ω in die Gleichung (ω), ſo verwandelt ſie ſich in:

$$C(2\omega+\omega^2)^{\frac{m}{2}} = 0,$$

und da m nach der Vorausſetzung poſitiv iſt, ſo geſchieht derſelben Genüge, wenn man $\omega = 0$, $\omega = -2$ zu den Grenzen des Integrales nimmt, woraus folgt:

$$y_x = C\int_0^{-2}(2\omega+\omega^2)^{\frac{m}{2}-1}\,\omega^x d\omega.$$

Der Ausdruck wird eleganter, wenn man

$$\omega = \cos.\alpha - 1,\quad 2\omega+\omega^2 = -\sin.^2\alpha,\quad d\omega = -\sin.\alpha\, d\alpha$$

ſetzt, welches gibt:

$$y_x = C(-1)^x\int_0^{\pi}(1-\cos.\alpha)^x(\sin.\alpha)^{m-1}\,d\alpha.$$

Zur Beſtimmung der willkürlichen Conſtanten C vermittelſt des anfänglichen Werthes y_0 hat man ferner die Gleichung:

$$y_0 = C\int_0^{\pi}(\sin.\alpha)^{m-1}\,d\alpha.$$

§. 611. Um ein Beiſpiel der Integration für den Fall zu geben, wo die Differenz der einen Veränderlichen nicht als conſtant betrachtet wird, wollen wir annehmen, es ſollte die Größe y_x als Function von x beſtimmt werden, welche der Gleichung:

$$y_{2x} = y_x^2 - 2 \qquad (g)$$

genügt, oder das allgemeine Glied der Reihe der Werthe von y, welche man vermittelſt dieſer Gleichung conſtruirte, wenn die anfänglichen Werthe von x, y reſp. x_0, y_0 ſind. Es ſei i der Index der in den Reihen der Werthe von x und von y einander entſprechenden beiden Glieder, ſo hat man:

$$x_{i+1} = 2x_i, \qquad (g_1) \qquad y_{i+1} = y_i^2 - 2. \qquad (g_2).$$

Die Gleichung (g_1) iſt linear und ihr Integral iſt:

$$x_i = x_0 \cdot 2^i.$$

Wenn man den anfänglichen Werth y_0 auf die Form:

$$y_0 = c + \frac{1}{c} \qquad (h)$$

bringt, ſo gibt die Gleichung (g_2):

$$y_1 = c^2 + \frac{1}{c^2},\quad y_2 = c^4 + \frac{1}{c^4},\quad \ldots\ y_i = c^{2^i} + \frac{1}{c^{2^i}}$$

und folglich:

$$y_x = c^{\frac{x}{x_0}} + c^{-\frac{x}{x_0}}.$$

Es iſt zu bemerken, daß die letzte Gleichung, welche das vollſtändige Integral von (ε) iſt, zwei willkürliche und unabhängige Conſtanten x_0, c, oder x_0, y_0 enthält, weil in der That die Gleichung (ε) erſt dann conſtruirt werden kann, wenn man ſie in das Syſtem der Gleichungen (ε_1), (ε_2), transformirt, und x_0, y_0 willkürlich angenommen hat.

II. Ueber die arithmetiſche Conſtruction der Differenzengleichungen mit zwei Veränderlichen. — Folgerungen in Beziehung auf die Vielheit der allgemeinen Integrale, auf die Exiſtenz der ſingulären Integrale, und in Beziehung auf den Uebergang von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen.

612. Wir wollen wieder die Differenzengleichung:

$$F(x, y, \Delta y) = 0 \qquad (F)$$

arithmetiſch zu conſtruiren ſuchen, und annehmen, daß man aus derſelben zwei Werthe von Δy als Functionen von x, y ableiten kann. Nachdem man den anfänglichen Werth y_0, welcher einem beſtimmten Werthe von x, z. B. $x = 0$ entſpricht, willkürlich angenommen hat, erhält man, je nachdem man den einen, oder den andern der beiden durch die Gleichung F gegebenen Werthe von Δy wählt, zwei verſchiedene Werthe von y_1, wovon jedem aus demſelben Grunde zwei verſchiedene Werthe von y_2 entſprechen, ſo daß man für die Partialreihe (y_0, y_1, y_2) vier verſchiedene Syſteme von Werthen hat. Für die Partialreihe (y_0, y_1, y_2, y_3), welche ein Glied mehr enthält, würde man acht verſchiedene Syſteme von Werthen erhalten, u. ſ. f. Allgemein, wenn die Gleichung (F) für Δy, m verſchiedene Werthe gibt, ſo kann die Partialreihe $(y_0, y_1, y_2, \ldots y_n)$ nach dieſer Gleichung auf eben ſo viele verſchiedene Weiſen conſtruirt werden, als Einheiten in m^n enthalten ſind. Die als Beiſpiel genommene Differenzengleichung iſt zwar nur von der erſten Ordnung; allein dieſelben Bemerkungen ſind auch auf eine Differenzengleichung von einer beliebigen Ordnung anwendbar.

Wenn ſich unter den auf dieſe Weiſe aus der Gleichung (F) arithmetiſch abgeleiteten verſchiedenen Reihen mehrere befinden, deren allgemeines Glied durch eine algebraiſche oder transcendente Function des Index und des anfänglichen Werthes y_0, oder einer die Stelle deſſelben vertretenden willkürlichen Conſtante ausgedrückt werden kann; ſo hat die gegebene Gleichung mehrere verſchiedene Integrale, welche aber alle vollſtändig ſind, weil ſie eine willkürliche Conſtante enthalten. Zu dieſem Reſultate gelangt man in der That auf eine indirecte Weiſe, wenn man, ſtatt von der Differenzengleichung zu dem vollſtändigen Integrale mit einer willkürlichen Conſtante über zu gehen, von einer Gleichung zwiſchen x, y, und einer Conſtanten zu einer Differenzengleichung übergeht, woraus dieſe Conſtante eliminirt iſt.

Wir wollen z. B. die ſehr einfache Gleichung:

$$y = ax + a^2 \qquad (1)$$

nehmen, welche durch Differenziren für $\Delta x = 1$

$$\Delta y = a, \qquad (2)$$

und durch die Elimination der Conſtanten (a):

$$\Delta y^2 + x\Delta y - y = 0 \qquad (3)$$

gibt, woraus folgt, daß die Gleichung (1) das vollſtändige Integral der Gleichung (3) iſt.

Betrachten wir nun in der Gleichung (1) den Parameter a als eine veränderliche Function von x und ſetzen den Theil der Veränderung des zweiten Theiles der Gleichung (1), welcher von der Veränderung von a herrührt, für ſich = 0, damit die Gleichungen (2) und (3) noch ſtattfinden; ſo erhalten wir:

$$\Delta a\,(\Delta a + 2a + x + 1) = 0,$$

und dieſe Gleichung zerfällt in die beiden andern:

$$\Delta a = 0,\quad \Delta a + 2a + x + 1 = 0. \qquad (4)$$

Die erſte gibt $a = \text{const.}$, ſo daß man wieder auf die Gleichung (1) kommt, und auf die zweite könnte man die allgemeine Formel im §. 607 für die Integration der linearen Differenzengleichungen der erſten Ordnung anwenden; allein wenn man unmittelbar $a = u + mx + n$ ſetzt, wo u eine neue Function von x und m, n willkürliche Conſtanten bezeichnen; ſo erhält man:

$$\Delta u + 2u + (2m + 1)x + 2n + m + 1 = 0,$$

oder einfacher, wenn man $m = -\frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{4}$ ſetzt:

$$\Delta u + 2u = 0. \qquad (5)$$

Das vollſtändige Integral der Gleichung (5), welche man auf die Form $u_{x+1} + u_x = 0$ bringen kann, iſt:

$$u_x = b\,(-1)^x, \text{ folglich: } a = b\,(-1)^x - \frac{x}{2} - \frac{1}{4},$$

wo (b) eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Dieſer Werth von a muß in die Gleichung (1) ſubſtituirt werden, und wenn man zur Erleichterung dieſer Subſtitution dieſe Gleichung auf die Form

$$y = \left(a + \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

bringt, ſo erhält man:

$$y = \left[b\,(-1)^x - \frac{1}{4}\right]^2 - \frac{x^2}{4}. \qquad (6)$$

Man erhält alſo eine Gleichung mit x, y, welche die Eigenſchaft hat, daß ſie der Gleichung (3) genügt, und welche, ſowohl als die Gleichung (1) ein vollſtändiges Integral derſelben iſt, weil ſie die willkürliche Conſtante (b) enthält.

§. 613. Der Geometer Charles, welcher zuerſt die Vielheit der Integrale der Differenzengleichungen angegeben hat, unterſcheidet dieſe Integrale in directe und indirecte. Nach ſeiner Sprache wäre alſo die Gleichung (1) das directe, und die Gleichung (6) das indirecte Integral der Gleichung (3), allein dieſe Ausdrücke müſſen verworfen werden, weil ſie zu unrichtigen Vorſtellungen Veranlaſſung geben. Wenn es wahr iſt, daß, wenn man auf die oben angegebene Weiſe verfährt, d. h. das Integral (1) unmittelbar annimmt, um daraus die Differenzengleichung (3), und dann das zweite Integral (6) abzuleiten, dieſe nur auf eine indirecte Weiſe erhalten iſt, ſo iſt es auch wahr, daß, wenn man zuerſt die Differenzengleichung annimmt, die beiden derſelben genügenden Integrale, welche beide durch eine willkürliche Conſtante ergänzt werden, ebenfalls directe ſind, obgleich das eine zufällig eine einfachere algebraiſche Form haben kann. Denn nichts hindert, die Gleichung (6) ebenſo zu behandeln, wie man die Gleichung (1) behandelt hat, indem man den Parameter b als eine Function von x betrachtet, und die

Summe der von der Veränderung dieſes Parameters herrührenden Glieder für ſich = 0 ſetzt. Die Gleichung mit b iſt nach allen vorgenommenen Vereinfachungen:

$$\Delta b + 2b + \tfrac{1}{2}(-1)^x = 0,$$

und wenn man darauf die Formel im §. 607 anwendet, ſo erhält man:

$$b = \tfrac{1}{2}x(-1)^x + c(-1)^x,$$

wo c eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Wird dieſer Werth von b in die Gleichung (6) ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$y = \left[\frac{1}{2}x(-1)^{2x} + c(-1)^{2x} - \frac{1}{4}\right]^2 - \frac{x^2}{4} = \left(\frac{1}{2}x + c - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{x^2}{4},$$

und wenn man endlich die Conſtante vertauſcht, indem man $c - \frac{1}{4} = a$ ſetzt, ſo kommt man wieder auf die Gleichung (1), welche folglich auf dieſelbe Weiſe aus dem Integrale (6) entſpringt, wie die Gleichung (6) aus dem Integrale (1).

Man kann auch durch ein anderes Verfahren die Integralen (1) und (6) zu gleicher Zeit erhalten; denn wenn man die Gleichung (3) differenzirt, ſo erhält man die Differenzengleichung der zweiten Ordnung:

$$\Delta^2 y(\Delta^2 y + 2\Delta y + x + 1) = 0,$$

welche in die beiden andern:

$$\Delta^2 y = 0,\quad \Delta^2 y + 2\Delta y + x + 1 = 0$$

zerfällt. Die erſte gibt $\Delta y = a$, und wenn man dieſen Werth von Δy in die Gleichung (3) ſubſtituirt, ſo erhält man das Integral (1) wieder. Wenn man die zweite Gleichung, wie die zweite der Gleichungen (4) ein erſtes Mal integrirt, ſo erhält man:

$$\Delta y = b(-1)^x - \frac{x}{2} - \frac{1}{4},$$

und wenn dieſer andere Werth von Δy ſeinerſeits in die Gleichung (3) ſubſtituirt wird, ſo erhält man das Integral (6) wieder.

Man bemerkt leicht die Aehnlichkeit, welche zwiſchen dieſen Rechnungen und denen ſtattfindet, welche die ſingulären Integrale der Differenzialgleichungen geben, deren allgemeines Integral man kennt; allein dieſe Aehnlichkeit iſt bei weitem nicht vollſtändig, weil hier jedes der beiden erhaltenen Integrale eine willkürliche Conſtante enthält, und weil, wenn in einer gewiſſen Beziehung eine Aehnlichkeit mit den ſingulären Integralen ſtattfinden ſollte, die Reciprocität der zwiſchen den beiden Integralen der Differenzengleichung ſtattfindenden Verhältniſſe es nothwendig machen würden, daß man jedes dieſer Integrale als ein ſinguläres Integral in Beziehung auf das andere betrachten müßte.

§. 614. Poiſſon hat dieſe Art der gegenſeitigen Ableitung aus einem andern Geſichtspunkte betrachtet, welcher gekannt zu werden verdient.

Wir wollen uns die Gleichung (1), als in Beziehung auf die Conſtante a aufgelöſ't und auf die Form:

$$(a - u)(a - v) = 0 \qquad (7)$$

gebracht, vorſtellen, wo u, v im Allgemeinen Functionen von x, y ſind. Es ſeien u_1, v_1 die Werthe von u, v, wenn ſich x, y reſp. in $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ verwandeln, ſo hat man auch:

$$(a - u_1)(a - v_1) = 0, \qquad (8)$$

und die Elimination von a läuft auf die Elimination derſelben Conſtanten zwiſchen der urſprünglichen Gleichung (1) und ihrer Differenzengleichung (2) hinaus. Das Reſultat dieſer Elimination iſt offenbar die Differenzengleichung:

$$(u_1 - u)(u_1 - v)(v_1 - u)(v_1 - v) = 0, \qquad (9)$$

welche folglich mit der Gleichung (3) identiſch ſein muß. Nun zerfällt aber die auf dieſe Form gebrachte Endgleichung in die vier andern:

$$u_1 - u = 0,\ v_1 - v = 0,\ u_1 - v = 0,\ v_1 - u = 0.$$

Die beiden erſten geben unmittelbar die übereinſtimmenden Integrale $u = a$, $v = a$, wenn man vermittelſt der urſprünglichen Gleichung (1) die Wurzelgrößen fortſchafft, und die beiden andern Gleichungen führen genau auf das Integral, welches Charles im Gegenſatz zu dem urſprünglichen Integrale, von welchem man ausgegangen iſt, das indirecte Integral nennt.

In dem betrachteten Beiſpiele hat man:

$$u = \tfrac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + 4y}),\ v = \tfrac{1}{2}(-x - \sqrt{x^2 + 4y}),$$

welches gibt:

$$u_1 - v = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{(x+1)^2 + 4(y + \Delta y)} + \sqrt{x^2 + 4y}) = 0$$

$$v_1 - u = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{(x+1)^2 + 4(y + \Delta y)} - \sqrt{x^2 + 4y}) = 0.$$

Zur Erleichterung der Integration wollen wir die Veränderliche vertauſchen, indem wir $\sqrt{x^2 + 4y} = z$ ſetzen; ſo verwandeln ſich dieſe Gleichungen in:

$$-1 + z_1 + z = 0,\quad 1 + z_1 + z = 0,$$

oder vielmehr:

$$\Delta z + 2z - 1 = 0,\quad \Delta z + 2z + 1 = 0,$$

und die Integration gibt:

$$z = \tfrac{1}{2} + b'(-1)^x,\quad z = -\tfrac{1}{2} + b''(-1)^x,$$

wo b', b'' willkürliche Conſtanten bezeichnen. Hieraus ergibt ſich:

$$y = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + b'(-1)^x\right]^2 - \frac{x^2}{4},$$

$$y = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2} + b''(-1)^x\right]^2 - \frac{x^2}{4},$$

und dieſe Gleichungen ſind mit dem Integrale (6) identiſch, wenn man, wie es erlaubt iſt, $b' = -2b$, $b'' = 2b$ ſetzt.

Wenn man die Hülfsveränderliche z beibehält, ſo nimmt die Gleichung (9), welche eine Transformation der Gleichung (3) iſt, folgende Form an:

$$(-1 + z_1 - z)(-1 + z_1 + z)(-1 - z_1 - z)(-1 - z_1 + z) = 0, \qquad (10)$$

und es wird derſelben offenbar Genüge geleiſtet, entweder durch einen Werth von z als Function von x, welcher einen der Factoren für alle Zahlenwerthe von x zu Null macht, oder durch einen Werth von z, welcher ſucceſſive bald den einen und bald den andern dieſer Factoren auf Null reducirt. Dieſer letzte Fall findet ſtatt, wenn man für z das Integral der Gleichung:

$$-1 + (-1)^X z_1 - z = 0 \qquad (11)$$

nimmt, wo X eine beliebige Function von x bezeichnet, welche für alle ganzen Werthe von x eine ganze Zahl iſt; denn die Function $(-1)^x$ nimmt den Werth $+1$ oder -1 an, je nachdem X eine gerade oder ungerade Zahl

ist, und der erste Theil der Gleichung (11) fällt mit dem ersten oder mit dem dritten Factor der Gleichung (10) zusammen.

Um die Gleichung (11) zu integriren, braucht man nur den ersten Theil derselben durch:

$$(-1)^{\Sigma X}$$

zu multipliciren; denn alsdann nimmt sie die Form:

$$-(-1)^{\Sigma X} + \Delta[(-1)^{\Sigma X} z] = 0$$

an, woraus folgt:

$$(-1)^{\Sigma X} z = \text{const.} + \Sigma \cdot [(-1)^{\Sigma X}].$$

Dieses Resultat wird vereinfacht, wenn man bemerkt, daß das Integral ΣX, wie die Function X für alle ganzen Werthe von x ebenfalls ganze Werthe annehmen muß. Das Quadrat der Function:

$$(-1)^{\Sigma X}$$

ist folglich beständig $= 1$, und wenn man daher die beiden Theile der vorhergehenden Gleichung zum Quadrate erhebt, indem man X für die willkürliche Function ΣX setzt, so erhält man:

$$z^2 = x^2 + 4y = [\text{const.} + \Sigma(-1)^X]^2. \qquad (12)$$

Aus dieser Formel ergibt sich das Integral (1) oder das Integral (6) wieder, je nachdem man $X = 1$ oder $X = x$ nimmt; aber man kann daraus auch unendlich viele andere Integrale ableiten, wenn man der Function X andere Formen gibt.

Wenn man durch X' eine Function von x bezeichnet, welche, wie X, für alle ganzen Werthe von x eine ganze Zahl ist, so muß das Integral der Gleichung:

$$-1 + (-1)^X z_1 - (-1)^{X'} z = 0$$

ebenfalls der Gleichung (z) genügen; aber wenn man diese Integration verrichtet, so findet man, daß die beiden willkürlichen Functionen X und X' in dem Integrale in eine einzige zusammenfallen, und man kommt wieder auf die Gleichung (12).

Diese Bemerkungen über die unbestimmte Vielheit der Integrale gewisser Differenzengleichungen rühren ebenfalls von Poisson her und machen den Gegenstand einer Abhandlung aus, durch welche dieser eminente Geometer seine so glorreiche und für die Wissenschaften so erfolgreiche Laufbahn begonnen hat. Man sieht übrigens leicht ein, daß diese unbestimmte Vielheit der Integrale davon herrühren muß, daß man arithmetisch unendlich viele verschiedene Reihen construiren kann, welche alle ein gemeinschaftliches erstes Glied haben, und alle derselben Differenzengleichung Genüge leisten, wenn diese in Beziehung auf die Differenz der höchsten Ordnung aufgelöst'e Gleichung mehrere Wurzeln hat. Aber es kam darauf an, zu beweisen, daß es unter allen diesen Reihen unendlich viele gibt, deren allgemeines Glied man analytisch ausdrücken kann, was durch die vorhergehende Untersuchung außer allen Zweifel gesetzt wird.

§. 615. Es ist wohl zu bemerken, daß der Uebergang von einem Factor zu einem andern nicht blos für die Integrale, welche man in der vorhergehenden Analyse durch die Einführung des Factors $(-1)^X$ erhält, sondern auch für die von Charles sogenannten directen und indirecten Integrale stattfinden kann. Gesetzt z. B., man hätte für $x = 0$, $y = 1$, und folglich $z = 2$, so geben die vier Factoren des ersten Theiles der Gleichung (10), einzeln $= 0$ gesetzt und nach dieser anfänglichen Bedingung integrirt:

$z = x + 2$, folglich: $y = x + 1$,

$z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(-1)^x$, $y = \frac{1}{16}\{[3(-1)^x + 1]^2 - 4x^2\}$,

$z = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}(-1)^x$, $y = \frac{1}{16}\{[5(-1)^x - 1]^2 - 4x^2\}$,

$z = -x + 2$, $y = -x + 1$.

Die erste Gleichung gibt für z einen negativen Werth, wenn x negative Werthe annimmt, welche numerisch größer als 2 sind, wogegen die vierte Gleichung für alle größern positiven Werthe von x, als 2 negative Werthe von z gibt, und der aus der zweiten oder dritten Gleichung abgeleitete Werth von z ist positiv oder negativ, je nachdem man für x eine gerade oder ungerade Zahl nimmt. Die Gleichung $y = x + 1$ genügt also der Differenzengleichung:

$$\Delta y = \tfrac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + 4y}) \qquad (13)$$

für alle Werthe von $x > -2$, und dagegen der Differenzengleichung:

$$\Delta y = \tfrac{1}{2}(-x - \sqrt{x^2 + 4y}) \qquad (14)$$

für alle Werthe von $x < -2$. Was die Gleichungen:

$$y = \frac{1}{16}\{[3(-1)^x + 1]^2 - 4x^2\}$$

$$y = \frac{1}{16}\{[5(-1)^x - 1]^2 - 4x^2\}$$

anlangt, so leisten sie abwechselnd der Gleichung (13) und der Gleichung (14) Genüge.

§. 616. Die verschiedenen Integrale, welche eine endliche Differenzengleichung haben kann, stehen in ähnlichen Beziehungen zu einander, wie die singulären und allgemeinen Integrale der Differenzialgleichungen; allein diese Analogie ist, wie schon bemerkt, nur eine partielle und unvollständige. Wenn man es als eine charakteristische Eigenschaft der singulären Integrale betrachtet, daß sie durch keine willkürliche Constante vollständig gemacht werden können, so verschwindet die in Rede stehende Analogie; aber andererseits kann man, wie Poisson ebenfalls gezeigt hat, für gewisse Differenzengleichungen singuläre Integrale angeben, welche nicht auf die durch die vorhergehenden Methoden bestimmten Integrale zurückkommen, und welche den singulären Integralen der Differenzialgleichungen in so fern analog sind, daß sie nicht durch eine willkürliche Constante zu vollständigen Integralen gemacht werden können. Denn die Rechnung im §. 477 ist auf die Differenzengleichungen, wie auf die Differenzialgleichungen anwendbar, und hieraus folgt ebenfalls, daß jeder Werth von y als Function von x, welcher die Eigenschaft hat, einer gegebenen Differenzengleichung Genüge zu leisten und zugleich den Differenzialcoefficienten $\frac{d\Delta y}{dy}$ unendlich zu machen, nur ein singuläres Integral der gegebenen Gleichung in dem eben erklärten Sinne sein kann. Es sei die Differenzengleichung:

$$y + \frac{4}{3}\Delta y - \frac{4}{9}(64)^x \Delta y^3 = 0 \qquad (15)$$

gegeben, deren vollständiges Integral:

$$y = \frac{a}{4^x} - \frac{3}{16}a^2 \qquad (16)$$

ist, wo a eine willkürliche Constante bezeichnet; so ergibt sich daraus der Werth:

$$\frac{d\Delta y}{dy} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(64)^x \Delta y^2 - 1},$$

welcher unendlich wird, wenn man:

$$(64)^x \Delta y^2 - 1 = 0$$

setzt. Eliminirt man Δy zwischen dieser Gleichung und der gegebenen, so erhält man:

$$y^2 = \frac{64}{81} \cdot \frac{1}{64^x},$$

und dieser letzten Gleichung wird genügt, wenn man:

$$y = \pm\frac{8}{9}\left(\frac{1}{8}\right)^x, \text{ oder } y = \pm\frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^x$$

setzt; aber das erste Werthepaar genügt der gegebenen Gleichung nicht, während die beiden letzten Werthe von y, welche dieser Gleichung genügen, zwei singuläre Integrale der Gleichung (15) geben.

Die Gleichung (16), welche die Werthe der willkürlichen Constanten a für jedes System der anfänglichen Werthe von x und y bestimmt, hat im Allgemeinen drei ungleiche Wurzeln; aber sie bekommt zwei gleiche Wurzeln, wenn die x und y beigelegten Werthe dem singulären Integrale Genüge leisten.

Der Werth $y = 0$ erfüllt die gegebene Gleichung, ist aber kein singuläres Integral derselben, weil man denselben erhält, wenn man in der Gleichung (16), $a = 0$ setzt.

§. 617. Eine Gleichung, worin ein constanter Parameter nur auf der ersten Potenz vorkommt; aber worin die Veränderliche y zum Quadrate oder zu höhern Potenzen erhoben ist, führt durch die Elimination dieses Parameters in Beziehung auf Δy zu einer Differenzengleichung von einem höhern Grade. Wir wollen z. B. die Gleichung:

$$ay^2 - x = 0 \qquad (17)$$

nehmen, so ergibt sich daraus durch Elimination von a die Differenzengleichung:

$$\Delta y^2 + 2y\Delta y - \frac{y^2}{x} = 0, \qquad (18)$$

oder in Beziehung auf Δy aufgelöst:

$$\Delta y = y\left(-1 \pm \sqrt{\frac{x+1}{x}}\right).$$

Offenbar gibt die arithmetische Construction dieser Differenzengleichung für dasselbe System anfänglicher Werthe unendlich viele verschiedene Reihen, und dennoch kann man, indem man die Constante a in der Gleichung (17) variiren läßt, auf indirecte Weise keine andern Integrale aus der Gleichung (18) ableiten. Aber wenn man dieselbe Gleichung (17) in Beziehung auf y auflöst, so nimmt sie nicht blos die Werthe:

$$y = \sqrt{\frac{x}{a}}, \quad y = -\sqrt{\frac{x}{a}}$$

an, welche ſich allein daraus ableiten laſſen, wenn man y blos als eine ſtetige Function von x betrachtet, ſondern auch unendlich viele andere in der allgemeinen Formel:

$$y = \sqrt{\frac{x}{a}} \cdot (-1)^X$$

enthaltene Werthe, wo X eine Function von x iſt, welche blos der Bedingung zu genügen hat, daß ſie für alle ganzen Werthe von x ebenfalls ganze Werthe gibt. Die unbeſtimmte Vielheit der in dieſer Formel enthaltenen Functionen entſpricht der unbeſtimmten Vielheit von Reihen, welche man vermittelſt der Differenzengleichung arithmetiſch conſtruiren kann.

§. 618. Wir haben bisher der Einfachheit wegen $\Delta x = 1$ angenommen, und wir wollen nun den immer conſtanten Zahlenwerth dieſer Differenz unbeſtimmt laſſen. Die als Beiſpiel betrachtete Gleichung:

$$y = ax + a^2 \qquad (1)$$

führt durch Elimination der Conſtanten a auf die Differenzengleichung:

$$\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + x\frac{\Delta y}{\Delta x} - y = 0. \qquad (19)$$

Statt der zweiten der Gleichungen (4) hat man die Gleichung:

$$\Delta a + 2a + x + \Delta x = 0,$$

und das Integral derſelben iſt:

$$a = b\left(-1\right)^{\frac{x}{\Delta x}} - \frac{x}{2} - \frac{\Delta x}{4},$$

woraus ſich folgendes andere vollſtändige Integral der Gleichung (1) ergibt:

$$y = \left[b\,(-1)^{\frac{x}{\Delta x}} - \frac{\Delta x}{4}\right]^2 - \frac{x^2}{4}. \qquad (20)$$

Wenn man nun annimmt, daß Δx und folglich Δy unendlich kleine Größen werden, ſo geht die Gleichung (19) in die Differenzialgleichung:

$$\frac{dy^2}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0 \qquad (21)$$

über, und das Integral (1), worin die Differenz Δx nicht vorkommt, iſt wieder das vollſtändige Integral dieſer Differenzialgleichung wegen der darin vorkommenden willkürlichen Conſtanten. Aber da das Integral (20) eine Function:

$$b\,(-1)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

von der im §. 2 angegebenen Art enthält, welche discontinuirlich bleibt, ſelbſt wenn ſich der Exponent ſtetig ändert, ſo kann man nicht bewirken, daß der aus der Gleichung (20) gezogene Werth von y eine ſtetige Function wird, und folglich hat dieſes Integral in Beziehung auf die Gleichung (21) keinen Sinn, wofern man nicht die discontinuirliche Function dadurch fortſchafft, daß man die willkürliche Conſtante $b = 0$ ſetzt. In dieſem Falle verſchwindet

das Glied $\frac{\Delta x}{4}$ ebenfalls an der Grenze, und die Gleichung (20) gibt den Werth:

$$y = -\frac{x^2}{4},$$

welcher der Gleichung (21) genügt und ein singuläres Integral derselben ist, weil man es nicht aus der Gleichung (1) durch eine schickliche Bestimmung der willkürlichen Constanten a ableiten kann.

Dasselbe erhellet vielleicht noch deutlicher, wenn man:

$$b \cos. \frac{\pi x}{\Delta x} \text{ für } b(-1)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

setzt, was erlaubt ist, so lange x eine discontinuirliche Veränderliche bezeichnet, welche nach constanten Incrementen Δx wächst. Den Werth dieses letzten Ausdruckes angeben, wenn Δx verschwindet, hieße die Grenze angeben, gegen welche derselbe convergirt, wenn Δx gegen Null convergirt. Diese Grenze ist aber nach der Natur der Function unbestimmt, und läßt sich nicht angeben. Man weiß blos, daß der Factor $\cos. \frac{\pi x}{\Delta x}$ immer zwischen den Grenzen $+1$ und -1 liegt, und daß folglich die unbestimmte Größe $b \cos. \frac{\pi x}{\Delta x}$ jedesmal verschwindet, wenn man die Constante $b = 0$ setzt.

§. 619. Diese analytischen Facta stimmen vollkommen mit dem überein, was wir über die Natur der continuirlichen und discontinuirlichen Functionen, und von dem Uebergange von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen durch die Betrachtung der Grenzen wissen, ohne daß man daraus, wie Lagrange gethan hat *), den allgemeinen Schluß ziehen darf: „daß man bei dem Uebergange von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen alle die Glieder ganz hinweglassen muß, welche das unendlich Kleine enthalten können, obgleich diese Glieder selbst nicht unendlich klein sein könnten, und daß der Uebergang von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen, wenn er auch als ein mechanisches Rechnungshülfsmittel zulässig ist, nicht dazu dienen kann, die Natur der Differenzialgleichungen kennen zu lehren;" sondern wir dürfen aus dem Vorhergehenden blos schließen, daß von den unendlich vielen vollständigen Integralen gewisser Differenzengleichungen alle, mit Ausnahme einer einzigen, Functionen von Δx enthalten, welche für $\Delta x = 0$ discontinuirlich werden. Denn wenn dieses nicht der Fall wäre, so könnte man daraus, indem man zu der Grenze überginge, mehrere vollständige Integrale einer entsprechenden Differenzialgleichung ableiten, was ungereimt ist. Wenn diese Differenzialgleichung eine singuläre Auflösung gestattet, so kann diese bald aus einem singulären Integrale der Differenzengleichung und bald aus einem ihrer vollständigen Integrale abgeleitet werden, wenn man die darin vorkommende willkürliche Constante gleich Null setzt, um die Function von Δx fortzuschaffen, deren Vorhandensein den Uebergang von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen verhindert.

Die als Beispiel gewählte Gleichung:

*) Leçons sur le calcul des fonctions, p. 303 et 304 de l'édit. de 1806.

$$y = \frac{a}{4^x} - \frac{3}{16}a^3 \qquad (16)$$

führt durch Elimination von a, wenn Δx einen beliebigen constanten Werth hat, auf die Differenzengleichung:

$$y + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{1 - \frac{1}{4^{\Delta x}}} - \frac{3}{16} \cdot 64^x \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x^3} \cdot \left(\frac{\Delta x}{1 - \frac{1}{4^{\Delta x}}}\right)^3 = 0, \qquad (22)$$

welche an der Grenze:

$$y + \frac{1}{\log. 4} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{3}{16} \cdot \frac{64^x}{(\log. 4)^3} \cdot \frac{dy^3}{dx^3} = 0 \qquad (23)$$

gibt, und man kann in der That darthun, daß die Gleichung (16) das allgemeine Integral der Gleichung (23) ist. Nimmt man der Gleichung (16) in Beziehung auf (a) die Ableitung, so hat man zur Bestimmung des Werthes von a als Function von x, welcher den singulären Auflösungen der Gleichung (23) entspricht:

$$a^2 = \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{4^x},$$

woraus sich ergibt:

$$a = \pm\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^x}, \quad a = \pm\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^x,$$

und folglich:

$$y = \pm\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8^x}, \quad y = \pm\frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^x.$$

Aber das erste Werthepaar genügt der Gleichung (23) nicht, und das andere kann keine stetige Function ausdrücken. Die Gleichung (23) gestattet also keine singuläre Auflösung, obgleich die entsprechende Differenzengleichung (22) solche Auflösungen zuläßt.

Viertes Kapitel.

Von den endlichen Differenzengleichungen zwischen stetigen Veränderlichen. — Von den gemischten Differenzengleichungen und von den endlichen Differenzengleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

I. Von den endlichen Differenzengleichungen zwischen stetigen Veränderlichen.

§. 620. Wenn man eine Differenzengleichung als eine Bedingungsgleichung betrachtet, welcher eine stetige Function der unabhängigen Veränderlichen genügen muß, so kann die Function in ihrem ganzen Verlaufe nur dann bestimmt werden, wenn man die Form der Function in dem Intervalle Δx

zweier auf einander folgender Werthe der unabhängigen Veränderlichen willkürlich annimmt, oder durch Bedingungen bestimmt, welche von der gegebenen Gleichung unabhängig sind, wenn diese von der ersten Ordnung ist, oder wenn man die Form der Function innerhalb des Intervalles $\Delta x + \Delta x$, bestimmt, wenn die Differenzengleichung von der zweiten Ordnung ist, u. s. f.

Wenn z. B. die Differenzengleichung:

$$f(x, y, \Delta y) = 0 \qquad (1)$$

gegeben ist, wo der Einfachheit wegen angenommen wird, daß x nach constanten, der Einheit gleichen Incrementen wächst, so kann man die Curve, deren Ordinate y ist, für alle Werthe von x nur in so fern construiren, als man diese Curve zwischen zwei Abscissen $x_0, x_0 + 1$, wovon die eine willkürlich ist, nach Belieben construirt, und die Differenzengleichung bestimmt alsdann den Zug der Curve in ihrem ganzen übrigen Verlaufe, weil sich daraus die Werthe von y ergeben, welche den Abscissen:

$$\ldots; x-3, x-2, x-1, x+1, x+2, x+3, \ldots$$

entsprechen, indem x einen beliebigen zwischen x_0 und $x_0 + 1$ liegenden Werth der Abscisse bezeichnet. Das Integral der Gleichung (1) muß also, um denselben Grad von Allgemeinheit zu haben, als die Gleichung, woraus es abgeleitet ist, eine willkürliche Function einer besondern Art enthalten.

Wenn die Differenzengleichung von der zweiten Ordnung oder von der Form:

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y) = 0 \qquad (2)$$

ist, so muß man, um die Curve, deren Ordinate y ist, zu construiren, dieselbe zuerst nicht blos zwischen den Abscissen $x_0, x_0 + 1$, sondern auch zwischen den Abscissen $x_0 + 1, x_0 + 2$ willkürlich zeichnen, d. h. zwischen den Abscissen $x_0, x_0 + 1$ die beiden Curven zeichnen, deren Ordinaten y und Δy sind. Umgekehrt, das zweite Integral der Gleichung (2) muß, um die möglichst größte Allgemeinheit zu haben, zwei willkürliche Functionen enthalten, u. s. f.

§. 621. Wenn x eine nach constanten Incrementen sich ändernde unabhängige Veränderliche ist, so sind zur Einführung dieser willkürlichen Functionen keine anderen Rechnungsverfahren erforderlich, als die bei der Integration der Differenzengleichungen befolgten, wenn durch diese Operation das allgemeine Glied einer Reihe bestimmt werden sollte. In der That hindert nichts, die durch die Integration eingeführten willkürlichen Constanten als periodische Functionen, wie:

$$\varphi\left(\sin.\frac{2\pi x}{\Delta x}, \cos.\frac{2\pi x}{\Delta x}\right),$$

zu betrachten, welche jedesmal dieselben Werthe wieder annehmen, wenn x um Δx zunimmt und übrigens willkürlich sind, sodaß $\Delta\varphi$ vermöge dieser Voraussetzung für alle Werthe von x gleich Null ist, gerade so, wie wenn φ einen constanten Parameter bezeichnete. So lange die Veränderliche y nur die successiven Glieder einer Reihe ausdrückt, deren Index x ist, ist diese Unterscheidung von weiter keiner Wichtigkeit, weil die Function φ ebenso wohl, als eine eigentliche willkürliche Constante für die ganze Reihe der Werthe von y immer denselben Zahlenwerth behalten würde; aber wenn dagegen x und y stetige Veränderliche sind, so ändert sich die Function φ mit x, und es kommt alsdann blos noch darauf an, sie so zu bestimmen, daß die Curve, deren Ordinate y ist, mit einer zwischen den Abscissen $x_0, x + \Delta x$ willkürlich beschriebenen Curve zusammenfällt.

Es ſei $F(x, y, a) = 0$ das Integral einer Differenzengleichung der erſten Ordnung mit der willkürlichen Conſtanten a, ſo verwandelt ſich daſſelbe in:

$$F(x, y, \varphi) = 0, \qquad (3)$$

wenn man für die willkürliche Conſtante a die willkürliche Function φ ſetzt. Wir nehmen an, daß das Integral $F = 0$ keine Function wie $(-1)^x$ enthält, welche mit der vorausgeſetzten Stetigkeit der Veränderlichen x, y unverträglich iſt.

Es bezeichne fx die Ordinate der willkürlich zwiſchen den Abſciſſen x_0, $x_0 + \Delta x$ beſchriebenen Curve, ſo hat man für die zwiſchen dieſen Grenzen liegende Werthe von x:

$$F(x, fx, \varphi) = 0, \quad \text{folglich} \quad \varphi = \Phi x,$$

wo Φ eine beſtimmte und bekannte Function bezeichnet. Man braucht alſo die zwiſchen den Grenzen x_0, $x_0 + \Delta x$ gegebene Function Φx nur in eine convergirende trigonometriſche Reihe zu entwickeln, und dieſe Reihe für φ in das Integral (3) zu ſubſtituiren (Buch 5, Kap. 12).

Wenn man das zweite Integral einer Differenzengleichung der zweiten Ordnung mit zwei willkürlichen Conſtanten a, b hätte, ſo könnte man daraus zwei Gleichungen von der Form:

$$F(x, y, \Delta y, a) = 0, \quad F_1(x, y, \Delta y, b) = 0$$

ableiten, oder wenn man für a, b zwei willkürliche periodiſche Functionen φ, φ_1 ſetzt:

$$F(x, y, \Delta y, \varphi) = 0, \quad F_1(x, y, \Delta y, \varphi_1) = 0.$$

Zwiſchen den Grenzen x_0, $x_0 + \Delta x$ ſei $y = fx$, $\Delta y = f_1 x$, ſo kommt:

$$F(x, fx, f_1 x, \varphi) = 0, \quad F_1(x, fx, f_1 x, \varphi_1) = 0,$$

folglich:

$$\varphi = \Phi x, \quad \varphi_1 = \Phi_1 x,$$

und es kommt blos noch darauf an, die gegebenen Functionen Φx, $\Phi_1 x$ in trigonometriſche Reihen zu entwickeln, um dieſelben alsdann ſtatt a, b in das zweite Integral zu ſubſtituiren. Dieſelbe Rechnung iſt auf Integrale von einer beliebigen Ordnung anwendbar; aber es iſt eine Modification derſelben erforderlich, wenn die Veränderliche x ſich nicht mehr nach conſtanten Differenzen ändert.

§. 622. Wir wollen z. B. die ſchon weiter oben (§. 611) betrachtete Differenzengleichung:

$$y_{2x} = y_x^2 - 2$$

nehmen, deren Integration, wenn x und y als ſtetige Veränderliche betrachtet werden, auf die Beſtimmung der Function ψ nach der Bedingung:

$$\psi(2x) = (\psi x)^2 - 2 \qquad (4)$$

hinausläuft.

Wir haben gefunden, daß man derſelben Genüge leiſtet, wenn man:

$$y = \psi x = c^{\frac{x}{x_0}} + c^{-\frac{x}{x_0}} \qquad (5)$$

ſetzt; allein hier verlieren die Conſtanten x_0, c die Bedeutung, welche ſie hatten, als x, y die correſpondirenden Glieder zweier verſchiedenen Reihen bezeichneten, und wenn die Gleichung (5) als eine Auflöſung der Gleichung (4) betrachtet wird; ſo kann man, ohne die Ausdehnung dieſer Auflöſung zu beſchränken, c für $c^{\frac{1}{x_0}}$, oder was daſſelbe iſt, $x_0 = 1$ ſetzen. Man hat alſo:

$$y = \psi x = c^x + c^{-x}. \qquad (6)$$

Nun wollen wir bemerken, daß ſich dieſe Gleichung aus der Elimination von i zwiſchen den beiden Gleichungen:

$$x = 2^i, \quad y = e^{2^i} + e^{-2^i}$$

ergibt, worin i eine Veränderliche bezeichnet, welche nach conſtanten und der Einheit gleichen Incrementen zunimmt. Man kann alſo für die Conſtante e eine periodiſche Function von i, wie $\varphi(\sin. 2\pi i, \cos. 2\pi i)$ ſetzen, welche ihren Werth nicht verändert, wenn i um die Einheit zunimmt, d. h. man kann ſtatt der Gleichung (6) ſetzen:

$$y = \psi x = \left[\varphi\left(\sin. \frac{2\pi \log. x}{\log. 2}, \cos. \frac{2\pi \log. x}{\log. 2}\right)\right]^x + \left[\varphi\left(\sin. \frac{2\pi \log. x}{\log. 2}, \cos. \frac{2\pi \log. x}{\log. 2}\right)\right]^{-x}, \qquad (7)$$

wo alle Formen der Function ψ, welche in der vorhergehenden Formel enthalten ſind, der Gleichung (4) genügen.

Es iſt leicht einzuſehen, daß man die Function ψ in der ganzen Ausdehnung ihres Verlaufes vermittelſt der Gleichung (4) conſtruiren könnte, wenn man die Curve, deren Ordinate durch dieſe Function ausgedrückt wird, zwiſchen den Abſciſſen x_0, $2x_0$ willkürlich beſchriebe, wo x_0 irgend eine von Null verſchiedene Abſciſſe bezeichnet. Es ſei fx dieſer zwiſchen den vorhergehenden Grenzen gegebene Werth von ψx, ſo hat man:

$$f(2^i) = \varphi 2^i_i + \frac{1}{\varphi 2^i}, \quad \text{folglich:} \quad \varphi = \Phi i. \qquad (\varphi)$$

Folglich iſt φ eine Function von i, welche immer dieſelben Werthe wieder annimmt, wenn i um die Einheit zunimmt, und zwiſchen den Grenzen:

$$i_0 = \frac{\log. x_0}{\log. 2}, \quad i_0 + 1 = \frac{\log. 2x_0}{\log. 2}$$

mit einer gegebenen Function von i zuſammenfällt. Man kann alſo φ in eine trigonometriſche Reihe von i entwickeln, für i ſeinen Werth als Function von x wieder ſetzen, und dieſen Werth von φ in die Gleichung (7) ſubſtituiren, ſo daß die Function ψx vermittelſt dieſes Werthes den entſprechenden Ausdruck bekommt.

Die beiden Glieder des letzten Theiles der Gleichung (7) reduciren ſich für $x = 0$ auf die Einheit, weil die Größen von der Form sin. $(+\infty)$, cos. $(+\infty)$, obgleich ſie unbeſtimmt ſind, zwiſchen endlichen Grenzen liegen (§. 618). Außerdem ergibt ſich aus der Gleichung (4) direct $\psi(0) = 2$, was für eine beſondere Form die Function ψ auch haben mag, wofern ſie nur beſtändig poſitiv bleibt, ohne welche Bedingung die Formel (7), deren letzter Theil nothwendig poſitiv iſt, nicht ſtattfinden könnte.

Differenzirt man die Gleichung (4) in Beziehung auf x, ſo erhält man $\psi'(2x) = \psi x \cdot \psi' x$, folglich $\psi'(0) = 0$, was für eine beſondere Form die Function ψ auch haben mag.

Die Formel (7) kann ſich nicht auf negative Werthe von x erſtrecken, weil in der That die Function φx vermittelſt der Gleichung (φ) nur für poſitive Werthe von $x = 2^i$ conſtruirt werden kann, nachdem man die Form der Function fx zwiſchen den Abſciſſen x_0, $2x_0$, wo x_0 eine poſitive Abſciſſe bezeichnet, angenommen hat.

Wir wollen hier noch eine wesentliche Bemerkung hinzufügen, welche die Schriftſteller, die dieſen Theil der Analyſis behandelt haben, nicht in Betracht gezogen zu haben ſcheinen, nämlich, daß die Formel (7), ungeachtet ihrer Allgemeinheit, der Gleichung (4) nicht auf die möglichſt allgemeinſte Weiſe Genüge leiſtet, eben weil die Anwendung dieſer Formel vorausſetzt, daß die Function ψ beſtändig poſitiv bleibt, und daß folglich die zwiſchen den Grenzen $x_0, 2x_0$ gegebene Function fx, ſelbſt zwiſchen dieſen Grenzen, ſtets poſitiv iſt. Nun würde aber nichts hindern, die Function ψ vermöge der Gleichung (4) außerhalb dieſer Grenzen zu conſtruiren, ſelbſt wenn die Function fx zwiſchen den Grenzen $x_0, 2x_0$ beſtändig negativ wäre, oder vom Poſitiven zum Negativen überginge.

§. 623. Man hat die Beſtimmung der willkürlichen Functionen in den Integralen der partiellen Differenzialgleichungen auf die Integration der Differenzengleichungen zwiſchen ſtetigen Veränderlichen zurückgeführt, und obgleich es ſcheint, daß man dadurch auf keine wirklich nützlichen Anwendungen geführt wird; ſo wird es des Zuſammenhanges der Theorien wegen doch nicht unnütz ſein, Einiges hierüber zu ſagen, und ein einziges Beiſpiel iſt zu dieſem Zwecke hinreichend.

Es ſei die Gleichung:

$$z = \varphi(x + ay) + \psi(x - ay)$$

gegeben, welche von der Integration der partiellen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2 \frac{d^2z}{dy^2}$$

herrührt, und wo man die darin vorkommenden willkürlichen Functionen φ, ψ ſo beſtimmen will, daß

$$z = fx \quad \text{für} \quad y = mx, \quad \text{und} \quad z = fx \quad \text{für} \quad y = nx$$

iſt, was darauf hinausläuft, die Durchſchnittscurven der krummen Fläche, deren veränderliche Coordinaten x, y, z ſind, mit zwei durch die Axe der z gelegten Ebenen zu beſtimmen.

Es iſt:

$$fx = \varphi[x(1 + am)] + \psi[x(1 - am)]$$
$$fx = \varphi[x(1 + an)] + \psi[x(1 - an)],$$

und wenn man ſucceſſive:

$$x(1 - am) = v, \quad x(1 - an) = v$$

ſetzt, ſo verwandeln ſich dieſe Gleichungen in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{v}{1-am}\right) &= \varphi\left(\frac{1+am}{1-am} \cdot v\right) + \psi v \\ f\left(\frac{v}{1-an}\right) &= \varphi\left(\frac{1+an}{1-an} \cdot v\right) + \psi v \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Verbindet man dieſe Gleichungen durch Subtraction, ſo wird die Function ψ eliminirt, und man hat:

$$\varphi\left(\frac{1+am}{1-am} \cdot v\right) - \varphi\left(\frac{1+an}{1-an} \cdot v\right) = f\left(\frac{v}{1-am}\right) - f\left(\frac{v}{1-an}\right),$$

oder einfacher:

$$\varphi(hu) - \varphi u = Fu, \qquad (9)$$

wenn man

$$\frac{1+a_n}{1-a_n} \cdot v = u, \quad \frac{(1+a_m)(1-a_n)}{(1-a_m)(1+a_n)} = h$$

ſetzt, und wenn man durch F_u eine Function bezeichnet, deren Zuſammenſetzung gegeben iſt. Nun iſt aber einleuchtend, daß die Gleichung (9), wie die Gleichung (4) im vorhergehenden § ſich auf eine Differenzengleichung zurückführen, und auf eine ähnliche Weiſe behandeln läßt. Wenn man alſo u und φu als Functionen des Index i betrachtet, welcher nach conſtanten und der Einheit gleichen Differenzen zunimmt, ſo hat man:

$$u_{i+1} = hu_i, \quad \varphi_{i+1} - \varphi_i = Fu_i, \quad \text{folglich:} \quad u_i = u_0 h^i, \quad \varphi_i = \Sigma \cdot F(u_0 h^i).$$

Nachdem die durch das Zeichen Σ angedeutete Integration verrichtet iſt, ſetzt man für i ſeinen Werth als Function von u, ſo erhält man φu als Function von u ausgedrückt, wo dieſe Function ſtatt der willkürlichen Conſtanten eine willkürliche Function enthalten muß, welche ihren Werth nicht verändert, wenn u in hu verwandelt wird, oder eine Function von der Form:

$$\omega\left(\sin. \frac{2\pi \log. u}{\log. h}, \cos. \frac{2\pi \log. u}{\log. h}\right).$$

In φu ſetzt man für u ſeinen durch v ausgedrückten Werth, und irgend eine der Gleichungen (8) beſtimmt alsdann die Form der Function ψ.

Aber es iſt wohl zu bemerken, daß die Data der Aufgabe die Form der Function φu nur zwiſchen Abſciſſen, wie u_0, hu_0, kennen lehren und folglich nicht auf die Beſtimmung der in dem Integrale der Gleichung (9) vorkommenden willkürlichen Function ω führen, abgeſehen davon, daß dieſes Integral, obgleich es ein vollſtändiges iſt, nicht dieſelbe Ausdehnung haben kann, als die Gleichung (9), wie bereits im vorhergehenden § bei dem Integrale der Gleichung (4) bemerkt worden. Man muß alſo dieſes Verfahren zur Beſtimmung der in den Integralen der partiellen Differenzialgleichungen vorkommenden willkürlichen Functionen als eine bloße analytiſche Transformation betrachten, wodurch die Auflöſung der Aufgabe im Grunde nicht weiter gefördert wird, mit welchem Verfahren ſich die Geometer beſchäftigt haben, noch ehe die phyſikaliſchen Anwendungen dieſelbe Aufgabe aus einem andern Geſichtspunkte betrachten ließen.

§. 624. Von den Aufgaben der reinen Geometrie, deren Auflöſung ſich der Integration der Differenzengleichungen zwiſchen ſtetigen Veränderlichen anſchließen läßt, wollen wir die folgende, unter dem Namen des Problemes der reciproken Trajectorien bekannte hier anführen, welche darin beſteht: eine Curve MM' (Fig. 104) von ſolcher Beſchaffenheit zu beſchreiben, daß, wenn man die ihr in Beziehung auf die Axe der y ſymmetriſche Curve NN' conſtruirte, und dieſer eine zu der Axe der y parallele forträckende Bewegung ertheilte, letztere die erſte Curve immer unter einem conſtanten Winkel $\alpha = \text{sat.}$ durchſchneidet, wo as, at die Tangenten der beiden Curven in dem Punkte ſind, wo ſie die Axe der y durchſchneiden.

Es ſeien p, q zwei auf der Axe der x in gleichen Entfernungen vom Anfangspunkte genommene Punkte; wir wollen die Ordinaten pm, qnn' und die Trajectorie $\nu\nu'$ ziehen, welche durch den Punkt n' geht, ſo iſt der Winkel $\nu n'q = Nnq$, weil die Trajectorie NN', parallel zu der Axe der y forträckend, in die Lage $\nu\nu'$ gekommen iſt. Der Winkel Nnq iſt wegen der Symmetrie der Curven MM', NN' in Beziehung auf dieſelbe Axe dem Winkel Mmp gleich, und folglich iſt der Winkel $an'\nu = an'q + qn'\nu = an'q + Mmp$. Aber es iſt

auch nach der Vorausſetzung $an'\nu = \alpha$, und wenn man die Ordinate der Curve MM' mit fx, ſowie die Abſciſſen Oq, Op reſp. mit x und $-x$ bezeichnet, ſo hat man:

$$\text{tang. } an'q = \frac{1}{f'x}, \quad \text{tang. } Mmp = \frac{1}{f'(-x)},$$

und folglich muß die Function $f'x$ nach den Bedingungen der Aufgabe der Relation:

$$\text{arc. tang. } \frac{1}{f'x} + \text{arc. tang. } \frac{1}{f'(-x)} = \alpha \qquad (10)$$

genügen.

Wir wollen:

$$-\frac{1}{2}\alpha + \text{arc. tang. } \frac{1}{f'x} = fx \qquad (11)$$

ſetzen, ſo verwandelt ſich die Gleichung (10) in $fx + f(-x) = 0$ und drückt aus, daß die Function f, welche übrigens willkürlich angenommen werden kann, eine impaare Function iſt.

Aus der Gleichung (11) ergibt ſich:

$$f'x = \frac{1}{\text{tang. } (\frac{1}{2}\alpha + fx)} = \frac{1 - \text{tang. } \frac{1}{2}\alpha \cdot \text{tang. } fx}{\text{tang. } \frac{1}{2}\alpha + \text{tang. } fx}$$

aber wenn fx eine beliebige impaare Function bezeichnet, ſo bezeichnet tang. fx auch eine beliebige impaare Function; man kann alſo

$$f'x = \frac{1 - \text{tang. } \frac{1}{2}\alpha \cdot fx}{\text{tang. } \frac{1}{2}\alpha + fx}$$

und folglich:

$$fx = \int \frac{1 - \text{tang. } \frac{1}{2}\alpha \cdot fx}{\text{tang. } \frac{1}{2}\alpha + fx} dx$$

ſetzen, wo durch die Integration eine willkürliche Conſtante eingeführt wird.

Wenn man dieſe Auflöſung durch Differenzenintegrale erhalten wollte, ſo müßte man

$$\text{arc. tang. } \frac{1}{f'x} = y_i, \quad \text{arc. tang. } \frac{1}{f'(-x)} = y_{i+1}, \quad x_{i+1} = -x_i$$

ſetzen, folglich iſt:

$$x_i = a(-1)^i, \quad y_i = \tfrac{1}{2}\alpha + b(-1)^i,$$

und wenn man i eliminirt:

$$y_x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{b}{a}x = \frac{1}{2}\alpha + cx.$$

Die Buchſtaben a, b, c bezeichnen in dem Falle der discontinuirlichen Veränderlichen willkürliche Conſtanten, welche in dem entgegengeſetzten Falle Functionen von i werden, welche blos der Bedingung zu genügen haben, daß ſie ihren Werth nicht verändern, wenn i um eine Einheit zunimmt, oder wenn x ſich in $-x$ verwandelt. In der Gleichung:

$$\text{arc. tang. } \frac{1}{f'x} = \frac{1}{2}\alpha + cx \qquad (12)$$

drückt alſo c eine beliebige paare Function, und cx irgend eine impaare Function von x aus, vermöge welcher die durch die Gleichungen (11) und

(12) ausgedrückten Reſultate zuſammenfallen. Dieſer Schluß hat die erforderliche Strenge, weil man ſich vorſtellen kann, daß der Uebergang von der Discontinuität zu der Continuität nur nach der Elimination der discontinuirlichen Function $(-1)^i$ ſtattfindet; allein wir haben eben geſehen, daß es einfacher iſt, nicht darauf zurückzugehen.

II. Von den Gleichungen mit gemiſchten Differenzen.

§. 625. Unter Gleichungen mit gemiſchten Differenzen verſteht man diejenigen, worin zugleich die Differenzialcoefficienten und die endlichen Differenzen einer Function, ſowie auch die, worin die Differenzialcoefficienten einer Differenz oder die Differenzen eines Differenzialcoefficienten vorkommen. Gleichungen dieſer Art kommen nicht blos bei Gelegenheit geometriſcher Aufgaben, welche, wie die im vorhergehenden §, nur ein Gegenſtand der Wißbegierde ſind, ſondern auch in den analytiſchen Unterſuchungen vor, welche ſich an die vollſtändige Integration der partiellen Differenzialgleichungen, und an die Beſtimmung der willkürlichen Functionen nach gegebenen phyſiſchen Bedingungen anſchließen.

Wir wollen z. B. annehmen, daß eine Function fx der Gleichung:

$$f'x - f'(x+2l) - k^2[fx + f(x+2l)] = 0, \qquad (13)$$

worin l, k Conſtanten bezeichnen, Genüge leiſten muß, ſo nimmt dieſe Gleichung, wenn man $fx = y$, $2l = \Delta x$ ſetzt, folgende Form an:

$$\frac{d\Delta y}{dx} + k^2(\Delta y + 2y) = 0,$$

und iſt nach der eben gegebenen Definition eine Gleichung mit gemiſchten Differenzen.

Man genügt derſelben, wenn man

$$y = fx = A \cos.\lambda x + B \sin.\lambda x$$

ſetzt, wo A, B, λ Conſtanten bezeichnen; denn aus dieſer Annahme folgt:

$$fx + f(x+2l) = 2[A \cos.\lambda(x+l) + B \sin.\lambda(x+l)] \cos.\lambda l$$

$$fx - f(x+2l) = 2[A \sin.\lambda(x+l) - B \cos.\lambda(x+l)] \sin.\lambda l$$

$$f'x - f'(x+2l) = 2[A \cos.\lambda(x+l) + B \sin.\lambda(x+l)]\lambda \sin.\lambda l,$$

und folglich iſt vermöge der Gleichung (13):

$$2[A \cos.\lambda(x+l) + B \sin.\lambda(x+l)][\lambda \sin.\lambda l - k^2 \cos.\lambda l] = 0.$$

Wenn man alſo durch A_i, B_i unbeſtimmte Conſtanten, und durch λ_i eine der unendlich vielen Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$\lambda \sin.\lambda l - k^2 \cos.\lambda l = 0 \qquad (14)$$

bezeichnet, ſo kann man wegen der linearen Form der Gleichung (13)

$$fx = \Sigma \cdot A_i \cos.\lambda_i x + \Sigma \cdot B_i \sin.\lambda_i x$$

ſetzen, wo ſich die Summationszeichen auf alle Werthe des Index i erſtrecken.

Die vorhergehende Formel gibt:

$$\Sigma \cdot A_i \cos.\lambda_i x = \tfrac{1}{2}[fx + f(-x)] = fx \qquad (15)$$

$$\Sigma \cdot B_i \sin.\lambda_i x = \tfrac{1}{2}[fx - f(-x)] = Fx, \qquad (16)$$

und durch dieſe Gleichungen kann man die Coefficienten A_i, B_i beſtimmen, wenn die Function fx zwiſchen den Grenzen $-l$, $+l$, oder die Functionen fx, Fx, wovon die erſte nothwendig eine paare, und die zweite eine unpaare iſt, zwiſchen den Grenzen 0, l gegeben ſind.

Denn wenn man durch i' einen particulären, aber übrigens beliebigen Werth des Index i bezeichnet, so ergibt sich aus der Gleichung (15):

$$\int_0^l \cos.\lambda_{i'}\xi \cdot f\xi d\xi = \Sigma \cdot A_i \left(\frac{\sin.(\lambda_i-\lambda_{i'})l}{2(\lambda_i-\lambda_{i'})} \pm \frac{\sin.(\lambda_i+\lambda_{i'})l}{2(\lambda_i+\lambda_{i'})}\right)$$

$$= \Sigma \cdot A_i \left(\frac{\lambda_i \sin.\lambda_i l \cdot \cos.\lambda_{i'}l - \lambda_{i'}\sin.\lambda_{i'}l \cdot \cos.\lambda_i l}{\lambda_i^2-\lambda_{i'}^2}\right).$$

Vermöge der Gleichung (14) verschwindet der Coefficient von A_i für alle von i' verschiedenen Werthe von i. Wenn $i = i'$ ist, so erscheint dieser Coefficient unter der Form $\frac{0}{0}$ und hat den Werth:

$$\frac{2\lambda_i l + \sin.2\lambda_i l}{4\lambda_i},$$

woraus sich ergibt:

$$A_i = \frac{4\lambda_i \int_0^l \cos.\lambda_i\xi \cdot f\xi d\xi}{2\lambda_i l + \sin.2\lambda_i l}.$$

Die Gleichung (16) gibt:

$$\Sigma \cdot B_i \lambda_i \cos.\lambda_i x = F'x,$$

und folglich ist:

$$B_i = \frac{4\int_0^l \cos.\lambda_i\xi \cdot F'\xi d\xi}{2\lambda_i l + \sin.2\lambda_i l}.$$

Die Integrale aller linearen gemischten Differenzengleichungen lassen sich ausdrücken durch Summen von Exponentialgrößen, Sinussen oder Cosinussen, welche die unendlich vielen Wurzeln einer transcendenten Gleichung zu Parametern haben und mit constanten willkürlichen Coefficienten multiplicirt sind.

Wenn sich die lineare oder nicht lineare gemischte Differenzengleichung integriren läßt, zunächst in Beziehung auf die endlichen Differenzen, und dann in Beziehung auf die Differenziale, oder umgekehrt; so sagt man, daß sie eine *successive Differenzengleichung* sei, und man kann sich vorstellen, daß sie entweder unmittelbar aus einer Differenziation einer Differenz, oder aus einer Differenzenbildung nach einer Differenziation entstanden ist. Man kann also die Gleichung (10) als eine Gleichung mit successiven Differenzen betrachten; denn es ist zuerst die Function $f'x$ durch eine Operation bestimmt, welche mit der Integration einer Differenzengleichung gleichbedeutend ist, und dann wurde die Function fx durch eine eigentliche Integration aus der Function $f'x$ abgeleitet.

III. Ueber die endlichen Differenzengleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

§. 626. Wir können diesen Gegenstand nicht verlassen, ohne von der Anwendung der Rechnung mit endlichen Differenzen auf Functionen mit zwei unabhängigen Veränderlichen auch einige Worte zu sagen.

Es sei z eine Function der beiden Veränderlichen x, y, welche nach constanten Differenzen Δx, Δy wachsen, und es seien $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz resp. die partiellen Differenzen in Beziehung auf die Veränderlichen x, y und die Totaldifferenz; so hat man:

$$\Delta_x\Delta_y z = \Delta_y\Delta_x z, \quad z + \Delta z = z + \Delta_x z + \Delta_y(z + \Delta_x z),$$

woraus ſich das Reſultat:

$$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z + \Delta_x\Delta_y z$$

ergibt, welches man durch die ſymboliſche Gleichung:

$$\Delta z = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) - 1]z$$

ausdrücken kann. Ebenſo fände man:

$$\Delta^2 z = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) - 1]^2 z$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^n z = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) - 1]^n z,$$

und wenn u eine Function von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen $x, y, z \ldots$ bezeichnete, ſo hätte man auch:

$$\Delta^n u = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y)(1 + \Delta_z) \ldots - 1]^n u.$$

Da die Differenzen Δx, Δy als conſtant vorausgeſetzt ſind, ſo kann man ſie der Einheit gleich ſetzen (§. 583) und annehmen, daß die Veränderlichen x, y die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen, und in dieſem Falle bezeichnet die Function $z_{x,y}$ das allgemeine Glied einer Tafel mit doppeltem Eingange (§. 116), wo x und y die Indices oder Ordnungszahlen der beiden Eingänge der Tafel, oder der Horizontal- und Verticalreihe ſind, welchen das Fach mit dem Werthe $z_{x,y}$ zugleich angehört.

Von welcher Beſchaffenheit die conſtanten oder veränderlichen Werthe der Differenzen Δx, Δy auch ſein mögen, ſo laſſen ſich die verſchiedenen Werthe der Function z doch nur dann beſtimmen und in eine Tafel bringen, wenn man die Reihen von Werthen beſtimmt, welche die Veränderlichen x, y reſp. durchlaufen. Es ſeien i, i' die Indices dieſer beiden Reihen, ſo iſt x eine beſtimmte Function des Index i und y eine beſtimmte Function des Index i'. Man kann alſo z als eine Function der Indices i, i' betrachten, welche discontinuirliche Veränderliche ſind und namentlich die Eigenſchaft haben, nach conſtanten, der Einheit gleichen Differenzen zu wachſen. Bei allen den von der Form der Function $z_{x,y}$ unabhängigen Schlüſſen kann man alſo umgekehrt $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$ ſetzen, ohne ihre Allgemeinheit zu beeinträchtigen.

§. 627. Blos um die Natur der durch die Differenzengleichungen, worin mehrere unabhängige Veränderliche vorkommen, ausgedrückten Relationen anzudeuten, wollen wir die ſehr einfache Gleichung:

$$z_{x+1,y+1} = z_{x,y+1} + z_{x,y} \qquad (\alpha)$$

betrachten, und annehmen, daß die Function $z_{x,0} = f_0 x$ gegeben ſei; ſo ergibt ſich aus der gegebenen Gleichung:

$$z_{x+1,1} = z_{x,1} + z_{x,0}, \quad \text{oder} \quad \Delta_x z_{x,1} = f_0 x,$$

und folglich:

$$z_{x,1} = \Sigma f_0 x = f_1 x.$$

Ebenſo würde man $z_{x,2}, z_{x,3}, \ldots$ und endlich $z_{x,y}$ beſtimmen, indem y eine beliebigen poſitiven, und x einen poſitiven oder negativen Werth hat.

Die anfängliche Function $f_0 x$ bleibt willkürlich, und außerdem werden durch die ſucceſſiven Integrationen in die Functionen $f_1 x$, $f_2 x$, ꝛc. willkürliche Conſtanten eingeführt, deren ins Unendliche fortlaufende Reihe implicite beſtimmt wird, wenn die Function $z_{0,y}$ für alle poſitiven Werthe von y gegeben iſt. Aber wenn die Function $z_{0,y} = F_0 y$ für alle negativen und poſitiven

Werthe gegeben wird, so bleibt die Function $z_{x,0} = f_0 x$ nur für die negativen Werthe von x willkürlich und ist dagegen für alle positiven Werthe derselben Veränderlichen implicite bestimmt. Denn aus der Gleichung (α) folgt:

$$z_{1,y} = F_0 y + F_0(y-1), \quad z_{2,y} = F_0 y + 2F_0(y-1) + F_0(y-2),$$

und ebenso würde man $z_{3,y}$, $z_{4,y}$, ... $z_{x,y}$ bestimmen, wenn x einen beliebigen positiven und y einen positiven oder negativen Werth hat.

Man kann die Ausdehnung des Ausdruckes von $z_{x,y}$, welcher sich auf alle Werthe von y und auf die positiven Werthe von x erstreckt, als mit der des Ausdruckes derselben Function, welcher sich auf alle Werthe von x und auf die positiven Werthe von y erstreckt, vergleichbar betrachten; jedoch enthält der erste nothwendig nur eine willkürliche Function $F_0 y$, welche zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ gegeben sein muß, während der zweite zwei willkürliche Functionen enthält, nämlich $f_0 x$, welche zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ gegeben sein muß, und $F_0 y$, welche blos zwischen den Grenzen $0, +\infty$ gegeben zu sein braucht. Dieses analytische Factum rührt daher, daß die Veränderlichen x, y in der Gleichung (α) nicht symmetrisch vorkommen, und es hat mit der Reduction der willkürlichen Functionen in den Integralen der gewöhnlichen partiellen Differenzialgleichungen, worin die höchsten Ableitungen der Function nicht in Beziehung auf jede der unabhängigen Veränderlichen von derselben Ordnung sind, Aehnlichkeit; aber es bietet den merkwürdigen Umstand dar, welcher bis jetzt noch nicht bemerkt zu sein scheint, daß sich die Anzahl der unabhängigen willkürlichen Functionen mit dem Zeichen der Zahlenwerthe der unabhängigen Veränderlichen ändert.

Für die negativen Werthe von y läßt sich die Tafel der Größen $z_{x,y}$ construiren, ohne daß man weiter etwas zu kennen braucht, als die Function $f_0 x$ zwischen den Grenzen $\pm\infty$; denn die Gleichung (α) gibt:

$$z_{x,-1} = f_0(x+1) - f_0 x, \quad z_{x,-2} = f_0(x+2) - 2f_0(x+1) + f_0 x, \text{ ꝛc.},$$

Dagegen muß zur Construction der Tafel für die negativen Werthe von x die Function $F_0 y$ zwischen den Grenzen $\pm\infty$ und außerdem die Function $f_0 x$ zwischen den Grenzen $0, -\infty$ gegeben sein; denn aus der gegebenen Gleichung ergibt sich die Differenzengleichung:

$$z_{-1,y+1} + z_{-1,y} = F_0(y+1),$$

woraus man $z_{-1,y}$ nur durch eine Integration in Beziehung auf y, wodurch eine willkürliche Constante eingeführt wird, erhalten kann. Durch den Uebergang von $z_{-1,y}$ zu $z_{-2,y}$ würde eine neue willkürliche Constante eingeführt, u. s. f.

Gesetzt, man wollte die Tafel der Werthe der Function $z_{x,y}$ blos für die positiven Werthe von x, y construiren, und man hätte für alle positiven Werthe von x, $z_{x,0} = f_0 x = 1$. Ferner wollen wir annehmen, es wäre für alle positiven Werth des Index y, $z_{0,0} = 1$ und $z_{0,y} = F_0 y = 0$; so ergibt sich nach diesen Voraussetzungen:

$$z_{x,1} = \Sigma \cdot 1 = x$$

$$z_{x,2} = \Sigma \cdot x = \frac{x(x-1)}{1.2}$$

$$z_{x,3} = \Sigma \cdot \frac{x(x-1)}{1.2} = \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{x,y} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-y+1)}{1.2.3\ldots y},$$

d. h. die durch die Gleichung (α) bestimmte Function $z_{x,y}$ ist vermöge der Voraussetzungen über die anfänglichen Functionen der Coefficient $a^{x-y}b^y$ in der Entwickelung der Potenz $(a+b)^x$.

Wenn x, y stetige Veränderliche bezeichneten, so könnte die krumme Fläche, deren verticale Ordinate $z_{x,y}$ ist, für alle positiven Werthe von x construirt werden, wenn der Werth der Function für alle Werthe von y, und für die zwischen 0 und + 1 liegenden Werthe von x gegeben wäre, oder der zwischen der Ebene der yz und einer in der Entfernung $x=1$ zu derselben gelegten parallelen Ebene liegende Streifen der krummen Fläche. Denn es sei $F(x,y)$ die zwischen diesen Grenzen gegebene Function, so hat man:

$$z_{x+1,y} = F(x,y) + F(x,y-1)$$
$$z_{x+2,y} = F(x,y) + 2F(x,y-1) + F(x,y-2),$$
u. s. f.

§. 628. Betrachten wir noch die Gleichung:

$$z_{x+1,y} + z_{x-1,y} = z_{x,y+1} + z_{x,y-1}, \qquad (\beta)$$

welcher man die Form:

$$\Delta_x^2 z_{x-1,y} = \Delta_y^2 z_{x,y-1} \qquad (B)$$

geben kann, und welche der Gleichung der schwingenden Saiten:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2} \qquad (b)$$

analog ist; so findet hier das Merkwürdige statt, daß das allgemeine Integral der partiellen Differenzialgleichung (b), nämlich:

$$z = \varphi(x+y) + \psi(x-y), \qquad (z)$$

wo φ, ψ willkürliche Functionen bezeichnen, auch den endlichen Differenzengleichungen (β) und (B) Genüge leistet, wie sich leicht darthun läßt.

Die Tafel der Werthe der Function $z_{x,y}$ läßt sich vermöge der Gleichung (β) für alle Werthe der Veränderlichen x, y construiren, wenn für alle Werthe von x die beiden Functionen $z_{x,0} = f_0 x$, $z_{x,1} = f_1 x$ willkürlich gegeben sind; denn alsdann hat man:

$$z_{x,2} = f_1(x+1) + f_1(x-1) - f_0 x$$
$$z_{x,3} = f_1(x+2) + f_1 x + f_1(x-2) - f_0(x+1) - f_0(x-1), \text{ ꝛc.}$$
$$z_{x,-1} = f_0(x+1) + f_0(x-1) - f_1 x$$
$$z_{x,-2} = f_0(x+2) + f_0 x + f_0(x-2) - f_1(x+1) - f_1(x-1), \text{ ꝛc.}$$

Vermittelst derselben Data könnte man die Functionen φ und ψ in dem Integrale (z) bestimmen, denn man hätte:

$$\varphi x + \psi x = f_0 x, \quad \varphi x + \psi(x-2) = f_1(x-1),$$

woraus folgt:

$$\psi x - \psi(x-2) = f_0 x - f_1(x-1),$$

eine endliche Differenzengleichung zwischen zwei Veränderlichen, welche die Function ψ, und folglich die Function φ gibt.

Wenn zwischen den Functionen f_0, f_1 die Relation:

$$f_1 x = \tfrac{1}{2} f_0(x+1) + \tfrac{1}{2} f_0(x-1)$$

stattfindet, so ergibt sich $\varphi = \psi$, und das Integral nimmt alsdann die Form an:

$$z_{x,y} = \tfrac{1}{2} f_0(x+y) + \tfrac{1}{2} f_0(x-y).$$

Wir wollen annehmen, daß die Function $z_{x,y}$ nur zwiſchen den Grenzen $x=0$, $x=1$ gegeben ſei; aber daß die Functionen $z_{0,y}$, $z_{1,y}$ für alle Werthe von y verſchwinden, ſo hat man vermöge dieſer Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} f_0 y &= -f_0(-y) \\ f_0(1+y) &= -f_0(1-y) \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} f_0 x &= -f_0(-x) \\ f_0(1+x) &= f_0(x-1). \end{aligned}\right.$$

Die erſte dieſer Gleichungen zeigt, daß die in ihrer ganzen Ausdehnung genommene Function f_0 eine impaare iſt und die zweite zeigt, daß dieſe Function periodiſch iſt, ſo daß ſie nur zwiſchen den Grenzen 0, 1 einer Periode gegeben zu ſein braucht, damit ſie in der ganzen Ausdehnung ihres Verlaufes als gegeben betrachtet werden kann.

Wenn x, y continuirliche Veränderliche bezeichnen, ſo iſt die Gleichung (z) nur noch ein particuläres Integral der Gleichung (β), welcher man allgemeiner durch die Formel:

$$z_{x,y} = \varphi[x+y, \omega(x,y)] + \psi[x-y, \omega_1(x,y)] \qquad (Z)$$

genügt, wo ω, ω_1 willkürliche Functionen von x, y ſind, welche aber ihren Werth nicht ändern dürfen, wenn dieſe Veränderlichen um eine Einheit zunehmen.

Statt $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$ zu ſetzen, kann man $\Delta x = h$, $\Delta y = h$ ſetzen, wo h eine beliebige Conſtante bezeichnet, und das allgemeine Integral der Gleichung:

$$z_{x+h,y} + z_{x-h,y} = z_{x,y+h} + z_{x,x-h}, \qquad (\beta_1)$$

welche man wegen $\Delta x = \Delta y = h$ auf die Form:

$$\frac{\Delta_x^2 z_{x-h,y}}{\Delta x^2} = \frac{\Delta_y^2 z_{x,y-h}}{\Delta y^2} \qquad (B_1)$$

bringen kann, wird wieder durch die Gleichung (z) oder durch (Z) ausgedrückt, je nachdem man die Veränderlichen x, y als discontinuirlich, oder als continuirlich betrachtet. In dieſem Falle dürfen die Functionen ω, ω_1 den Werth nicht ändern, wenn x oder y um h zunimmt, oder ω und ω_1 ſind Functionen der Größen:

$$\sin.\frac{2\pi x}{h},\ \cos.\frac{2\pi x}{h},\ \sin.\frac{2\pi y}{h},\ \cos.\frac{2\pi y}{h}. \qquad (H)$$

Wenn man die Conſtante h gegen Null convergiren läßt, ſo verwandelt ſich die Gleichung (B_1) an der Grenze in die Gleichung (b), und da die Functionen (H) für $h=0$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erfahren, ſo drückt die von dieſen discontinuirlichen Functionen befreite Gleichung (z), welche überdies von (h) unabhängig iſt, in der Vorausſetzung der Stetigkeit der Veränderlichen und für $h=0$ das allgemeinſte Integral der Gleichung (B_1) aus, d. h. ſie gibt das allgemeinſte Integral der Gleichung (b), wie dieſes unmittelbar aus der Theorie der partiellen Differenzialgleichungen folgt.

Inhalt.

Erſtes Buch.

Principien.

Seite

1. Kap. Von den Functionen im Allgemeinen und der Theorie der Functionen ins Beſondere 3

2. Kap. Ueber die Klaſſifikation der Functionen und ihre Entwickelung in Reihen 13

3. Kap. Theorie der abgeleiteten Functionen und der Unterbrechungen der Stetigkeit der verſchiedenen Ordnungen. — Grundbegriffe über die Theorie der Fluxionen 27

4. Kap. Von den Differenzen und den Annäherungen der verſchiedenen Ordnungen. — Theorie der unendlich kleinen Größen und Principien der Infinitesimalrechnung 42

Zweites Buch.

Differenzirung der entwickelten Functionen mit einer einzigen veränderlichen Größe.

1. Kap. Differenzirung der algebraiſchen und transcendenten Functionen . . 59

2. Kap. Vergleichung der logarithmiſchen, Exponential- und Kreistranscendenten. — Moivre'ſche Formel und Grundbegriffe über die Theorie der Winkelſchnitte 74

3. Kap. Beſtimmung des Werthes der entwickelten Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe, wenn ſie für einen beſonderen Werth dieſer letztern unter einer unbeſtimmten Form erſcheinen. — Beſtimmung der Maxima und Minima ſolcher Functionen 93

4. Kap. Taylor'ſche und Maclaurin'ſche Formel 104

Drittes Buch.

Differenzirung der entwickelten und unentwickelten Functionen mit mehreren Veränderlichen.

1. Kap. Von den entwickelten Functionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen und von ihrer Differenzirung. — Grundbegriffe über die Stetigkeitsunterbrechungen der Functionen von zwei und drei Veränderlichen 126

Seite

2. Kap. Differenzirung der unentwickelten Functionen von einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen. — Vertauschung der Veränderlichen . 144

3. Kap. Bestimmung des Werthes der entwickelten und unentwickelten Functionen von mehreren veränderlichen Größen, wenn diese Functionen unter unbestimmten Formen erscheinen. — Theorie der Maxima und Minima dieser Functionen 155

4. Kap. Ausdehnung der Taylor'schen und Maclaurin'schen Formel auf entwickelte Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. — Lagrange's Formel zur Entwickelung der unentwickelten Functionen 172

Viertes Buch.

Anwendungen der Differenzialrechnung auf die Theorie der krummen Linien und Flächen.

1. Kap. Von den Tangenten, den Normalen und den Asymptoten ebener Curven. Anwendung der Polarcoordinaten 193

2. Kap. Theorie der ebenen Umhüllungslinien 205

3. Kap. Theorie der Evoluten und der Krümmungshalbmesser ebener Curven. — Brennlinien. — Theorie der Berührungen der verschiedenen Ordnungen zwischen ebenen Curven 212

4. Kap. Von den singulären Punkten ebener Curven und der gegenseitigen Beziehung zwischen der Geometrie und Algebra 228

5. Kap. Grundbegriffe der Theorie der Curven von doppelter Krümmung . 238

6. Kap. Ueber die Berührungsebenen der krummen Flächen 253

7. Kap. Analytische Merkmale der Hauptfamilien der krummen Flächen . . 257

8. Kap. Von den Umhüllungsflächen 270

9. Kap. Von den Evoluten im Allgemeinen 283

10. Kap. Von der Krümmung der Flächen 286

Fünftes Buch.

Von den Integralen.

1. Kap. Integration der algebraischen Functionen 303

2. Kap. Integration transcendenter Functionen 319

3. Kap. Integration durch Reihen. — Ueber die merkwürdigen Fälle, welche sich bei dem Uebergange von den unbestimmten zu den bestimmten Integralen darbieten 326

4. Kap. Principien der Theorie der elliptischen Functionen 334

5. Kap. Geometrische Anwendungen der Berechnung der einfachen bestimmten Integrale 346

6. Kap. Vielfache bestimmte Integrale. — Geometrische und physikalische Anwendungen derselben — 359

7. Kap. Theorie der Variation der Integrale. — Principien der Methode, welche insbesondere die Variationsrechnung genannt wird 376

8. Kap. Anwendungen der Berechnung der Variationen einfacher Integrale. — Ausdehnung der Methode der Variationen auf doppelte Integrale . 390

9. Kap. Von den Bedingungen der Integrabilität der Differenzialfunctionen von mehreren unabhängigen veränderlichen Größen, und von ihrer Integration 404

Seite

10. Kap. Von den zwischen speciellen Grenzen genommenen bestimmten Integralen. — Verschiedene Beispiele der Bestimmung bestimmter Integrale 412

11. Kap. Von den als Functionen veränderlicher Parameter betrachteten bestimmten Integralen. — Euler'sche Functionen 425

12. Kap. Entwickelung der Functionen in trigonometrische Reihen. — Theorem von Fourier 435

Sechstes Buch.

Integration der Differenzialgleichungen mit einer einzigen unabhängigen veränderlichen Größe.

1. Kap. Von der Integration der Differenzialgleichungen mit zwei Veränderlichen und von der ersten Ordnung 447

2. Kap. Ueber die Integration der Differenzialgleichungen der höhern Ordnungen, und insbesondere über die Integration der linearen Differenzialgleichungen 457

3. Kap. Ueber die Integration der Differenzialgleichungen durch Reihen und durch bestimmte Integrale 471

4. Kap. Theorie der singulären Integrale der Differenzialgleichungen mit zwei Veränderlichen 481

5. Kap. Geometrische Anwendungen der Theorie der Integration der Differenzialgleichungen mit zwei veränderlichen Größen 495

6. Kap. Ueber die Integration der gleichzeitigen Differenzialgleichungen . . 510

7. Kap. Ueber die Construction der Differenzialgleichungen mit einer einzigen unabhängigen veränderlichen Größe 520

Siebentes Buch.

Integration der Differenzialgleichungen mit mehreren unabhängigen veränderlichen Größen.

1. Kap. Ueber die Integration der Gleichungen mit totalen Differenzialen. — Geometrische Anwendungen 530

2. Kap. Ueber die Integration der partiellen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung unter endlicher Form 537

3. Kap. Ueber die Integration der partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnungen mit drei Veränderlichen unter endlicher Form. — Bemerkungen über die singulären und particulären Integrale der partiellen Differenzialgleichungen 549

4. Kap. Von der Integration der partiellen Differenzialgleichungen durch Reihen, und insbesondere der linearen Differenzialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen und mit constanten Coefficienten 558

5. Kap. Ueber die Integration der linearen partiellen Differenzialgleichungen durch bestimmte Integrale 575

6. Kap. Ueber die Construction der partiellen Differenzialgleichungen . . . 584

Achtes Buch.

Rechnung mit endlichen Differenzen.

1. Kap. Rechnung mit endlichen Differenzen und Integralen oder Summen endlicher Differenzen für die entwickelten Functionen mit einer einzigen veränderlichen Größe 591

2. Kap. Euler's Formel zur Bestimmung der Summen durch gewöhnliche Integrale und der Integrale durch die Summen. — Anwendung auf die Stirling'sche Formel. — Ueber die Interpolation . . 6

3. Kap. Theorie der Gleichungen mit endlichen Differenzen zwischen zwei discontinuirlichen Veränderlichen 61

4. Kap. Von den endlichen Differenzengleichungen zwischen stetigen Veränderlichen. — Von den gemischten Differenzengleichungen und von den endlichen Differenzengleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen 6

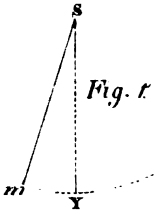


Fig. 1.

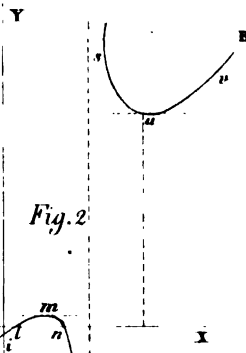


Fig. 2.

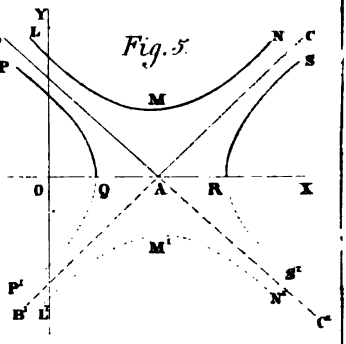


Fig. 5.

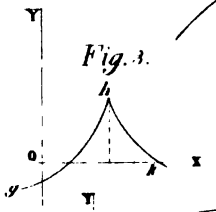


Fig. 3.

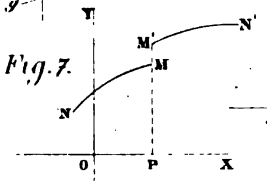


Fig. 7.

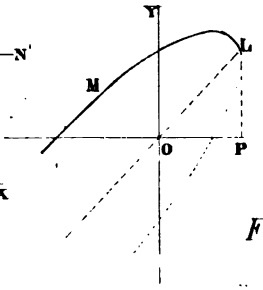


Fig. 4.

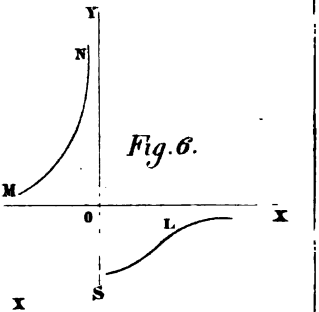


Fig. 6.

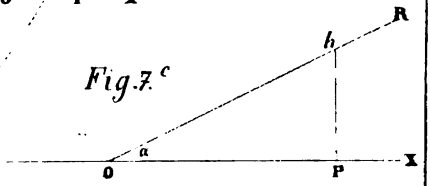
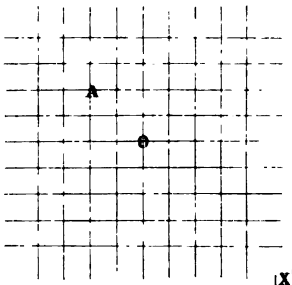


Fig. 7.c

Fig. 7.a



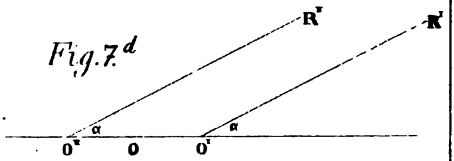


Fig. 7.d

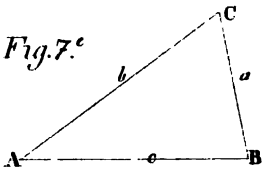


Fig. 7.e

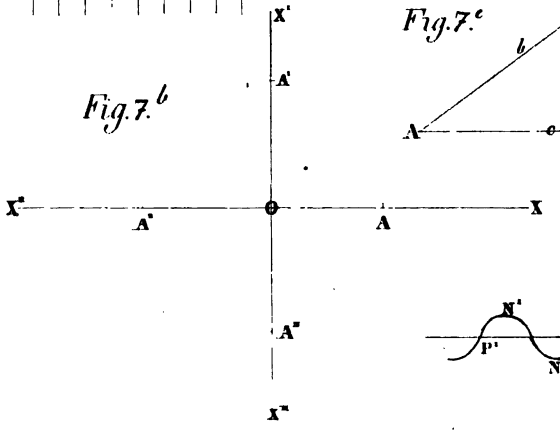


Fig. 7.b

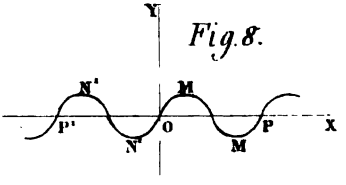


Fig. 8.

Fig. 9.

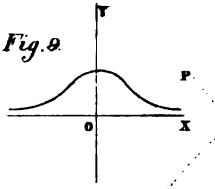


Fig. 10.

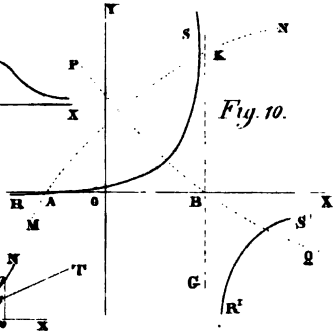


Fig. 11.

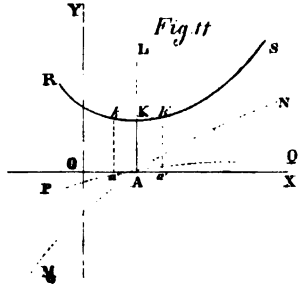


Fig. 12.

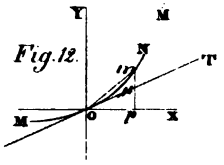


Fig. 13.

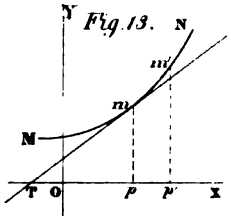


Fig. 14.

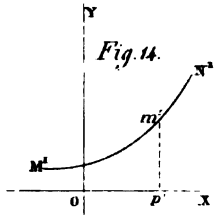


Fig. 15.

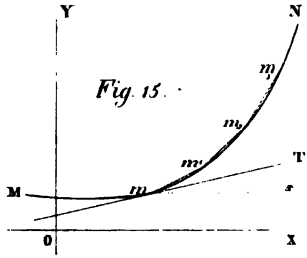


Fig. 16.

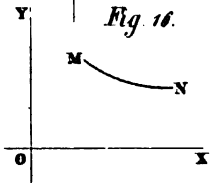


Fig. 17.

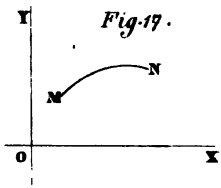


Fig. 18.

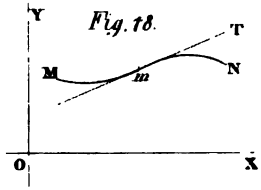


Fig. 19.

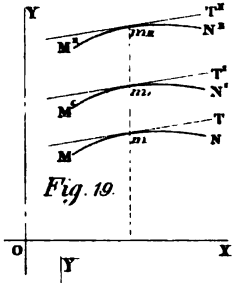


Fig. 20.

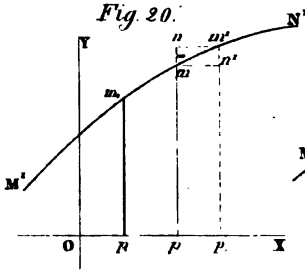


Fig. 22.

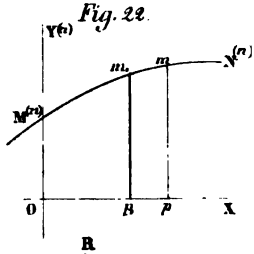


Fig. 21.

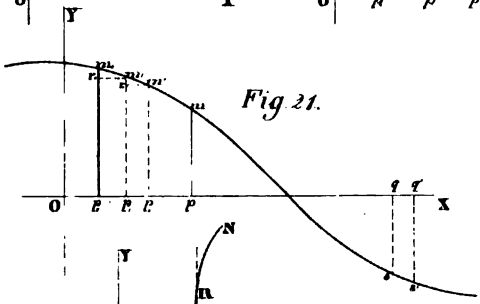


Fig. 24.

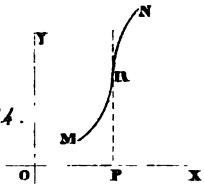
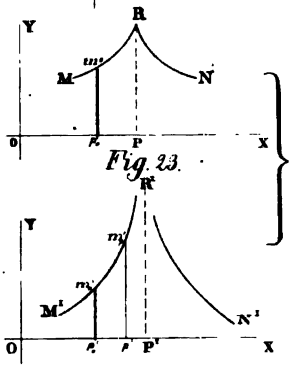


Fig. 23.



Wir wollen annehmen, daß die Function $z_{x,y}$ nur zwiſchen den Grenzen $x=0$, $x=1$ gegeben ſei; aber daß die Functionen $z_{0,y}$, $z_{1,y}$ für alle Werthe von y verſchwinden, ſo hat man vermöge dieſer Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} f_0 y &= -f_0(-y) \\ f_0(1+y) &= -f_0(1-y) \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} f_0 x &= -f_0(-x) \\ f_0(1+x) &= f_0(x-1). \end{aligned}\right.$$

Die erſte dieſer Gleichungen zeigt, daß die in ihrer ganzen Ausdehnung genommene Function f_0 eine impaare iſt und die zweite zeigt, daß dieſe Function periodiſch iſt, ſo daß ſie nur zwiſchen den Grenzen 0, 1 einer Periode gegeben zu ſein braucht, damit ſie in der ganzen Ausdehnung ihres Verlaufes als gegeben betrachtet werden kann.

Wenn x, y continuirliche Veränderliche bezeichnen, ſo iſt die Gleichung (z) nur noch ein particuläres Integral der Gleichung (β), welcher man allgemeiner durch die Formel:

$$z_{x,y} = \varphi[x+y, \omega(x,y)] + \psi[x-y, \omega_1(x,y)] \qquad (Z)$$

genügt, wo ω, ω_1 willkürliche Functionen von x, y ſind, welche aber ihren Werth nicht ändern dürfen, wenn dieſe Veränderlichen um eine Einheit zunehmen.

Statt $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$ zu ſetzen, kann man $\Delta x = h$, $\Delta y = h$ ſetzen, wo h eine beliebige Conſtante bezeichnet, und das allgemeine Integral der Gleichung:

$$z_{x+h,y} + z_{x-h,y} = z_{x,y+h} + z_{x,x-h}, \qquad (\beta_1)$$

welche man wegen $\Delta x = \Delta y = h$ auf die Form:

$$\frac{\Delta_x^2 z_{x-h,y}}{\Delta x^2} = \frac{\Delta_y^2 z_{x,y-h}}{\Delta y^2} \qquad (B_1)$$

bringen kann, wird wieder durch die Gleichung (z) oder durch (Z) ausgedrückt, je nachdem man die Veränderlichen x, y als discontinuirlich, oder als continuirlich betrachtet. In dieſem Falle dürfen die Functionen ω, ω_1 den Werth nicht ändern, wenn x oder y um h zunimmt, oder ω und ω_1 ſind Functionen der Größen:

$$\sin.\frac{2\pi x}{h},\ \cos.\frac{2\pi x}{h},\ \sin.\frac{2\pi y}{h},\ \cos.\frac{2\pi y}{h}. \qquad (H)$$

Wenn man die Conſtante h gegen Null convergiren läßt, ſo verwandelt ſich die Gleichung (B_1) an der Grenze in die Gleichung (b), und da die Functionen (H) für $h=0$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erfahren, ſo drückt die von dieſen discontinuirlichen Functionen befreite Gleichung (z), welche überdies von (h) unabhängig iſt, in der Vorausſetzung der Stetigkeit der Veränderlichen und für $h=0$ das allgemeinſte Integral der Gleichung (B_1) aus, d. h. ſie gibt das allgemeinſte Integral der Gleichung (b), wie dieſes unmittelbar aus der Theorie der partiellen Differenzialgleichungen folgt.

Inhalt.

Erſtes Buch.

Principien.

Seite

1. Kap. Von den Functionen im Allgemeinen und der Theorie der Functionen ins Beſondere 3

2. Kap. Ueber die Klaſſifikation der Functionen und ihre Entwickelung in Reihen 13

3. Kap. Theorie der abgeleiteten Functionen und der Unterbrechungen der Stetigkeit der verſchiedenen Ordnungen. — Grundbegriffe über die Theorie der Fluxionen 27

4. Kap. Von den Differenzen und den Annäherungen der verſchiedenen Ordnungen. — Theorie der unendlich kleinen Größen und Principien der Infinitesimalrechnung 42

Zweites Buch.

Differenzirung der entwickelten Functionen mit einer einzigen veränderlichen Größe.

1. Kap. Differenzirung der algebraiſchen und transcendenten Functionen . . 59

2. Kap. Vergleichung der logarithmiſchen, Exponential- und Kreistranscendenten. — Moivre'ſche Formel und Grundbegriffe über die Theorie der Winkelſchnitte 74

3. Kap. Beſtimmung des Werthes der entwickelten Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe, wenn ſie für einen beſonderen Werth dieſer letztern unter einer unbeſtimmten Form erſcheinen. — Beſtimmung der Maxima und Minima ſolcher Functionen 93

4. Kap. Taylor'ſche und Maclaurin'ſche Formel 104

Drittes Buch.

Differenzirung der entwickelten und unentwickelten Functionen mit mehreren Veränderlichen.

1. Kap. Von den entwickelten Functionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen und von ihrer Differenzirung. — Grundbegriffe über die Stetigkeitsunterbrechungen der Functionen von zwei und drei Veränderlichen 126

Fig.59.

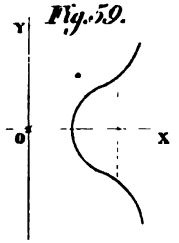


Fig.60.

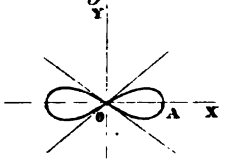


Fig.61.

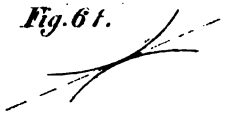


Fig.62.

Fig.63.

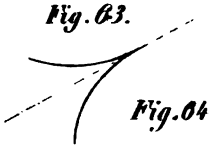


Fig.64.

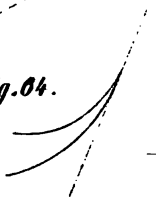


Fig.65.

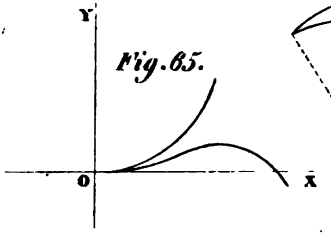


Fig.67.

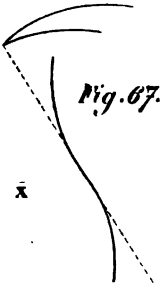


Fig.66.

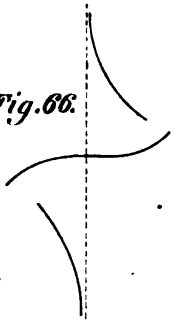


Fig.68.

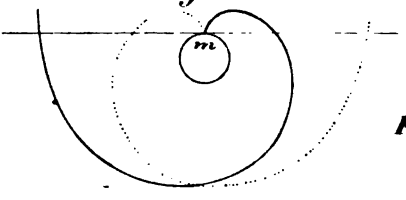


Fig.70.

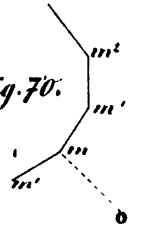


Fig.71.

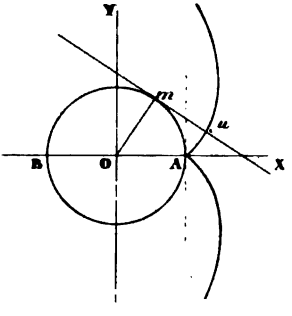


Fig.69.

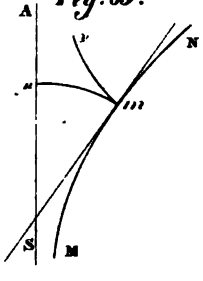


Fig.72.

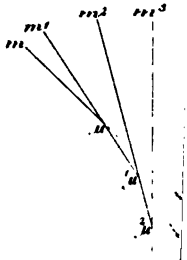


Fig.73.

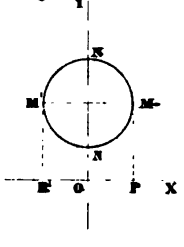


Fig.74.

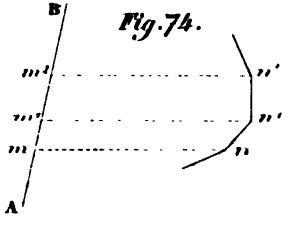


Fig.75.

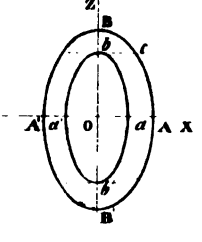


Fig. 77.

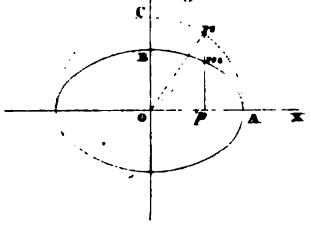


Fig. 78.

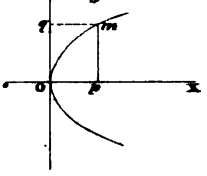


Fig. 80.

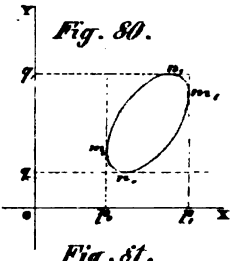


Fig. 79.

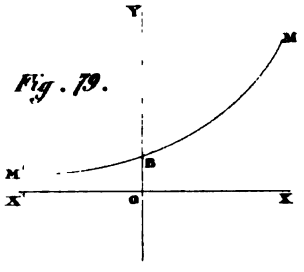


Fig. 82.

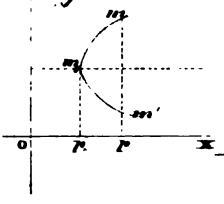


Fig. 81.

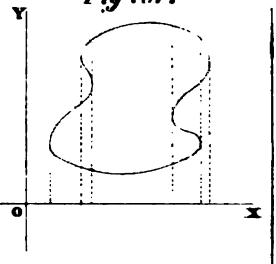


Fig. 84.

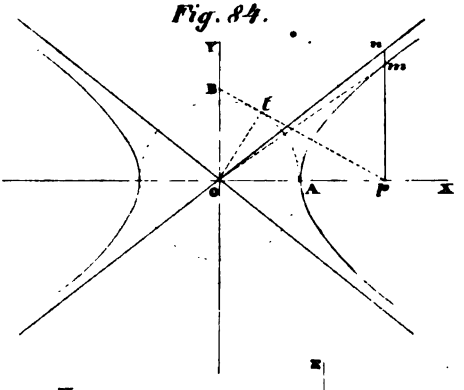


Fig. 83.

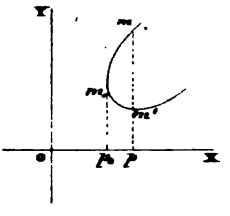


Fig. 85.

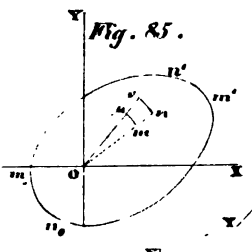


Fig. 86.

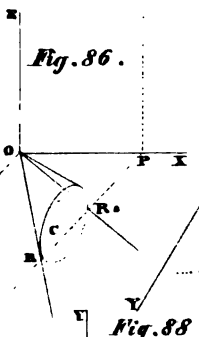


Fig. 87.

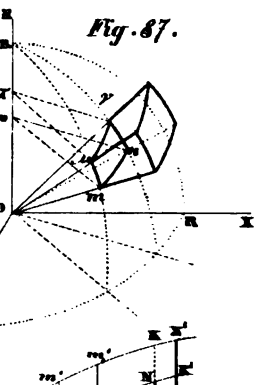


Fig. 89.

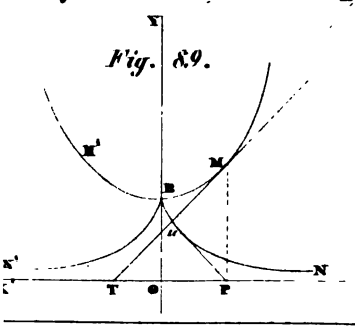


Fig. 88.

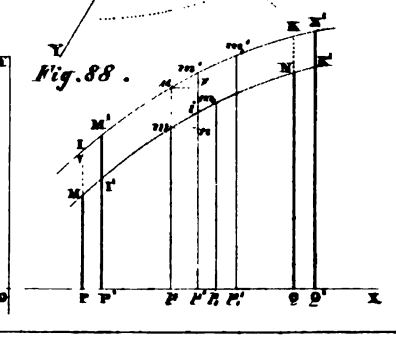


Fig. 90.

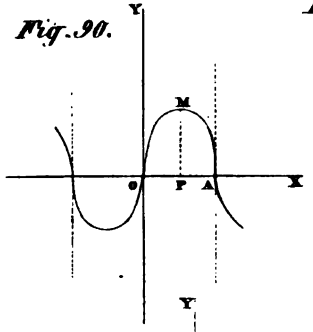


Fig. 96.

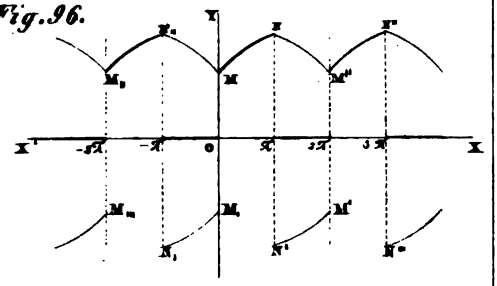


Fig. 91.

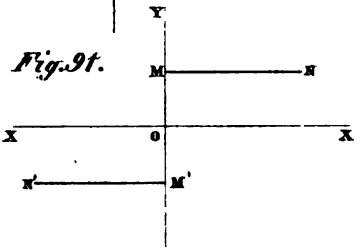


Fig. 94.

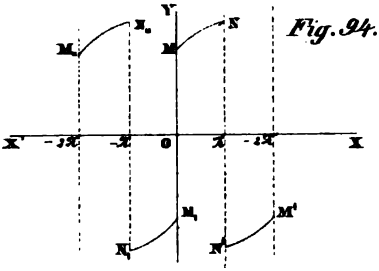


Fig. 93.

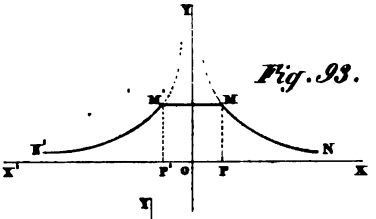


Fig. 95.

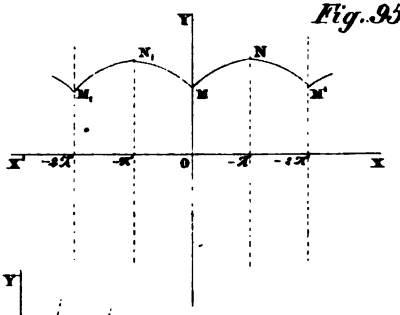


Fig. 92.

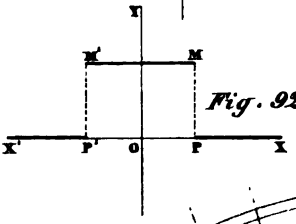


Fig. 97.

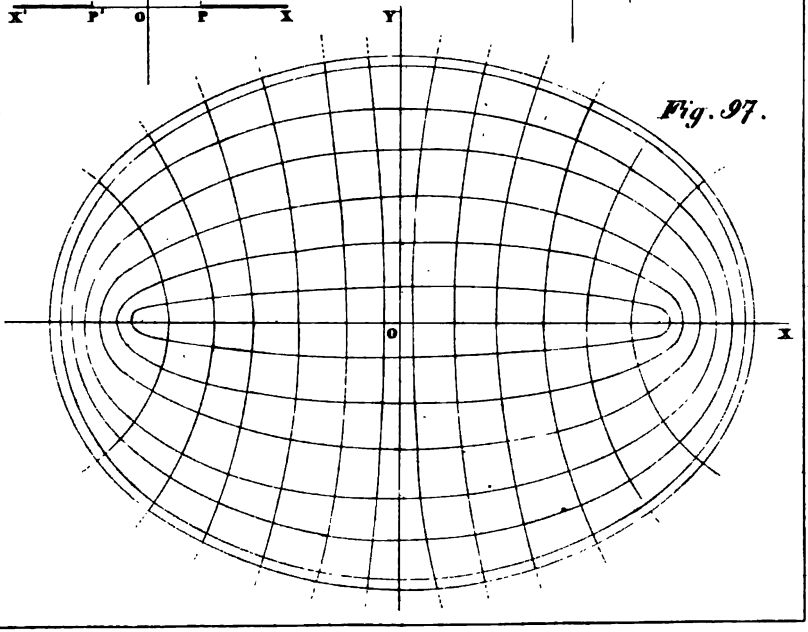


Fig. 99.

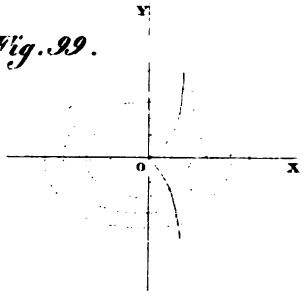


Fig. 100.

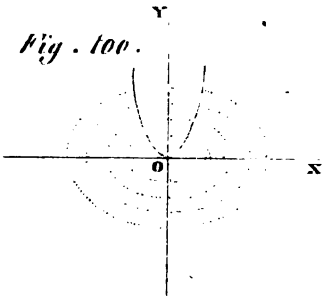


Fig. 98.

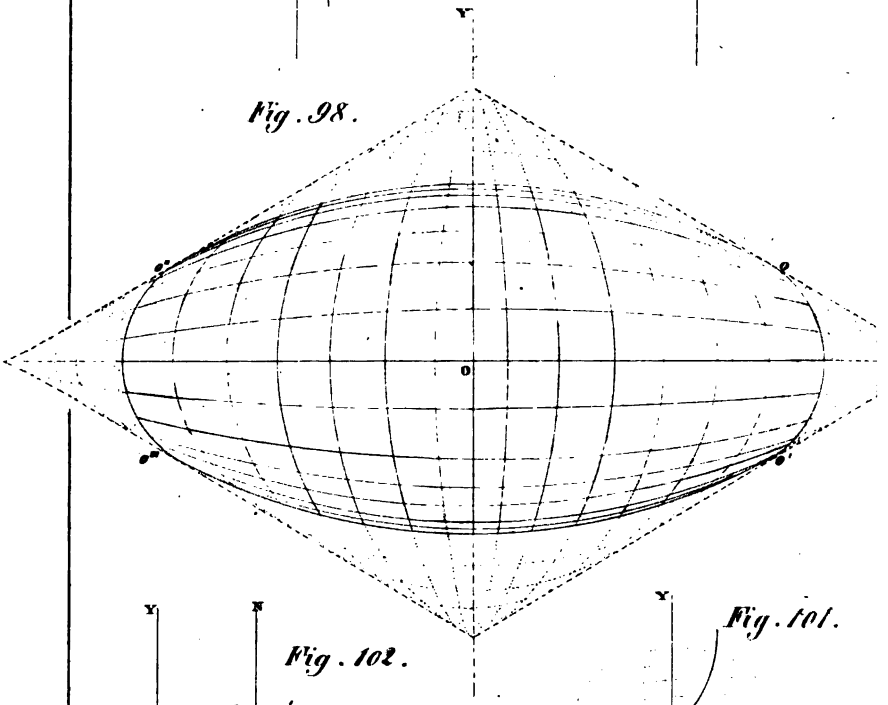


Fig. 102.

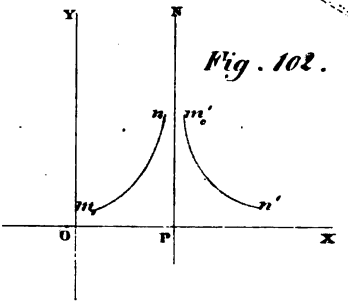


Fig. 101.

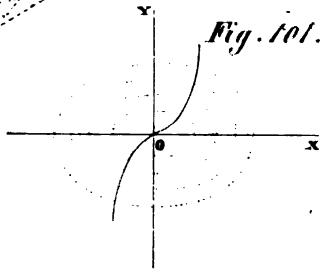


Fig. 103.

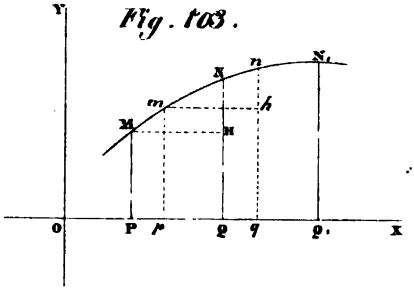
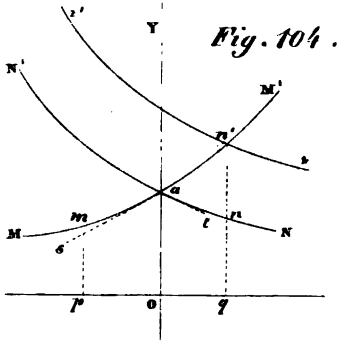


Fig. 104.



This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

DUE DEC 27 '18